



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

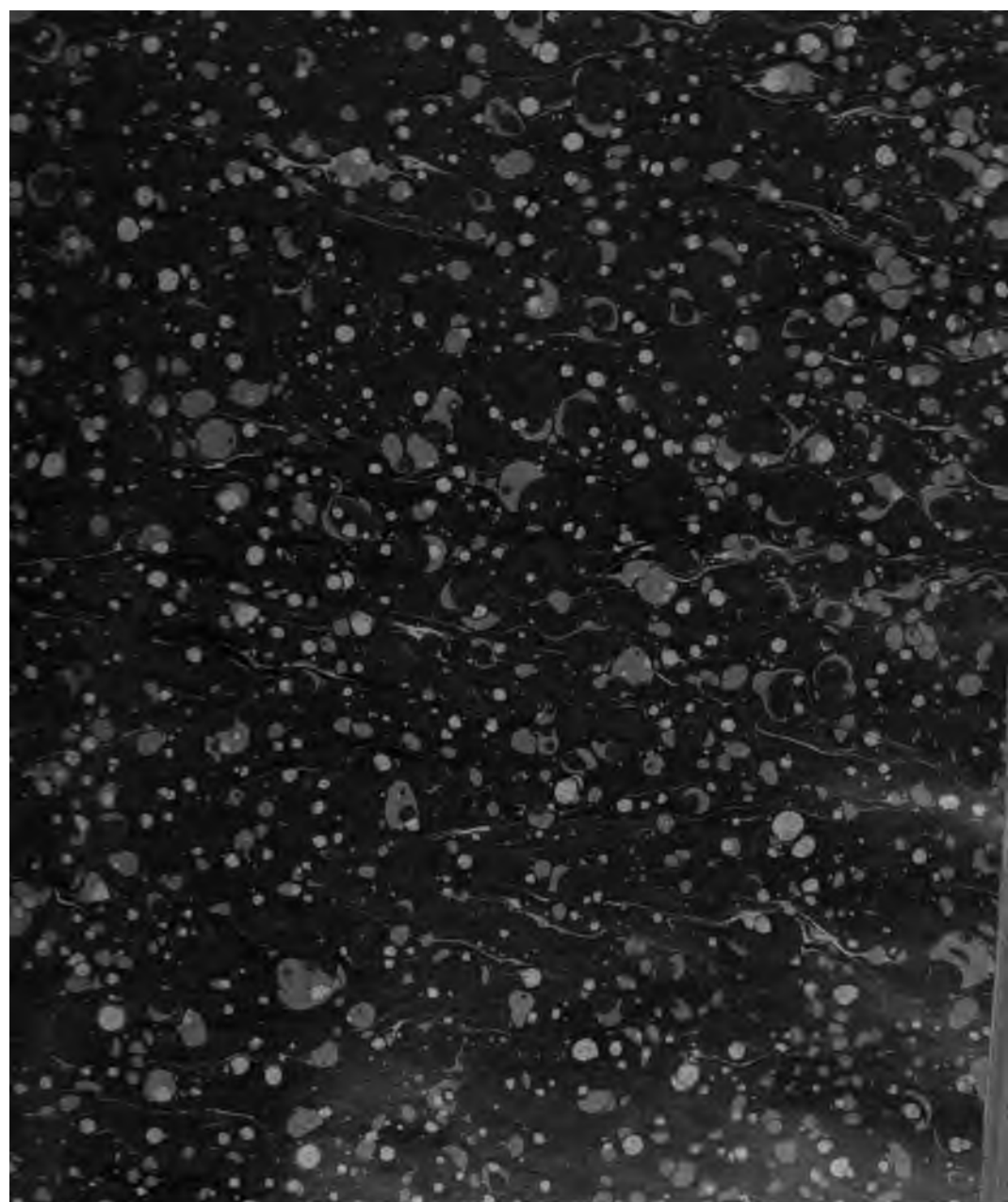
En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>



LELAND STANFORD JR.
UNIVERSITY
LIBRARY.

The Gift of

Prof G.A. Miller









40719

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

COMITÉ DE RÉDACTION.

MM. COLLIGNON.

FOURET.

HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

JORDAN.

MANNHEIM.

PICQUET.

○

BULLETIN

DE L'A

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE,

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES.

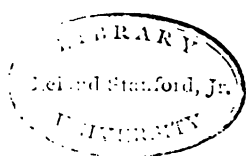
TOME HUITIÈME. — ANNÉE 1879-80.

PARIS,

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,

7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1880



Q 60958

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU MOIS DE JANVIER 1880 ⁽¹⁾.

(Les initiales S. P. désignent les Sociétaires perpétuels.)

Président honoraire.....	M. CHASLES.
Président.....	M. JORDAN.
Vice-Présidents	{ M. COLLIGNON. M. LAGUERRE. M. LAISANT. M. DE POLIGNAC.
Secrétaires	{ M. FOURET. M. PICQUET.
Vice-Secrétaires.....	{ M. MOREL. M. PERRIN.
Archiviste.....	M. FABRE.
Trésorier.....	M. CLAUDE-LAFONTAINE.
Membres du Conseil	{ M. ANDRÉ (Désiré). M. OSSIAN BONNET. M. BRISSE. M. DARBOUX. M. DE LA GOURNERIE. M. HALPHEN. M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. M. LEMONNIER. M. LUCAS. M. MANNHEIM. M. RESAL. M. ROUCHÉ.
Membres du Conseil non résidents..	{ M. AOUST (l'abbé). M. CLAYEUX. M. CREMONA. M. WEYR (Émile).

(¹) MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

ACHARD, directeur adjoint de la Compagnie d'assurances sur la vie *la Confiance*, rue Favart, 2, à Paris.

ANDRÉ (Désiré), docteur ès Sciences, rue Gay-Lussac, 25, à Paris.

ANTOINE (Charles), ingénieur de la Marine, à Brest.

Aoust (l'abbé), professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille.

APPELL, professeur à la Faculté des Sciences, à Dijon.

ARON (Henri), banquier, rue de Grammont, 14, à Paris.

BACH, doyen de la Faculté des Sciences, place Stanislas, 2, à Nancy.

BENOIST (Adolphe), docteur en droit, place du Châtelet, à Chalon.

BERDELLE, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).

BERTRAND (Joseph), secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, rue de Seine, 6, à Paris.

BISCHOFFSHEIM, banquier, rue de Grammont, 27, à Paris, S. P.

BIENAYNE (Alexis), chef d'État-Major du Génie, à Alger.

BIENAYNE (Arthur), ingénieur de la Marine, à Toulon.

BIENAYNE, membre de l'Institut (décédé), S. P.

BLEYNE, ancien élève de l'École Polytechnique, avenue Lacuée, 28, à Paris.

BONNET (Ossian), membre de l'Institut, boulevard Saint-Michel, 80, à Paris.

BORCHARDT, membre de l'Académie des Sciences, Victoriastrasse, 6, à Berlin, S. P.

BOUCHER, directeur de l'École préparatoire des Sciences et Lettres, rue du Pin, 9, à Angers.

BOUFFET, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Carcassonne (Aude).

BOULANGER, professeur de Mathématiques, boulevard Saint-Michel, 103, à Paris.

BOURGET, recteur de l'Académie d'Aix.

BREHARD, architecte, boulevard Malesherbes, 16, à Paris.

BRIOSCHI, directeur de l'École Polytechnique, à Milan (Italie).

BRISSE (A.), ingénieur du dessèchement du lac Fucino, Abruzzes (Italie).

BRINSE (Ch.), répétiteur à l'École Polytechnique, rue Denfert-Rochereau, 22, à Paris.

BROCARD, capitaine du Génie, à Grenoble, S. P.

CABART (Maurice), boulevard Saint-Michel, 145, à Paris.

CAREN, capitaine du Génie, à Besançon.

CARON, professeur au lycée Saint-Louis, à Paris.

CATALAN, professeur à l'Université, à Liège (Belgique).

CHARLON, directeur des Compagnies d'assurances contre l'incendie *la Confiance et le Midi*, rue Favart, 2, à Paris.

CHASLES, membre de l'Institut, rue Paul-Louis Courier, 3, à Paris, S. P.

CIVIALE, rue de la Tour-des-Dames, 2, à Paris.

CLAYEUX, intendant divisionnaire, à Oran (Algérie).

CLAUDE-LAFONTAINE, banquier, rue de Trévise, 32, à Paris, S. P.

COCHIN (Denis), rue de Grenelle-Saint-Germain, 86, à Paris.

COLLET, professeur à la Faculté des Sciences, à Grenoble.

COLLIGNON, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, rue des Saints-Pères, 28, à Paris.

DE CONNEROUSSE, professeur à l'École Centrale, rue Blanche, 63, à Paris.

COENCCELLES, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, rue de Rennes, 68, à Paris.

CREMONA, directeur de l'École des Ingénieurs, à Rome.

DARBOUX, maître de Conférences à l'École Normale, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.

DESQ, capitaine d'Artillerie, à Besançon.

DEWULF, lieutenant-colonel, chef du Génie, à Bayonne.

DOSTOR, docteur ès sciences, rue de Rennes, 105, à Paris.

DUGUEN, ingénieur civil, à Roye (Somme).

DURANDE, professeur à la Faculté des Sciences, à Poitiers.

FABRE, ancien élève de l'École Polytechnique, rue Saint-Martin, 4, à Paris.

FLYE SAINTE-MARIE, répétiteur à l'École Polytechnique, rue du Sommerard, 12, à Paris.

FONTES, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Villefranche (Haute-Garonne).

FOURNET, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Washington, 16, à Paris.

- CIRIEL**, ingénieur des Ponts et Chaussées, agrégé de la Faculté de Médecine, rue Joffroy, 39, à Paris-Batignolles.
- GAUTHIER-VILLARS**, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris, S. P.
- GENTY**, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Oran.
- GEROY**, rue Hallé, 40 et 42, à Paris.
- GIROD** (A.), ingénieur des Manufactures de l'État, à Paris.
- GOFFART**, boulevard des Batignolles, 84, à Paris.
- CONZALES** (Jozé), rue Mège, 63, à Paris.
- GOURNERIE** (de la), membre de l'Institut, boulevard Saint-Michel, 75, à Paris.
- GRAINDORGE**, professeur à l'Université, rue Paradis, 92, à Liège (Belgique).
- GUELLOT**, chef de bataillon, commandant le 10^e bataillon de chasseurs à pied, à Saint-Dié (Vosges).
- HAAG**, répétiteur à l'École Polytechnique, avenue de Villars, 15, à Paris.
- HALPHEN**, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Sainte-Anne, 51, à Paris, S. P.
- HATON DE LA GOUPILLIÈRE**, ingénieur en chef des Mines, rue Garancière, 8, à Paris, S. P.
- HATT**, ingénieur hydrographe, rue de l'Université, 13, à Paris.
- HENRY**, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Orléans.
- MÉRAUD**, ingénieur hydrographe, rue de l'Université, 13, à Paris.
- HERMANT**, capitaine d'Artillerie, Dépôt central, place Saint-Thomas-d'Aquin, 1, à Paris.
- HERMITE**, membre de l'Institut, rue de la Sorbonne, 2, à Paris, S. P.
- MILHAIRE**, professeur de Mathématiques, rue d'Arras, 4, à Douai (Nord).
- HIRST**, directeur des études de l'École navale, à Greenwich (Angleterre), S. P.
- HOLST** (Elling), stipendiat de l'Université, à Christiania (Norvège).
- HOUBIGANT**, chef de bataillon du Génie en retraite, rue Lecourbe, 88, à Paris.
- HUGO** (Comte L.), traducteur au Ministère des Travaux publics, rue de la Victoire, 91, à Paris.
- HUMBERT**, élève-ingénieur des Mines, rue Notre-Dame-des-Champs, 83, à Paris.
- HUYOT**, ingénieur des Mines, rue du Cirque, 10, à Paris.
- JACQUIER**, ingénieur des Ponts et Chaussées, cours Saint-Jean, 170, à Bordeaux.
- JANIN**, capitaine au 32^e régiment d'Artillerie, à Orléans.
- JAVARY**, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, rue du Cardinal-Lemoine, 28, à Paris.
- JORDAN**, professeur à l'École Polytechnique, rue de Varennes, 48, à Paris, S. P.
- JOUFFRET**, capitaine d'Artillerie, professeur à l'École d'application de l'Artillerie et du Génie, à Fontainebleau.
- JUNG**, professeur à l'Institut technique supérieur, via Montebello, 16, à Milan.
- KEHLER**, directeur de l'École préparatoire de Sainte-Barbe, rue de Reims, 6, à Paris.
- KLEIN** (Félix), professeur à l'École Polytechnique, à Munich.
- LAFON**, professeur au lycée Fontanes, à Paris.
- LACROIX**, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Michel, 61, à Paris.
- LAISANT**, député, rue de l'Aqueduc, 5, à Paris.
- LAQUIÈRE**, capitaine d'Artillerie, à Blidah (Algérie).
- LAUTH**, manufacturier, à Thann (Alsace).
- LEAUTÉ**, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Guy-de-la-Brosse, 6, à Paris.
- LEBOY** (Ernest), professeur au lycée Charlemagne, rue des Feuillantines, 11, à Paris.
- LEFEBURE DE FOURCY**, rue Monsieur-le-Prince, 58, à Paris.
- LEFFLER**, professeur à l'Université, à Helsingfors (Finlande).
- LEMOINE**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Cherche-Midi, 55, à Paris.
- LEMOXNIER**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Corneille, boulevard Saint-Michel, 145, à Paris.
- LE PAIGE**, professeur à l'Université, à Liège (Belgique).
- LESPIAULT**, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux.
- LEVY** (Maurice), professeur à l'École Centrale, boul. Saint-Germain, 258, à Paris.
- LEZ** (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
- LIGUINE**, professeur à l'Université, à Odessa (Russie).

LINDEMANN, professeur à l'Université, à Fribourg-en-Brisgau (Allemagne).
LUCAS, professeur au lycée Saint-Louis, rue du Bellay, 2, à Paris.
MALEYX, professeur au collège Stanislas, rue Saint-Jacques, 212, à Paris.
MALLOIZEL, rue de la Vieille-Estrapade, 11, à Paris.
MANNHEIM, professeur à l'École Polytechnique, rue de la Pompe, 11, à Paris-Passy, S. P.
MARGERIE, professeur à l'école Monge, rue Blanche, 71, à Paris.
MARSHALL (le général de), rue Chante-Pinot, à Auxerre.
MATHIEU (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, rue du Luxembourg-Saint-Jean, 22, à Nancy.
NIGNON, capitaine au 6^e régiment d'Artillerie, à Grenoble.
MONTIGNY (de), capitaine du génie, à Villeneuve-Saint-Georges (Seine).
MOREL, ancien élève de l'École Polytechnique, rue des Feuillantines, 72, à Paris.
MOUTARD, examinateur à l'École Polytechnique, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
NICOLAÏDES, professeur à l'Université, à Athènes.
OVIDIO (Enrico d'), professeur à l'Université, Piapa statuto, à Turin.
PARMENTIER (le général), membre du Comité des fortifications, rue du Cirque, 5, à Paris.
PARRAN, ingénieur des Mines, rue de la Victoire, 59, à Paris.
PERCIN, capitaine d'Artillerie, à l'École spéciale militaire, à Saint-Cyr.
PERRIN, ingénieur des Mines, rue de Verneuil, 22, à Paris.
PHILIPPON, secrétaire à la Faculté des Sciences, rue du Cardinal-Lemoine, 75, à Paris.
PICARD (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, à Toulouse.
PICQUET, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Michel, 103, à Paris.
PISTOYE (de), capitaine d'Artillerie, à Nancy.
PLOCQ, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Paris.
POLIGNAC (prince C. de), rue Saint-Florentin, à Paris, S. P.
POUSSET, professeur au lycée, à Poitiers.
PRESLES (de), sous-intendant militaire, à Évreux.
PUISSEUX, membre de l'Institut, boulevard Saint-Michel, 81, à Paris.
PUTZ, colonel commandant le 32^e régiment d'Artillerie, à Orléans.
RABAU, rue Bonaparte, 58, à Paris.
RANCY (de), sous-directeur de la Compagnie d'assurances contre l'incendie *l'Aigle*, rue de Châteaudun, 44, à Paris.
REINACH (baron de), banquier, rue de la Bourse, 4, à Paris.
RESAL, membre de l'Institut, rue Saint-André-des-Arts, 58, à Paris.
REY (Casimir), professeur à l'École régimentaire du Génie, à Versailles.
RIBACOUR, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Draguignan.
RODET, ingénieur à la Manufacture des tabacs, quai d'Orsay, à Paris.
ROLLAND, membre de l'Institut, au Ministère des Finances, à Paris.
ROUART, ingénieur civil, rue Oberkampf, 151, à Paris.
ROUCHE (Eugène), professeur à l'École Centrale, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 62, à Paris.
ROUSSELIN, professeur au lycée Fontanes, rue de la Ferme-des-Mathurins, 5, à Paris.
ROUX, architecte, rue de l'Arcade, 25, à Paris.
SAINT-CLAIRE DEVILLE (Henri), membre de l'Institut, boulevard Saint-Germain, 155, à Paris.
SAINT-LOUP, professeur à la Faculté des Sciences, à Besançon.
SALTEL (Louis), professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux.
SANCERY, à Cahors.
SARRAU, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Bondy, 24, à Paris.
SARTIAUX, ingénieur des Ponts et Chaussées, à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
SCHUBERT, professeur, Steindam, 89, à Hambourg (Allemagne).
SÉGUY, rue Pascal, 21, à Paris.
SIVRING (Jos.), ingénieur en chef des Travaux publics, place du Saint-Esprit, 9, à Luxembourg.

STEPHAN, directeur de l'Observatoire, à Marseille.
STEPHANOS (Dr Cyparissos), rue de l'Abbé-de-l'Épée, 1, à Paris.
STUDNICKA, professeur à l'Université, à Prague (Bohème).
SVILOKOSSITSCH, ingénieur, rue du Cardinal-Lemoine, 51, à Paris.
TANNERY (Paul), ingénieur des Manufactures de l'État, au Havre. S. P.
TANNERY, professeur suppléant à la Faculté des Sciences, rue d'Ulm, 45, à Paris.
TERRIER, professeur de Mathématiques, quai d'Orléans, 26, à Paris.
THÉRY, professeur au lycée, rue des Récollets anglais, à Douai (Nord).
TISSOT, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, boulevard de Bonne, 1, à Grenoble.
TISSERAND, membre de l'Institut, avenue de l'Observatoire, 5, à Paris.
TRESCA, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Vendôme (Loir-et-Cher).
TURQUAN, docteur ès sciences, boulevard de la Reine, 25, à Versailles.
VACQUANT, inspecteur général de l'Université, boulevard Saint-Michel, 12, à Paris.
VAZEILLE, ancien élève de l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 26, à Paris.
VICAIRE, ingénieur des Mines, rue d'Assas, 76, à Paris.
VINTÉJOUX, professeur au lycée Saint-Louis, à Paris.
VOLLOT (Jules), professeur de Mathématiques au lycée, à Alger.
WEILL, professeur de Mathématiques, rue Roquépine, 20, à Paris.
WELSCH, capitaine d'Artillerie, à l'École spéciale militaire, à Saint-Cyr.
WEYR (Dr Édouard), professeur à l'École Polytechnique, à Prague (Bohème).
WEYR (Dr Émile), professeur à l'Université, à Vienne (Autriche).
WICKERSHEIMER, ingénieur des Mines, à Carcassonne.
WORMS DE ROMILLY, ingénieur des Mines, boulevard Haussmann, 45, à Paris.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Sur la fonction exponentielle; par M. LAGUERRE.

(Séance du 7 novembre 1879.)

1. Soient $a, b, c, \dots, l, m$ quantités arbitraires et $F, F_1, F_2, \dots, F_{m-1}, m$ polynômes entiers en x . Si l'on désigne respectivement par $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ le degré de ces polynômes et si l'on pose, pour abréger,

$$\mu = \alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda,$$

on voit que, dans l'expression

$$V = Fe^{ax} + F_1e^{bx} + F_2e^{cx} + \dots + F_{m-1}e^{lx},$$

figurent les $\mu + m$ coefficients des polynômes $F, F_1, \dots, F_{m-1}$.

En donnant à l'un d'eux une valeur arbitraire, on peut encore disposer des $(\mu + m - 1)$ autres coefficients de façon à annuler, dans le développement de V suivant les puissances croissantes de x , les coefficients de

$$x^0, x^1, x^2, \dots, x^{\mu+m-2}.$$

Les polynômes $F, F_1, \dots, F_{m-1}$ étant ainsi déterminés, le développement de V commencera par un terme de l'ordre de $x^{\mu+m-1}$.

Dans une Note publiée dans le *Journal de M. Borchardt* ⁽¹⁾,

⁽¹⁾ Lettre de M. Hermite à M. Borchardt (*Journal de M. Borchardt*, t. 76).

M. Hermite a donné une méthode très simple et très élégante pour déterminer les valeurs de ces polynômes. Depuis, dans le cas particulier où tous les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ sont égaux à un même nombre n ⁽¹⁾, j'ai rattaché la recherche de l'expression V au développement de e^{zx} suivant les puissances croissantes du polynôme

$$f(z) = (z - a)(z - b)(z - c) \dots (z - l),$$

et, en posant

$$f(z) = z^m + p z^{m-1} + q z^{m-2} + \dots$$

j'ai montré que V était une solution de l'éq
m^{ième} ordre

$$x \left(\frac{d^m y}{dx^m} + p \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + q \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + s \frac{dy}{dx} - \right. \\ \left. - n \left[m \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + (m-1)p \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + (m-2) \right] \right)$$

Si l'on représente, pour un instant, par

$$Dy, D^2y, D^3y, \dots$$

les dérivées successives de y , l'équation prend
sous la forme symbolique qui suit :

$$x f(D)y - f'(D)y = 0$$

2. Dans le cas plus général où les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ sont différents, il est aussi facile de former l'équation différentielle à laquelle satisfait V.

Si l'on pose, pour abrégér,

$$f_a = \frac{f}{x-a}, \quad f_b = \frac{f}{x-b}, \quad \dots, \quad f_l = \frac{f}{x-l},$$

cette équation différentielle peut s'écrire sous la forme symbolique

$$(1) \quad x f(D)y - [\alpha f_a(D) + \beta f_b(D) + \dots + \lambda f_l(D)]y = 0,$$

et on le démontrerait aisément en suivant la voie indiquée par M. Hermite dans la Note que j'ai citée ci-dessus.

⁽¹⁾ Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynôme (Journal de M. Borchardt, t. 88).

3. En particulier, si $m = 3$, l'équation (1) peut s'écrire

$$\begin{aligned} x[y''' - (\alpha + b + c)y'' + (ab + bc + ca)y' - abc y] \\ - \{(\alpha + \beta + \gamma)y'' - [\alpha(b + c) + \beta(c + a) + \gamma(a + b)]y' \\ + (\alpha bc + \beta ca + \gamma ab)y\} = 0. \end{aligned}$$

En supposant, ce qu'il est toujours permis de faire sans nuire à la généralité du problème, que

$$a = 0,$$

l'équation précédente devient

$$(2) \left\{ \begin{aligned} & x[y''' - (b + c)y'' + bc y'] \\ & - \{(\alpha + \beta + \gamma)y'' - [\alpha(b + c) + c\beta + a\gamma]y' + \alpha bc y\} = 0. \end{aligned} \right.$$

Je me propose, dans ce qui suit, de démontrer directement cette équation.

4. Soient F , F_1 et F_2 trois polynômes en x dont le degré soit respectivement marqué par les nombres α , β et γ ; on peut disposer des coefficients de ces polynômes de telle sorte que le développement de l'expression

$$V = F + F_1 e^{bx} + F_2 e^{cx}$$

commence par un terme de l'ordre de $x^{\alpha+\beta+\gamma+2}$.

On a donc

$$F + F_1 e^{bx} + F_2 e^{cx} = (x^{\alpha+\beta+\gamma+2}),$$

ou, en faisant, pour abréger, $\alpha + \beta + \gamma = \mu$,

$$(3) \quad F + F_1 e^{bx} + F_2 e^{cx} = (x^{\mu+2}) \quad (1).$$

En formant successivement la première et la seconde dérivée de la relation (3), il vient

$$(4) \quad F' + e^{bx}(F'_1 + bF_1) + e^{cx}(F'_2 + cF_2) = (x^{\mu+1})$$

et

$$(5) \quad F'' + e^{bx}(F''_1 + 2bF'_1 + b^2F_1) + e^{cx}(F''_2 + 2cF'_2 + c^2F_2) = (x^{\mu}).$$

(1) Ici, comme dans tout ce qui suit, je désigne généralement, indépendamment de la nature des coefficients, par (x') une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x et commençant par un terme en x^p .

M. Hermite a donné une méthode très simple et très élégante pour déterminer les valeurs de ces polynômes. Depuis, dans le cas particulier où tous les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ sont égaux à un même nombre n ⁽¹⁾, j'ai rattaché la recherche de l'expression V au développement de e^{zx} suivant les puissances croissantes du polynôme

$$f(z) = (z - a)(z - b)(z - c) \dots (z - l),$$

et, en posant

$$f(z) = z^m + pz^{m-1} + qz^{m-2} + \dots + sz + t,$$

j'ai montré que V était une solution de l'équation différentielle du $m^{\text{ème}}$ ordre

$$x \left(\frac{d^m y}{dx^m} + p \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + q \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + s \frac{dy}{dx} + ty \right) - n \left[m \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + (m-1)p \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + (m-2)q \frac{d^{m-3} y}{dx^{m-3}} + \dots + sy \right] = 0.$$

Si l'on représente, pour un instant, par

$$Dy, D^2y, D^3y, \dots$$

les dérivées successives de y , l'équation précédente peut se mettre sous la forme symbolique qui suit :

$$xf(D)y - f'(D)y = 0.$$

2. Dans le cas plus général où les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ sont différents, il est aussi facile de former l'équation différentielle à laquelle satisfait V.

Si l'on pose, pour abréger,

$$f_a = \frac{f}{x-a}, \quad f_b = \frac{f}{x-b}, \quad \dots, \quad f_l = \frac{f}{x-l},$$

cette équation différentielle peut s'écrire sous la forme symbolique

$$(1) \quad xf(D)y - [\alpha f_a(D) + \beta f_b(D) + \dots + \lambda f_l(D)]y = 0,$$

et on le démontrerait aisément en suivant la voie indiquée par M. Hermite dans la Note que j'ai citée ci-dessus.

⁽¹⁾ Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynôme (Journal de M. Borchardt, t. 88).

3. En particulier, si $m = 3$, l'équation (1) peut s'écrire

$$\begin{aligned} x[y''' - (\alpha + b + c)y'' + (ab + bc + ca)y' - abc y] \\ - \{(\alpha + \beta + \gamma)y''' - [\alpha(b + c) + \beta(c + a) + \gamma(a + b)]y'' \\ + (\alpha bc + \beta ca + \gamma ab)y'\} = 0. \end{aligned}$$

En supposant, ce qu'il est toujours permis de faire sans nuire à la généralité du problème, que

$$a = 0,$$

l'équation précédente devient

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & x[y''' - (b + c)y'' + bc y'] \\ & - \{(\alpha + \beta + \gamma)y''' - [\alpha(b + c) + c\beta + \alpha\gamma]y'' + \alpha bc y'\} = 0. \end{aligned} \right.$$

Je me propose, dans ce qui suit, de démontrer directement cette équation.

4. Soient F , F_1 et F_2 trois polynômes en x dont le degré soit respectivement marqué par les nombres α , β et γ ; on peut disposer des coefficients de ces polynômes de telle sorte que le développement de l'expression

$$V = F + F_1 e^{bx} + F_2 e^{cx}$$

commence par un terme de l'ordre de $x^{\alpha+\beta+\gamma+2}$.

On a donc

$$F + F_1 e^{bx} + F_2 e^{cx} = (x^{\alpha+\beta+\gamma+2}),$$

ou, en faisant, pour abréger, $\alpha + \beta + \gamma = \mu$,

$$(3) \quad F + F_1 e^{bx} + F_2 e^{cx} = (x^{\mu+2}) \quad (1).$$

En formant successivement la première et la seconde dérivée de la relation (3), il vient

$$(4) \quad F' + e^{bx}(F'_1 + bF_1) + e^{cx}(F'_2 + cF_2) = (x^{\mu+1})$$

et

$$(5) \quad F'' + e^{bx}(F''_1 + 2bF'_1 + b^2F_1) + e^{cx}(F''_2 + 2cF'_2 + c^2F_2) = (x^{\mu}).$$

(1) Ici, comme dans tout ce qui suit, je désigne généralement, indépendamment de la nature des coefficients, par (x^r) une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x et commençant par un terme en x^r .

En résolvant les équations (3), (4) et (5), on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} F & F_1 & F_2 \\ F' & F'_1 + bF_1 & F'_2 + cF_2 \\ F'' & F''_1 + 2bF'_1 + b^2F_1 & F''_2 + 2cF'_2 + c^2F_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (x^{\mu+2}) & F_1 & F_2 \\ (x^{\mu+1}) & F'_1 + bF_1 & F'_2 + cF_2 \\ (x^{\mu}) & F''_1 + 2bF'_1 + b^2F_1 & F''_2 + 2cF'_2 + c^2F_2 \end{vmatrix},$$

d'où il résulte que Δ est divisible par x^{μ} , et, comme d'ailleurs cette expression est précisément du degré μ , on a

$$\Delta = Mx^{\mu},$$

M désignant une quantité constante.

5. Je pose, pour abréger,

$$\Delta = Mx^{\mu} = PF'' - QF' + RF,$$

puis

$$F_1 e^{bx} = u, \quad F_2 e^{cx} = v,$$

et enfin

$$uv' - vu' = w, \quad u'v'' - v'u'' = \omega.$$

Comme on a évidemment

$$\Delta = \begin{vmatrix} F & e^{-bx}u & e^{-cx}v \\ F' & e^{-bx}u' & e^{-cx}v' \\ F'' & e^{-bx}u'' & e^{-cx}v'' \end{vmatrix}.$$

on en déduit

$$P = e^{-(b+c)}w, \quad Q = e^{-(b+c)}w', \quad \text{et} \quad R = e^{-(b+c)}\omega.$$

Considérons maintenant l'équation différentielle

$$\begin{vmatrix} y & e^{-bx}u & e^{-cx}v \\ y' & e^{-bx}u' & e^{-cx}v' \\ y'' & e^{-bx}u'' & e^{-cx}v'' \end{vmatrix} = Mx^{\mu},$$

que l'on peut écrire

$$(6) \quad Py'' - Qy' + Ry = Mx^{\mu}.$$

Cette équation est satisfaite quand on y fait $y = F$; la même équation

tion est également satisfaite quand on y fait $y = u$ ou $y = v$, pourvu que l'on y remplace la constante M par zéro.

Si donc on élimine, par différentiation, la constante M de l'équation (6), l'équation que l'on obtient

$$\begin{aligned} P.y''' + (P.x' - Q.x - 3nP)y'' \\ + (R.x - Q'.x + 3nQ)y' + (R'.x - 3nR)y = 0 \end{aligned}$$

a pour solutions

$$y = F, \quad y = u \quad \text{et} \quad y = v;$$

c'est, par suite, l'équation à laquelle satisfait l'expression V. En y remplaçant P , Q et R par leurs valeurs données plus haut, elle prend la forme suivante :

$$(A) \quad \begin{cases} w.x''' - [(b+c).x + \mu]w.y'' \\ + [x\omega + x(b+c)w' - xw'' + \mu w'], y' \\ + [x\omega' - (b+c).x\omega - \mu\omega].y = 0. \end{cases}$$

6. Pour simplifier cette équation, je remarque que l'équation (6) a une solution entière, à savoir le polynôme F . Il est facile d'ailleurs d'intégrer cette équation, puisque l'équation obtenue en retranchant le second membre,

$$P.y'' - Q.y' + R.y = 0$$

a pour solutions

$$y = u \quad \text{et} \quad y = v.$$

En employant donc la méthode connue de la variation des constantes arbitraires, je poserai

$$y = Au + Bv,$$

puis

$$A'u + B'v = 0 \quad \text{et} \quad A'u' + B'v' = \frac{M.x^k}{p}.$$

On en déduit

$$A' = \frac{M.x^k}{p^2} e^{-bx} F_1 dx, \quad B' = -\frac{M.x^k}{p^2} e^{-cx} F_1 dx$$

et

$$y = MF_1 e^{bx} \int \frac{x^k}{p^2} e^{-bx} F_1 dx - MF_2 e^{cx} \int \frac{x^k}{p^2} e^{-cx} F_1 dx.$$

Comme l'une des valeurs de γ est le polynôme F , on voit que l'intégrale

$$\int \frac{x^{\gamma}}{P^2} e^{-bx} F_2 dx$$

ne doit renfermer d'autre transcendante que la fonction e^{-bx} .

En désignant par λ une racine quelconque de l'équation $P = 0$, posons

$$\frac{x^{\gamma} F_2}{P^2} = E + \sum \frac{P}{x - \lambda} + \sum \frac{q}{x - \lambda^2};$$

l'intégrale précédente devient

$$\int e^{-bx} E dx + \int e^{-bx} \sum \frac{P}{x - \lambda} dx + \int e^{-bx} \sum \frac{q}{x - \lambda^2} dx,$$

ou, en intégrant par parties,

$$\int e^{-bx} E dx - \sum \frac{e^{-bx} q}{x - \lambda} + \int e^{-bx} \sum \frac{P - bq}{x - \lambda} dx.$$

Cette expression ne devant renfermer d'autre transcendante que e^{-bx} , on doit avoir, pour toutes les racines de l'équation $P(\lambda) = 0$, la relation

$$b = \frac{P}{q};$$

or un calcul facile donne

$$\frac{P}{q} = \frac{x}{\lambda} + \frac{F_2' \lambda}{F_2 \lambda} - \frac{P'' \lambda}{P' \lambda}.$$

On a donc, quelle que soit la racine considérée de l'équation $P(\lambda) = 0$,

$$\frac{x}{\lambda} + \frac{F_2' \lambda}{F_2 \lambda} - \frac{P'' \lambda}{P' \lambda} = b,$$

d'où l'identité suivante, où G désigne un polynôme du degré γ :

$$x F_2 P' + x F_2 P' - x F_2 P'' - b x F_2 P' + G P = 0.$$

7. Pour déterminer le polynôme G , je remarque qu'en négligeant les multiples de F_2 on a, par la définition même du polynôme P ,

$$P = F_1 F_2$$

et

$$P' \equiv F_1 F_2'' + (c - b) F_1 F_2'.$$

La relation donne d'ailleurs

$$x F_1' P' + G P \equiv 0,$$

d'où, en remplaçant P et P' par leurs valeurs congrues suivant le module F_2 ,

$$x F_1 F_2' F_2'' + (c - b) x F_1 F_2'^2 + G F_1 F_2' \equiv 0,$$

puis, en divisant par $F_1 F_2'$,

$$G \equiv (b - c) x F_2' - x F_2''$$

et enfin

$$G = m F_2 + (b - c) x F_2' - x F_2'',$$

m désignant une quantité constante.

En portant cette valeur de G dans l'équation (7), elle devient

$$(8) \quad x F_2 P'' + (b x F_2' - x F_2'' - \mu F_2) P' - [m F_2 + (b - c) x F_2' - x F_2''] P = 0;$$

P étant du degré $(\beta + \gamma)$, on trouve facilement, en égalant à zéro le coefficient du terme le plus élevé dans la relation précédente,

$$b(\beta + \gamma) - m - \gamma(b - c) = 0, \quad \text{d'où} \quad m = b\beta + c\gamma.$$

8. En employant maintenant les relations

$$P = e^{-(b+c)u} \quad \text{et} \quad F_2 = e^{\lambda c x} v,$$

j'introduis les fonctions w et v dans l'équation (8).

En effectuant les calculs, on obtient la relation

$$v x w'' - [(b + c) v x + \mu v + x v'] w' + [b c x v + \mu(b + c) v - m v + x v''] w = 0,$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$x w'' - [(b + c) x + \mu] w' + [b c x + \mu(b + c) - m] w + \frac{x}{v} (v'' w - v' w').$$

Je remarque maintenant que, w étant égal à $uv' - v u'$, l'expression

$$\frac{v'' w - v' w'}{v} \text{ a pour valeur}$$

$$v' u'' - u' v'' = -w.$$

On a donc identiquement

$$x(w'' - \omega) - [(b+c)x + \mu]w' + [bcx + \mu(b+c) - m]w = 0.$$

Tirons ω de cette relation et portons sa valeur dans l'équation (A); w, w' et w'' disparaîtront, et l'on obtiendra une équation de la forme

$$xy''' - [(b+c)x + \mu]y'' + [bcx + \mu(b+c) - m]y' + Hy = 0.$$

On déterminera H en remarquant que, l'équation précédente ayant pour solution le polynôme entier F qui est du degré α , H est une constante, et que le coefficient de x^α dans le premier membre est

$$H + \alpha bc;$$

on a donc

$$H = -\alpha bc.$$

9. Si maintenant on remplace respectivement μ et m par $\alpha + \beta + \gamma$ et $b\beta + c\gamma$, l'équation devient

$$xy''' - [(b+c)x + \alpha + \beta + \gamma]y'' + [bcx + \alpha(b+c) + c\beta + b\gamma]y' - \alpha bcy = 0,$$

et on peut la mettre sous la forme que j'ai mentionnée plus haut :

$$x[y''' - (b+c)y'' + bcy'] - \{(\alpha + \beta + \gamma)y'' - [\alpha(b+c) + c\beta + b\gamma]y' + \alpha bcy\} = 0.$$

Sur certains cas singuliers du déplacement d'un corps solide;
par M. HALPHEN.

(Séance du 7 novembre 1879.)

Quand on considère comme un corps solide une droite portant des points de division, cinq conditions sont nécessaires pour assurer la fixité de ce corps. Soumis seulement à quatre conditions, ce corps peut se déplacer. C'est au sujet de ce déplacement que, il y a huit ans, M. Mannheim a trouvé ce beau théorème :

Si quatre points d'une droite sont assujettis à rester respecti-

vement dans quatre plans fixes, tous les points de la droite décrivent des ellipses ⁽¹⁾.

J'ai, à la même époque, complété cette proposition en montrant que *le lieu des centres de ces ellipses est la droite unique partagée par les plans donnés en segments proportionnels respectivement à ceux de la droite mobile et les plus petits possible* ⁽²⁾.

Soit maintenant G cette droite, lieu des centres. Sur toute droite G' partagée par les plans donnés en segments proportionnels respectivement à ceux de G , les segments sont plus grands que ceux qui leur correspondent sur G . Il est donc impossible de déplacer G de telle sorte que les quatre points a, b, c, d qui sont actuellement sur les plans $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ restent dans ces plans.

On voit ainsi qu'il existe des cas singuliers où quatre conditions suffisent à assurer l'immobilité d'une droite portant des poids de division et considérée comme un corps solide. A quel caractère géométrique peut-on reconnaître de pareils cas?

Pour répondre à cette question, considérons de nouveau le déplacement d'une droite G dont des points restent dans des plans donnés. Si l'on assujettit simplement trois points a, b, c à rester dans des plans α, β, γ , tout autre point d a pour lieu une surface qui, d'après Dupin, est un *ellipsoïde* E . Que l'on impose maintenant à ce même point d la condition de rester sur un plan δ , alors il ne pourra se mouvoir que sur l'ellipse intersection de E et de δ . Mais, si le plan δ est tangent à l'ellipsoïde E , on voit que le déplacement n'est pas possible. Or les normales aux plans α, β, γ et à l'ellipsoïde E aux points a, b, c, d sont quatre droites d'un même hyperboloïde. Donc :

Si par quatre points a, b, c, d d'une droite G passent quatre plans $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dont les quatre normales en ces quatre points appartiennent à un même hyperboloïde, il est impossible de déplacer G de telle sorte que les points a, b, c, d restent respectivement sur les plans $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Reprenons le raisonnement précédent et substituons au plan δ

⁽¹⁾ Voir *Bulletin*, t. I. p. 113.

⁽²⁾ *Ibid.*, p. 117.

une surface quelconque. En prenant cette surface tangente à E, nous pourrions obtenir les divers cas que l'on rencontre au sujet de l'intersection de deux surfaces tangentes entre elles en un point. Aux plans α, β, γ nous pouvons aussi substituer des surfaces quelconques et dire alors :

Si par quatre points a, b, c, d d'une droite G passent quatre surfaces $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dont les quatre normales en ces quatre points appartiennent à un même hyperboloïde, et qu'on assujettisse a, b, c, d à rester respectivement sur $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, le déplacement de G est généralement impossible ou ambigu.

Je dis *généralement*, parce que ce déplacement, dont le premier élément dépend des infiniment petits d'ordre supérieur au premier, peut, dans certains cas, cesser d'être ambigu. Par exemple, avec les données précédentes, si la surface δ' a avec E un contact d'ordre pair, la ligne d'intersection des deux surfaces peut ne présenter en d qu'une seule branche réelle; le déplacement, dans ce cas, n'est pas ambigu. Si le contact de δ' et de E est d'ordre impair, du premier ordre par exemple, le déplacement est impossible ou ambigu, sauf toutefois si ce contact a lieu tout le long d'une ligne. Dans ce dernier cas, le déplacement est possible et cesse d'être ambigu.

Pour le déplacement d'un solide quelconque assujetti à cinq conditions, il existe des cas singuliers analogues qui donnent lieu à l'énoncé suivant :

Si par cinq points a, b, c, d, e d'un corps solide passent quatre surfaces $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ dont les normales en ces points soient rencontrées par deux mêmes droites, et qu'on assujettisse a, b, c, d, e à rester respectivement sur $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$, le déplacement du solide est généralement impossible ou ambigu.

Sur la réduction en fractions continues d'une fonction qui satisfait à une équation linéaire du premier ordre à coefficients rationnels; par M. LAGUERRE.

(Séance du 21 novembre 1879.)

1. Soit z une fonction satisfaisant à l'équation linéaire

$$(1) \quad Wz' = Vz + U,$$

où U , V et W sont des polynômes entiers en x .

Supposons, pour fixer les idées, que z soit développable suivant les puissances croissantes de x , et proposons-nous de former les réduites successives de la fonction z .

En désignant par f_n le polynôme du degré n qui est le dénominateur de la réduite de rang n , posons

$$z = \frac{\varphi_n}{f_n} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}} \right) \quad (1);$$

on en déduit

$$z' = \frac{\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n}{f_n^2} + \left(\frac{1}{x^{2n+2}} \right),$$

d'où, en portant ces valeurs dans l'équation (1),

$$U + V \frac{\varphi_n}{f_n} + \frac{V}{x^{2n+1}} - \frac{W(\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n)}{f_n^2} - \frac{W}{x^{2n+2}} = 0$$

et

$$f_n^2 U + f_n \varphi_n V - W(\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n) = f_n^2 \left[V \left(\frac{1}{x^{2n+1}} \right) + W \left(\frac{1}{x^{2n+2}} \right) \right].$$

Le premier membre de cette relation est un polynôme entier; le second membre est de l'ordre de la fonction $V \left(\frac{1}{x} \right) + W \left(\frac{1}{x^2} \right)$, et cet ordre, qui est indépendant du nombre n , indique le degré de ce polynôme.

En désignant par A_n un coefficient indépendant de x et dont je

(1) Je désigne ici, comme dans tout ce qui suit, par $\left(\frac{1}{x^p} \right)$ une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x et commençant par un terme de l'ordre de x^p .

fixerai plus tard la valeur, je puis donc poser

$$(2) \quad f_n^2 U + f_n \varphi_n V - W(\varphi_n' f_n - f_n' \varphi_n) = \Lambda_n \Theta_n,$$

où Θ_n est un polynôme entier dont le degré est marqué par l'ordre de la fonction

$$V\left(\frac{1}{x}\right) + W\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

2. Formons maintenant l'équation différentielle du second ordre

$$My'' - Ny' + Py = 0,$$

qui a pour solutions

$$y_1 = f_n \quad \text{et} \quad y_2 = e^{-\int \frac{V}{W} dx} (\varphi_n - f_n z).$$

En posant, pour abrégier,

$$\omega = y_1' y_2 - y_2' y_1,$$

on a, d'après une formule connue,

$$\frac{N}{M} = \frac{d}{dx} \log \omega;$$

or un calcul facile donne

$$\omega = e^{-\int \frac{V}{W} dx} \frac{f_n^2 U + f_n \varphi_n V - W(\varphi_n' f_n - f_n' \varphi_n)}{W},$$

et, en tenant compte de la relation (2),

$$\omega = e^{-\int \frac{V}{W} dx} \frac{\Lambda_n \Theta_n}{W},$$

d'où

$$\frac{N}{M} = \frac{\Theta_n'}{\Theta_n} - \frac{W'}{W} - \frac{V}{W},$$

et il en résulte immédiatement que l'équation cherchée est de la forme

$$W \Theta_n y'' + [(V + W') \Theta_n - W \Theta_n'] y' + K_n y = 0,$$

où K_n désigne un polynôme entier dont le degré est indépendant de n .

Je mettrai cette équation sous la forme suivante :

$$W_J'' + \left(v + W' - W \frac{\Theta_n'}{\Theta_n} \right) J' + \frac{K_n}{\Theta_n} J = 0,$$

ou, pour abréger,

$$(3) \quad W_J'' + W_0 J' + W_1 J = 0.$$

Je ferai remarquer que, quand cette équation est connue, Θ_n est connu à un facteur numérique près; on peut donc alors poser

$$\Theta_n = \lambda H_n \quad (1),$$

où H_n est un polynôme déterminé et λ une quantité indépendante de x .

3. Je ne m'occuperai pas ici du problème qui consiste à trouver la valeur des coefficients des polynômes Θ_n et K_n , problème qui présente d'assez grandes difficultés et que j'ai déjà essayé de traiter, particulièrement dans deux Notes *Sur la réduction en fractions continues d'une classe assez étendue de fonctions* et *Sur le développement en fractions continues de $e^{x(x)}$* , publiées dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (janvier 1878).

Je suppose cette équation formée.

Cela posé, on sait que l'on a entre les termes de deux réduites consécutives la relation

$$(4) \quad \varphi_{n+1} f_n - f_{n+1} \varphi_n = A_n,$$

A_n étant une quantité ne dépendant que du nombre n , et que du reste on peut choisir arbitrairement.

On a de même

$$\varphi_{n-1} f_n - f_{n-1} \varphi_n = -A_{n-1},$$

et on déduit de là

$$(A_{n-1} \varphi_{n+1} + A_n \varphi_{n-1}) f_n = (A_{n-1} f_{n+1} + A_n f_{n-1}) \varphi_n.$$

(1) H_n est déterminé par l'équation $\frac{H_n'}{H_n} = \frac{v + W' - W_n}{W}$.

d'où, si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = P_{n-1},$$

les deux relations

$$(5) \quad f_{n+1} - Q_{n-1}f_n + P_{n-1}f_{n-1} = 0$$

et

$$(6) \quad \varphi_{n+1} - Q_{n-1}f_n + P_{n-1}f_{n-1} = 0,$$

où Q_n désigne un polynôme du premier degré en x .

Il est à remarquer que, quand on se donne arbitrairement la quantité P_n en fonction du nombre entier n , les termes des réduites ne sont déterminés qu'à un facteur près purement numérique. Le signe des termes des réduites de rang impair demeure même indéterminé, car, en changeant ce signe, on voit que, toutes les quantités A_n changeant également de signe, P_n conserve la même valeur.

J'écris maintenant la relation (2) sous la forme suivante :

$$(Uf_n + V\varphi_n - W\varphi'_n)f_n + Wf'_n\varphi_n = A_n\Theta_n.$$

En éliminant Θ_n entre cette relation et l'identité (4), il vient

$$(Wf'_n + \Theta_n f_{n+1})\varphi_n = (W\varphi'_n - Uf_n - V\varphi_n + \Theta_n \varphi_{n+1})f_n.$$

On en déduit, en désignant par Ω_n un polynôme entier dont le degré est indépendant de n , les deux équations suivantes :

$$(7) \quad Wf'_n = \Omega_n f_n - \Theta_n f_{n+1},$$

$$(8) \quad W\varphi'_n = Uf_n + (V + \Omega_n)\varphi_n - \Theta_n \varphi_{n+1}.$$

4. Il s'agit maintenant de déterminer les polynômes Ω_n et Q_n .

A cet effet, je déduis de l'équation (7) la valeur de f'_n , et je porte la valeur ainsi obtenue, ainsi que celle de f'_n , dans l'équation (3); après quelques réductions faciles, on obtient la relation

$$\begin{aligned} & \Theta_n^2 \Theta_{n+1} f_{n+2} - \Theta_n^2 (\Omega_n + \Omega_{n+1} + V) f_{n+1} \\ & + [\Omega_n \Theta_n (\Omega_n + V) + W (\Omega'_n \Theta_n - \Theta'_n \Omega_n) + WK_n] f_n = 0; \end{aligned}$$

en la comparant à l'identité

$$f_{n+1} - Q_n f_{n+1} + P_n f_n = 0,$$

on en déduit

$$(9) \quad Q_n = \frac{\Omega_{n+1} + \Omega_n + V}{\Theta_{n+1}}$$

et

$$(10) \quad \Omega_n \Theta_n (\Omega_n + V) + W (\Omega'_n \Theta_n - \Theta'_n \Omega_n) + W K_n - P_n \Theta_n^2 \Theta_{n+1} = 0.$$

Posons

$$u = e^{\int \frac{\Omega_n}{W} dx},$$

d'où

$$(11) \quad \Omega_n = W \frac{u'}{u};$$

en remplaçant, dans l'équation précédente, Ω_n par cette valeur, on obtiendra, toutes réductions faites, l'équation

$$(12) \quad W u'' + W_0 u' + \left(W_1 - \frac{P_n \Theta_n \Theta_{n+1}}{W} \right) u = 0,$$

qui ne diffère, on le voit, de l'équation (3) que par l'addition du terme

$$- \frac{P_n \Theta_n \Theta_{n+1}}{W} u.$$

5. Quand on se donne l'équation (3), comme Θ_n n'est pas entièrement déterminé, je poserai, comme plus haut,

$$\Theta_n = \lambda H_n,$$

λ étant une quantité indépendante de x et inconnue.

L'équation (12) deviendra alors

$$(13) \quad W u'' + W_0 u' + \left(W_1 - \frac{\lambda^2 P_n H_n H_{n+1}}{W} \right) u = 0.$$

La forme du polynôme Ω_n étant connue, on déterminera facilement les coefficients inconnus de la fonction u , ainsi que la constante λ^2 ; on choisira arbitrairement la valeur de λ que l'on en déduit (si l'on prenait la valeur qui est de signe contraire, cela

n'aurait d'autre effet que de changer les signes des termes des réduites de rang impair), et la formule (11) donnera la valeur de Ω_n .

6. Comme application des formules qui précèdent, je prendrai pour exemple le développement de la fonction

$$z = e^x \int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x}$$

qui satisfait à l'équation différentielle

$$xz' = xz - 1,$$

et que j'ai étudiée dans une Note (1) présentée récemment à la Société.

Nous avons, dans ce cas,

$$V = W = x,$$

et l'équation différentielle à laquelle satisfait f_n est

$$xy'' + (x+1)y' - ny = 0.$$

On en conclut que H_n est une constante que l'on peut prendre égale à l'unité; je poserai

$$P_n = (n+1)^2.$$

Les équations (7) et (9) deviennent respectivement

$$(14) \quad xf'_n = \Omega_n f_n - \Theta_n f_{n+1}$$

et

$$(15) \quad Q_n = \frac{\Omega_{n+1} + \Omega_n + x}{\Theta_{n+1}}.$$

La formule (14) montre d'ailleurs que Ω_n est un polynôme du premier degré en x qui ne peut se réduire à une constante; on en conclut que u est de la forme $e^{\alpha x} x^b$, où α est différent de zéro.

(1) Sur l'intégrale $\int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x}$ (Bulletin de la Société mathématique, t. VII, p. 72).

L'équation (13) devient, dans ce cas,

$$xu'' + (x+1)u' - \left[n + \frac{\lambda^2(n+1)^2}{x} \right] u = 0;$$

Y substituant la valeur de u , il vient, toutes réductions faites,

$$\alpha(\alpha+1)x^2 + (2\alpha\beta + \alpha + \beta - n)x + [\beta^2 - (n+1)^2\lambda^2] = 0.$$

Comme α est essentiellement différent de zéro, on en déduit

$$\alpha = -1, \quad \beta = -(n+1), \quad \lambda^2 = 1,$$

et, en prenant la valeur négative de λ ,

$$\lambda = \Theta = -1,$$

puis

$$\Omega_n = x \frac{u'}{u} = -x \left(1 + \frac{n+1}{x} \right) = -(x+n+1).$$

Les formules (14) et (15) donnent, par suite,

$$xf'_n = f_{n+1} - (x+n+1)f_n$$

et

$$Q_n = \frac{x - (x+n+1) - (x+n+2)}{-1} = x + 2n + 3,$$

d'où l'identité

$$f_{n+1} = (x + 2n + 3)f_{n+1} - (n+1)^2 f_n.$$

Ce sont précisément les relations que, par une voie différente, j'avais trouvées dans la Note citée plus haut.

Sur l'arête de rebroussement d'une développable;

par M. ERNEST LEBON.

(Séance du 21 novembre 1879.)

Nous nous proposons de trouver les équations de l'arête de rebroussement de la développable circonscrite à deux coniques

à centre, ayant leurs plans parallèles, leurs axes parallèles et leurs centres situés sur une même perpendiculaire à leurs plans (1).

Soient O et O_1 les centres des coniques; prenons pour axe des x la droite OO_1 , pour axes des y et des z les deux axes de la conique O . Les coordonnées d'un point étant α, β, γ pour la conique O et $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ pour la conique O_1 , leurs axes étant respectivement b et c , b' et c' , les équations des coniques directrices sont

$$(1) \quad \alpha = 0, \quad \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = 1,$$

$$(2) \quad \alpha_1 = a, \quad \frac{\beta_1^2}{b'^2} + \frac{\gamma_1^2}{c'^2} = 1.$$

Soit MM_1 une génératrice de la développable; ses équations sont

$$(3) \quad \frac{x}{a} = \frac{y - \beta}{\beta_1 - \beta} = \frac{z - \gamma}{\gamma_1 - \gamma}.$$

Les tangentes en M et en M_1 aux coniques étant parallèles, leurs coefficients angulaires sont égaux, et l'on a

$$(4) \quad \frac{c^2 \beta}{b^2 \gamma} = \frac{c'^2 \beta_1}{b'^2 \gamma_1}.$$

On sait que, si les équations (2)

$$x = Az + P, \quad y = Bz + Q$$

sont celles d'une génératrice d'une développable, A, P, B, Q étant des fonctions d'une même variable, A' et P' les dérivées de A et P , la coordonnée z_0 d'un point x_0, y_0, z_0 de l'arête de rebroussement est donnée par la formule

$$(5) \quad z_0 = - \frac{P'}{A'}.$$

Or, des équations (3) on tire

$$(6) \quad x = \frac{a}{\gamma_1 - \gamma} z - \frac{a\gamma}{\gamma_1 - \gamma}.$$

(1) Cette question est exposée dans le *Traité de Géométrie descriptive* de M. J. de la Gournerie, par une marche différente de celle que nous indiquons.

(2) Voir la *Géométrie analytique* de MM. Briot et Bouquet, n° 479.

On a

$$(7) \quad A' = -\frac{a(\gamma'_1 - 1)}{(\gamma_1 - \gamma)^2}, \quad P' = -\frac{a(\gamma_1 - \gamma\gamma'_1)}{(\gamma_1 - \gamma)^2},$$

γ'_1 désignant la dérivée de γ_1 fonction de γ .

Si de (1) et (2) on tire β et β_1 , et que l'on porte leurs valeurs dans (4), on trouve

$$\frac{\gamma_1^2}{c'^2} = \frac{\lambda \frac{\gamma^2}{c^2}}{\mu},$$

en posant

$$\mu = 1 + (\lambda - 1) \frac{\gamma^2}{c^2} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{b^2 c'^2}{b'^2 c^2},$$

d'où

$$(8) \quad \gamma'_1 = \frac{\lambda \frac{\gamma}{c^2}}{\mu^2 \frac{\gamma_1}{c'^2}}.$$

Les valeurs (7) et (8), portées dans (5), donnent

$$z_0 = \frac{\lambda \frac{\gamma^2}{c^2} - \mu^2 \frac{\gamma_1^2}{c'^2}}{\lambda \frac{\gamma}{c^2} - \mu^2 \frac{\gamma_1}{c'^2}}$$

ou

$$(9) \quad z_0 = -\frac{\lambda(\lambda - 1) \frac{\gamma^4}{c^4}}{\lambda \frac{\gamma}{c^2} - \mu^2 \frac{\gamma_1}{c'^2}}.$$

Pour trouver x_0 et y_0 , on porte la première valeur de z_0 dans l'équation (6) et dans une équation tirée de (3) donnant y en fonction de z . Les formules obtenues sont

$$(10) \quad x_0 = -\frac{a \mu^2 \frac{\gamma_1}{c'^2}}{\lambda \frac{\gamma}{c^2} - \mu^2 \frac{\gamma_1}{c'^2}},$$

$$(11) \quad y_0 = \frac{\lambda \frac{\gamma^2}{c^2} - \mu^2 \frac{\gamma_1^2}{c'^2}}{\lambda \frac{\gamma}{c^2} - \mu^2 \frac{\gamma_1}{c'^2}}.$$

Appelons O un cône ayant son sommet en O et pour directrice l'arête de rebroussement. Les équations d'une génératrice du cône O sont, d'après (9), (10) et (11),

$$\frac{-a\mu^2 \frac{\gamma_1}{c'^2}}{x} = \frac{\lambda \frac{\beta\gamma}{c^2} - \mu^2 \frac{\beta_1\gamma_1}{c'^2}}{y} = \frac{-\lambda(\lambda-1) \frac{\gamma^2}{c^2}}{z}.$$

Élevons au carré cette suite de rapports égaux; remplaçons-y β , β_1 , γ , par leurs valeurs tirées de (1), (2), (4); et, posant

$$u = \frac{c^2}{\gamma^2} - 1,$$

nous trouvons

$$\frac{a^2(u + \lambda^2)}{(\lambda-1)^2 x^2} = \frac{b'^2 u^2}{y^2} = \frac{\lambda c'^2}{z^2}.$$

L'élimination de u entre ces deux équations conduit à l'équation du cône O :

$$(12) \quad \left[(\lambda-1) \frac{x}{a} \right]^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{y}{b'} \right)^{\frac{2}{3}} - \left(\lambda \frac{z}{c'} \right)^{\frac{2}{3}} = 0.$$

Maintenant, appelons O_1 un cône ayant son sommet en O_1 et pour directrice l'arête de rebroussement. Les équations d'une génératrice du cône O_1 sont

$$\frac{x-a}{x_0-a} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}.$$

Opérant comme précédemment, posant

$$t = \frac{\gamma^2}{c^2}$$

et éliminant t , nous trouvons pour l'équation du cône O_1 ,

$$(13) \quad \left[(\lambda-1) \frac{x-a}{a} \right]^{\frac{2}{3}} - \left(\lambda \frac{y}{b} \right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{z}{c} \right)^{\frac{2}{3}} = 0.$$

Les équations (12) et (13) représentent l'arête de rebroussement. A l'aide de ces équations on trouve aisément les projections sur les plans coordonnés de l'arête de rebroussement.

Observations sur la théorie des caractéristiques; par M. HALPHEN.

(Séance du 21 novembre 1879.)

Dans un Livre récent, intitulé *Kalkül der abzählenden Geometrie*, M. Schubert a consacré un Chapitre à la théorie des caractéristiques, non pas seulement pour les coniques, mais aussi pour diverses figures composées de points, de plans et de lignes droites. Je laisse de côté, quant à présent, la partie de ce Chapitre qui concerne les coniques, et je m'occupe ici des propositions qui se rapportent soit à la figure formée de plusieurs points en ligne droite, soit à la figure composée de plusieurs droites comprises dans un même plan et concourant en un même point. Ces propositions sont contenues dans les §§ 42 et 44 de l'Ouvrage cité (p. 307 et 323). Elles me paraissent inexactes. Je vais appuyer cette assertion sur deux exemples très simples.

1. Soit Γ la figure composée de n points $p_1, p_2, \dots, p_n$ situés sur une même ligne droite g . Envisagée dans l'espace, la figure Γ est déterminée par $n + 4$ conditions. Si on l'assujettit seulement à $n + 3$ conditions, on définit par là un système : c'est l'ensemble des figures Γ qui satisfont à ces $n + 3$ conditions. Suivant les notations de M. Schubert, désignons par Σ' un tel système, en même temps que nous désignerons par Σ une condition simple quelconque se rapportant à une figure Γ . D'après M. Schubert, le nombre des figures Γ qui, faisant partie d'un système quelconque Σ' , satisfont en même temps à une condition quelconque Σ , indépendante de ce système, est

$$\beta g + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \dots + \alpha_n p_n,$$

les nombres $\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ ne dépendant que de la condition Σ et les nombres $g, p_1, \dots, p_n$ ne dépendant que du système Σ' . Ces derniers sont les caractéristiques du système Σ' , et voici leurs définitions précises : g est le nombre des figures Γ , du système Σ' , pour chacune desquelles la droite g rencontre une droite donnée; p_m ($m = 1, 2, \dots, n$) est le nombre des figures Γ , du système Σ' , pour chacune desquelles le point p_m est dans un plan donné.

L'exemple que je vais envisager se rapporte au cas $n = 3$. Ainsi la figure Γ se compose de trois points p_1, p_2, p_3 en ligne droite. La droite qui les joint est désignée par g .

Je considère la condition Σ suivante. On donne un plan fixe Q . Soit q le point où g rencontre ce plan. Les quatre points p_1, p_2, p_3, q doivent former une division harmonique, dans laquelle p_1 sera le conjugué de q .

Il est aisé de trouver les nombres $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ relatifs à cette condition Σ . A cet effet, j'applique le théorème ci-dessus, en prenant successivement divers systèmes très simples.

Soit Σ_1 le système de figures Γ dans lequel p_2 et p_3 sont des points fixes. Les caractéristiques de ce système sont

$$g = 0, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = 0, \quad p_1 = 1.$$

Désignons par (Σ, Σ_1) le nombre des figures du système Σ_1 qui satisfont à la condition Σ . On a, d'après le théorème visé,

$$(\Sigma, \Sigma_1) = \alpha_1.$$

D'ailleurs, il est visible *a priori* que (Σ, Σ_1) est l'unité. Donc $\alpha_1 = 1$.

Soient, de même, Σ_2, Σ_3 les systèmes dans le premier desquels p_3, p_1 sont fixes, dans le second desquels p_1, p_2 sont fixes. On aura encore

$$(\Sigma, \Sigma_2) = \alpha_2 = 1, \quad (\Sigma, \Sigma_3) = \alpha_3 = 1.$$

Prenons enfin le système Σ'' , dans lequel p_1 est un point fixe et p_2, p_3 restent sur deux droites fixes A_2, A_3 contenues dans un plan qui passe en p_1 . Dans ce système, les caractéristiques sont

$$g = 1, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = p_3 = 1;$$

par suite,

$$(\Sigma, \Sigma'') = \alpha_2 + \alpha_3 + \beta = 2 + \beta.$$

Ici encore, (Σ, Σ'') se détermine aisément. Par rapport aux deux droites fixes A_2, A_3 , et dans leur plan, le point p_1 a une polaire. Cette droite rencontre le plan Q en un point qui, d'après la condition Σ , doit appartenir à g . La droite g est alors celle qui joint p_1 à ce dernier point. Donc $(\Sigma, \Sigma'') = 1$; donc $\beta = -1$.

Les nombres $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ étant trouvés, le théorème donne

maintenant

$$(1) \quad (\Sigma, \Sigma') = p_1 + p_2 + p_3 - g$$

pour le nombre des figures Γ , d'un système Σ' quelconque, qui satisfont en même temps à la condition Σ ci-dessus définie.

J'envisage actuellement le système Σ' dans lequel p_1, p_2, p_3 restent respectivement sur des droites fixes B_1, B_2, B_3 situées dans un même plan et concourant en un même point, la droite g passant, en outre, par un point fixe r situé dans le plan des droites B_1, B_2, B_3 . Les caractéristiques de ce système sont

$$g = 1, \quad p_1 = p_2 = p_3 = 1.$$

En conséquence, la formule (1) donne

$$(\Sigma, \Sigma') = 2.$$

Or, dans le plan des droites B , la droite B_1 a, par rapport aux droites B_2, B_3 , une polaire qui rencontre le plan Q en un point. Ce dernier coïncide nécessairement avec q . La droite qr est donc la seule du système Σ' qui satisfasse à la condition Σ . Ainsi, le nombre (Σ', Σ) , dans cet exemple, est l'unité, tandis que le théorème ci-dessus fournit le nombre deux. Par conséquent, le théorème est en défaut quand on l'applique au système Σ' et à la condition Σ précédemment définis.

2. Soit Δ la figure composée de n droites $g_1, g_2, \dots, g_n$ situées dans un même plan e et passant par un même point p . Cette figure est déterminée par $n + 5$ conditions. L'ensemble des figures Δ , satisfaisant à $n + 4$ conditions communes, constitue un système. D'après M. Schubert, le nombre des figures Δ qui, faisant partie d'un système quelconque Σ' , satisfont en même temps à une condition quelconque Σ , indépendante de ce système, est

$$\beta e + \gamma p + \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \dots + \alpha_n g_n,$$

les nombres $\beta, \gamma, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ ne dépendant que de la condition Σ et les nombres $e, p, g_1, \dots, g_n$ ne dépendant que du système Σ' . Ces derniers sont les caractéristiques de Σ' , savoir :

e est le nombre des figures Δ , du système Σ' , pour chacune desquelles le plan e passe par un point donné ;

p est le nombre des figures Δ , du système Σ' , pour chacune desquelles le point p est dans un plan donné;

$g_m (m=1, 2, \dots, n)$ est le nombre des figures Δ , du système Σ' , pour chacune desquelles la droite g_m rencontre une droite donnée.

Je prends encore ici le cas $n=3$. Pour condition Σ , j'envisage la suivante. Soit h la droite qui joint le point p au point de rencontre du plan e avec une droite donnée. Cette droite h doit être la conjuguée harmonique de g_1 par rapport à g_2 et g_3 .

Par des applications analogues à celles que j'ai exposées tout à l'heure, on trouve aisément, pour cette condition Σ ,

$$\gamma = -1, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1.$$

Pour système Σ' , je considère le suivant : les droites g_1, g_2, g_3 passent par trois points donnés en ligne droite, et le point p est assujéti à rester sur une droite donnée rencontrant celle qui joint les trois points fixes. Les caractéristiques sont

$$e = 0, \quad p = 1, \quad g_1 = g_2 = g_3 = 1.$$

Le théorème donne donc $(\Sigma, \Sigma') = 2$, tandis que le nombre véritable est $(\Sigma, \Sigma') = 1$. Ainsi, *le théorème concernant la figure Δ est en défaut quand on l'applique au système Σ' et à la condition Σ que je viens de définir.*

3. Je me borne à ces exemples, que j'ai choisis les plus simples possible, mais auxquels je pourrais sans peine en joindre beaucoup d'autres. Les deux théorèmes mentionnés sont exacts dans les cas seulement où le nombre n ne dépasse pas 2. J'ai déjà eu l'occasion de le montrer dans une Communication purement verbale faite à la Société dans la séance du 4 avril 1877, et qui est mentionnée au procès-verbal de cette séance (voir *Bulletin*, t. V, p. 75).

*Remarques sur les équations différentielles linéaires
du second ordre; par M. LAGUERRE.*

(Séance du 5 décembre 1879.)

1. En désignant par P, Q, R des fonctions données de x et par z et u des fonctions arbitraires de cette variable, posons

$$Pz'' + Qz' + Rz = Z$$

et

$$Pu'' + Qu' + Ru = U.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$S = e^{\int \frac{Q}{P} dx},$$

on déduit des équations précédentes

$$\begin{aligned} \frac{S(Zu - Uz)}{P} &= S(uz'' - zu'') + \frac{SQ}{P}(uz' - zu') \\ &= S(uz'' - zu'') + S'(uz' - zu'), \end{aligned}$$

d'où, en intégrant,

$$(A) \quad \int \frac{S(Zu - Uz) dx}{P} = S(uz' - zu').$$

2. En particulier, si u désigne une solution de l'équation

$$(1) \quad Py'' + Qy' + Ry = 0,$$

on a l'identité suivante :

$$(B) \quad \int \frac{SZu dx}{P} = S(uz' - zu').$$

Soit v une solution quelconque de l'équation (1); α désignant un paramètre arbitraire contenu dans les fonctions P, Q, R (ce paramètre peut du reste être la variable indépendante x elle-même), si l'on pose

$$\frac{dv}{d\alpha} = z,$$

3.

on voit que z satisfait à la relation

$$Pz'' + Qz' + Rz = - \left(\frac{dP}{d\alpha} v'' + \frac{dQ}{d\alpha} v' + \frac{dR}{d\alpha} v \right).$$

Si, dans l'équation (B), on remplace z par $\frac{d\phi}{d\alpha}$ et Z par sa valeur, il vient

$$(C) \quad \int \frac{S}{P} \left(\frac{dP}{d\alpha} v'' + \frac{dQ}{d\alpha} v' + \frac{dR}{d\alpha} v \right) u dx = S \left(\frac{dv}{d\alpha} \frac{du}{dx} - u \frac{d^2 v}{d\alpha dx} \right).$$

3. En désignant toujours par u et v deux solutions quelconques de l'équation (1), posons

$$z = uv;$$

il est aisé de voir que z satisfait à l'équation

$$Pz'' + Qz' + Rz = 2Pu'v' - Ru''v;$$

l'équation (B) donne dans ce cas la relation suivante :

$$(D) \quad \int \frac{S(2Pu'v' - Ru''v) u dx}{P} = Su^2 v'.$$

4. Il serait facile de multiplier le nombre de ces formules; je me contente ici de transcrire celles dont l'application est la plus fréquente, me réservant d'y renvoyer lorsque j'en aurai à faire usage dans les Communications que j'aurai occasion de présenter à la Société.

Sur la fonction $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^w$; par M. LAGUERRE.

(Séance du 5 décembre 1879.)

I.

1. Soit, en désignant par ω une constante arbitraire,

$$z = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^w;$$



je me propose d'abord de développer z en fractions continues, et, à cet effet, je poserai

$$z = \frac{\varphi_n}{f_n} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}} \right) \quad (1),$$

φ_n et f_n désignant deux polynômes entiers en x du degré n , que j'écrirai aussi $\varphi_n(x)$, $f_n(x)$ et $\varphi_n(x, \omega)$, $f_n(x, \omega)$ lorsque je voudrai mettre en évidence la variable x et la constante ω .

Comme z tend vers l'unité quand x croît indéfiniment, on voit que les coefficients de x^n sont égaux dans les deux polynômes; z se changeant d'ailleurs en $\frac{1}{z}$ quand on change le signe de x , on en conclut la relation

$$\varphi_n(x) = (-1)^n f_n(-x);$$

on a aussi évidemment

$$\varphi_n(x, \omega) = f_n(x, -\omega).$$

2. Je rappellerai d'abord les résultats obtenus dans la Note que j'ai présentée récemment à la Société *Sur la réduction en fractions continues d'une fonction qui satisfait à une équation linéaire du premier ordre à coefficients rationnels*.

Soit proposé de réduire en fractions continues une fonction z satisfaisant à l'équation différentielle

$$Wz' = Vz + U,$$

où U , V et W désignent des polynômes entiers en x , et soit $\frac{\varphi_n}{f_n}$ la réduite de rang n .

Représentons par Θ_n un polynôme entier du degré de

$$V\left(\frac{1}{x}\right) + W\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

et par A_n une constante dont la valeur ne dépend que du nombre

(1) Ici, comme dans tout ce qui suit, je désigne généralement par $\left(\frac{1}{x^p}\right)$ une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x et commençant par un terme de l'ordre de $\frac{1}{x^p}$.

entier n et est actuellement indéterminée; on a

$$f_n^2 U + f_n \varphi_n V - (\varphi_n' f_n - f_n' \varphi_n) W = A_n \Theta_n,$$

et l'on voit que f_n satisfait à une équation linéaire du second ordre de la forme

$$W y'' + W_0 y' + W_1 y = 0,$$

où

$$W_0 = V + W' - W \frac{\Theta_n'}{\Theta_n} \quad \text{et} \quad W_1 = \frac{K_n}{\Theta_n},$$

K_n désignant un polynôme entier en x .

Une seconde solution de cette équation est donnée par la formule

$$y_1 = e^{-\int \frac{V}{W} dx} (\varphi_n - f_n z).$$

En posant de plus, pour abréger,

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = P_n,$$

on a les relations suivantes :

$$(A) \quad \begin{cases} W f_n' = \Omega_n f_n - \Theta_n f_{n+1}, \\ f_{n+1} - \frac{\Omega_n + \Omega_{n+1} + V}{\Theta_{n+1}} f_n + P_{n-1} f_{n-1} = 0. \end{cases}$$

La première de ces relations détermine le degré et la forme de Ω_n ; on déterminera complètement ce polynôme en exprimant que, pour une valeur convenable de P_n , l'expression

$$u = e^{\int \frac{\Omega_n}{W} dx}$$

satisfait à l'équation différentielle

$$W u'' + W_0 u' + \left(W_1 - \frac{P_n \Theta_n \Theta_{n+1}}{W} \right) u = 0.$$

3. La fonction $z = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{\omega}$ satisfait à l'équation différentielle

$$(x^2 - 1) z' + 2 \omega z = 0;$$

dans le cas actuel, nous avons donc

$$W = x^2 - 1, \quad V = -2\omega \quad \text{et} \quad U = 0,$$

d'où il résulte d'abord que Θ_n est une constante que nous ferons égale à -1 .

L'équation différentielle qui a pour solutions f_n et $\varphi_n \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^n$ est

$$(1) \quad (x^2 - 1)y'' + 2(x - \omega)y' - n(n+1)y = 0.$$

Nous déterminerons P_n et Ω_n par la condition que $u = e^{\int \frac{\Omega_n}{x^2-1} dx}$ satisfasse à l'équation

$$(x^2 - 1)u'' + 2(x - \omega)u' - \left[n(n+1) + \frac{P_n}{x^2-1} \right] u = 0.$$

Ω_n étant du premier degré en x , u est de la forme $(x-1)^\alpha(x+1)^\beta$; en substituant cette expression dans l'équation précédente, on trouve les équations de condition qui suivent :

$$(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1) = n(n+1), \quad \alpha - \beta = \omega$$

et

$$P_n = n(n+1) - (\alpha + \beta) - \omega^2.$$

On peut y satisfaire de deux façons différentes.

En premier lieu, on peut poser

$$\alpha + \beta = n, \quad \text{d'où} \quad P_n = n^2 - \omega^2$$

et

$$\alpha = \frac{n + \omega}{2}, \quad \beta = -\frac{n - \omega}{2}.$$

On en déduit

$$\Omega_n = \frac{x^2 - 1}{2} \left(\frac{n + \omega}{x - 1} + \frac{n - \omega}{x + 1} \right) = nx + \omega;$$

mais il est facile de voir que cette solution ne convient pas à la question. En effet, en posant $f_0 = 1$ et faisant $n = 0$, on aurait, en vertu de la première des formules (A),

$$f_1 = -\omega,$$

ce qui est impossible, puisque f_1 est nécessairement du premier degré en x .

Posons donc

$$\alpha + \beta = - (n + 1), \quad \text{d'où} \quad P_n = (n + 1)^2 - \omega^2$$

et

$$\alpha = \frac{\omega - n - 1}{2}, \quad \beta = - \frac{\omega + n + 1}{2}.$$

On en déduit

$$\Omega_n = \omega - (n + 1)x,$$

et les formules (A) deviennent

$$(2) \quad (x^2 - 1)f'_n = [\omega - (n + 1)x]f_n + f_{n+1},$$

$$(3) \quad f_{n+1} - (2n + 1)xf_n + (n^2 - \omega^2)f_{n-1} = 0.$$

En changeant ω en $-\omega$, on obtient encore les formules suivantes :

$$(2)' \quad (x^2 - 1)\varphi'_n = -[\omega + (n + 1)x]\varphi_n + \varphi_{n+1},$$

$$(3)' \quad \varphi_{n+1} - (2n + 1)x\varphi_n + (n^2 - \omega^2)\varphi_{n-1} = 0.$$

On a d'ailleurs

$$(4) \quad (x^2 - 1)(\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n) + 2\omega \varphi_n f_n = \Lambda_n.$$

Au moyen de ces formules, on trouve ces valeurs des premiers polynômes :

$$f_0 = 1, \quad f_1 = x - \omega, \quad f_2 = 3x^2 - 3\omega x + \omega^2 - 1,$$

$$f_3 = 15x^3 - 15\omega x^2 + (6\omega^2 - 9)x - \omega(\omega^2 - 4).$$

Du reste, l'équation (1) s'intégrant au moyen des séries hypergéométriques, on obtient aisément l'expression suivante :

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} f_n &= (-1)^n (\omega + 1)(\omega + 2) \dots (\omega + n) \\ &\times \left[1 - \frac{n}{1} \frac{n+1}{\omega+1} \left(\frac{1+x}{2} \right) + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \frac{(n+1)(n+2)}{(\omega+1)(\omega+2)} \left(\frac{1+x}{2} \right)^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. + (-1)^n \frac{(n+1)(n+2) \dots 2n}{(\omega+1)(\omega+2) \dots (\omega+n)} \left(\frac{1+x}{2} \right)^n \right] \end{aligned} \right.$$

Des formules (4) et (5) on déduit, en y faisant $x = 1$ et en remarquant que $\varphi_n(\omega) = f_n(-\omega)$,

$$(6) \quad \Lambda_n = 2\omega(1 - \omega^2)(1 - 4\omega^2) \dots (1 - n^2\omega^2),$$

ce qui concorde bien avec la valeur trouvée pour P_n .

4. Si l'on désigne, en général, par S_p la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des racines de l'équation $f_n = 0$, on a

$$S_1 = S_3 = S_5 = \dots = S_{2n-1} = \omega \quad (1);$$

cette propriété est caractéristique du polynôme f_n .

Je ferai encore les remarques suivantes. Posons, en ordonnant f_n par rapport aux puissances croissantes de ω ,

$$f_n = P_0 + \omega P_1 + \omega^2 P_2 + \dots + \omega^n P_n.$$

De l'équation

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n = \frac{P_0 - \omega P_1 + \omega^2 P_2 - \dots}{P_0 + \omega P_1 + \omega^2 P_2 + \dots} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right)$$

on déduit, en développant les deux membres suivant les puissances croissantes de ω et égalant les coefficients de la première puissance,

$$\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{2P_1}{P_0} + \frac{1}{x^{2n+1}},$$

d'où il résulte que $\frac{P_1}{P_0}$ est la $n^{\text{ième}}$ réduite de la fonction

$$\frac{1}{2} \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

En désignant, en effet, suivant l'usage ordinaire, par X_n le polynôme de Legendre et par $\Pi(n)$ le produit $1.2.\dots n$, on a

$$P_0 = \Pi(n) X_n.$$

Désignons, dans f_n , par $H(x, \omega)$ l'ensemble des termes homogènes et du degré n par rapport aux deux quantités x et ω ; on verra aussi facilement que $H(1, \omega)$ est le dénominateur de la $n^{\text{ième}}$ réduite de $e^{\frac{x}{2}}$.

II.

5. La réduction en fractions continues de la fonction $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n$

(1) Voir, à ce sujet, ma Note Sur un problème d'Algèbre (Bulletin, t. V, p. 30).

est liée intimement avec le développement de la fonction $(x+z)^u$ suivant les puissances croissantes de (z^2-1) .

Soit, en effet,

$$(7) \quad (x+z)^u = \sum (V_n + zU_n) \frac{(z^2-1)^n}{2^{n+1} \Pi(n)}.$$

Pour obtenir ce développement d'après la méthode donnée par Jacobi ⁽¹⁾, nous poserons

$$(z+x)^u = b_0 x^u + b_1 x^{u-1} z + \dots + b_i x^{u-i} z^i + \dots$$

et

$$\frac{1}{(z^2-1)^{n+1}} = \frac{A_1}{z^{2n+2}} + \frac{A_2}{z^{2n+4}} + \dots$$

Si, dans le produit de ces deux séries, nous prenons l'ensemble des termes $\frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2}$ qui sont du premier et du second degré en $\frac{1}{z}$, nous voyons aisément que B_1 est de l'ordre de x^{u-2n-1} et B_2 de l'ordre de x^{u-2n} . Or $V_n + zU_n$ est la partie entière de

$$(z^2-1) \left(\frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2} \right);$$

on a donc

$$U_n = B_1,$$

et, par suite, U_n est de l'ordre de x^{u-2n-1} .

6. Ce point essentiel étant établi, en dérivant successivement par rapport à x et par rapport à z l'identité (6), j'obtiens les relations

$$\begin{aligned} u(x+z)^{u-1} &= \sum (V'_n + zU'_n) \frac{(z^2-1)^n}{2^{n+1} \Pi(n)} \\ &= \sum U_n \frac{(z^2-1)^n}{2^{n+1} \Pi(n)} + \sum (V_n z + U_n z^2) \frac{(z^2-1)^{n-1}}{2^n \Pi(n-1)} \\ &= \sum (2n+1) U_n \frac{(z^2-1)^n}{2^{n+1} \Pi(n)} + \sum (U_n + V_n z) \frac{(z^2-1)^{n-1}}{2^n \Pi(n-1)}, \end{aligned}$$

⁽¹⁾ *Entwicklung nach den Potenzen eines ganzen Polynoms (Journal de Borchardt, t. 53, p. 103).*

d'où les identités

$$V'_n = (2n + 1)U_n + U_{n+1} \quad \text{et} \quad U'_n = V_{n+1}.$$

On a de même

$$\begin{aligned} \omega(x+z)^n &= \omega \sum (V_n + zU_n) \frac{(z^2-1)^n}{2^{n+1} \Pi(n)} = \sum (V'_n + zU'_n)(z+x) \frac{(z^2-1)^n}{2^{n+1} \Pi(n)} \\ &= \sum 2(n+1)U'_n \frac{(z^2-1)^{n+1}}{2^{n+2} \Pi(n+1)} \\ &\quad + \sum [U'_n + xV'_n + (V'_n + xU'_n)] \frac{(z^2-1)^n}{2^{n+1} \Pi(n)}, \end{aligned}$$

d'où

$$\omega V_n = 2nU'_{n-1} + U'_n + xV'_n$$

et

$$\omega U_n = V'_n + xU'_n.$$

On en déduit aisément les relations suivantes :

$$(B) \left\{ \begin{array}{l} V_n = U'_{n-1}, \\ (x^2-1)U'_n + 2x(n+1-\omega)U'_n - \omega(2n+1-\omega)U_n = 0, \\ U_{n+1} + (2n+1-\omega)U_n + xU'_n = 0, \\ (x^2-1)U_{n+1} + [(2n+1)x^2 + 2\omega - 4n-1]U_n \\ \quad - (2n-\omega)(2n-\omega-1)U_{n-1} = 0, \\ U_{n+1} + (2n+1)U_n - U'_{n-1} = 0. \end{array} \right.$$

7. Un calcul direct donne

$$U_0 = (x+1)^n - (x-1)^n,$$

$$U_1 = (x+1)^{n-1}(\omega-1-x) - (x-1)^{n-1}(1-\omega-x),$$

et la dernière des formules précédentes permet de calculer facilement de proche en proche les diverses valeurs de U_n .

On voit que U_n est de la forme

$$F_n(x+1)^{n-n} - \Phi_n(x-1)^{n-n},$$

où F_n et Φ_n désignent des polynômes entiers en x du degré n , et, d'après la remarque que j'ai faite ci-dessus, on a

$$F_n(x+1)^{n-n} - \Phi_n(x-1)^{n-n} = \left(\frac{x^n}{x^{2n+1}} \right),$$

d'où

$$F_n \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{n-n} - \Phi_n = \left(\frac{1}{x^{n+1}} \right),$$

ce qui montre que $\frac{\Phi_n}{F_n}$ est la $n^{\text{ième}}$ réduite de $\left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{n-n}$. Par suite, F_n et Φ_n ne diffèrent que par un nombre constant de $f_n(\omega - n)$ et de $\varphi_n(\omega - n)$; si d'ailleurs on désigne, pour un instant, par M_n le coefficient de x^n dans F_n , on déduit des formules précédentes

$$M_{n+1} = - (2n + 1) M_n$$

et

$$M_n = (-1)^n . 1.3.5 - (2n - 1),$$

d'où l'on voit que

$$F_n = (-1)^n f_n(\omega - n), \quad \Phi_n = (-1)^n \varphi_n(\omega - n)$$

et

$$U_n = (-1)^n [(x+1)^{n-n} f_n(\omega - n) - (x-1)^{n-n} \varphi_n(\omega - n)].$$

Transformons les relations (B) en posant

$$U_n = (-1)^n (x+1)^{n-n} f_n(\omega - n),$$

puis changeons ensuite ω en $\omega + n$.

On trouvera tout d'abord, comme nous y sommes arrivé par une voie différente, que f_n satisfait à l'équation du second ordre (1), puis les relations suivantes :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\omega - 1) &= [(n+1)x + n + 1 - \omega] f_n(\omega) + x(x+1) f'_n(\omega), \\ (x-1) f_{n+1}(\omega - 1) &+ [(2n+1)x^2 + 2\omega - 2n - 1] f_n(\omega) \\ &+ (2n - \omega)(2n - \omega - 1)(x+1) f_{n-1}(\omega + 1), \end{aligned}$$

d'où, en éliminant $f'_n(\omega)$ au moyen de la formule (2),

$$(8) \quad (x-1) f_{n+1}(\omega - 1) = (\omega - n - 1) f_n(\omega) + x f_{n+1}(\omega).$$

8. De la formule (7) on déduit

$$(x+z)^n - (x-z)^n = \sum \frac{2z U_n(z^2 - 1)^n}{2^{n+1} 11(n)},$$

d'où, en intégrant entre les limites 1 et z ,

$$(x+z)^{\omega+1} + (x-z)^{\omega+1} = (x+1)^{\omega+1} + (x-1)^{\omega+1} + (\omega+1) \sum \frac{U_n(z^2-1)^{n+1}}{2^{n+1} \Pi(n+1)}.$$

Posons $z = 1 + \sqrt{t}$; il viendra

$$\begin{aligned} (x+\sqrt{1+t})^{\omega+1} + (x-\sqrt{1+t})^{\omega+1} \\ = (x+1)^{\omega+1} + (x-1)^{\omega+1} \\ + (\omega+1) \sum \frac{(-1)^n}{2^{n+1} \Pi(n+1)} [(x+1)^{\omega-n} f_n(\omega-n) - (x-1)^{\omega-n} \varphi_n(\omega-n)] t^{n+1}. \end{aligned}$$

Cette équation se décompose évidemment en deux autres, dont l'une est

$$(9) \quad \begin{cases} (x+\sqrt{1+t})^{\omega+1} = (x+1)^{\omega+1} \\ + (\omega+1) \sum \frac{(-1)^n}{2^{n+1} \Pi(n+1)} (x+1)^{\omega-n} f_n(\omega-n) t^{n+1}. \end{cases}$$

Changeons, dans cette formule, t en $\frac{t}{x}$ et x en $\frac{1}{\sqrt{x}}$; il viendra

$$\begin{aligned} (1+\sqrt{x+t})^{\omega+1} = (1+\sqrt{x})^{\omega+1} \\ + (\omega+1) \sum \frac{(-1)^n}{2^{n+1} \Pi(n+1)} \frac{(1+\sqrt{x})^{\omega-n}}{x^{\frac{n+1}{2}}} f_n\left(\frac{1}{\sqrt{x}}, \omega-n\right) t^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où, en vertu de la formule de Taylor,

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (1+\sqrt{x})^{\omega+1} = \frac{(-1)^n (\omega+1)}{2^{n+1} \Pi(n+1)} \frac{(1+\sqrt{x})^{\omega-n}}{x^{\frac{n+1}{2}}} f_n\left(\frac{1}{\sqrt{x}}, \omega-n\right),$$

et, en changeant ω en $\omega+n$,

$$(10) \quad f_n\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{(-1)^n 2^{n+1} x^{\frac{n+1}{2}}}{(\omega+n+1)(1+\sqrt{x})^{\omega}} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (1+\sqrt{x})^{\omega+n+1};$$

en particulier, pour les polynômes de Legendre, on a la formule

$$X_n\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{(-1)^n 2^{n+1} x^{\frac{n+1}{2}}}{\Pi(n+1)} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (1+\sqrt{x})^{n+1}.$$

III.

9. En désignant, pour un instant, par Y_n la série hypergéométrique

$$1 - \frac{n}{1} \frac{n+1}{\omega+1} \left(\frac{x+1}{2} \right) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{(n+1)(n+2)}{(\omega+1)(\omega+2)} - \dots,$$

on a

$$f_n = (-1)^n \frac{\Pi(n+\omega)}{\Pi(\omega)} Y_n;$$

en se servant de l'expression remarquable donnée par Jacobi pour les polynômes qui proviennent de la série hypergéométrique (1), on en déduit

$$(11) \quad f_n = \frac{1}{2^n} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{\omega} \frac{d^n}{dx^n} (x+1)^{\omega+n} (x-1)^{n-\omega}.$$

10. La fonction

$$f_n - \varphi_n \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{\omega}$$

satisfaisant à l'équation différentielle

$$(x^2-1)y'' + 2(x-\omega)y' - n(n+1)y = 0,$$

on en déduit aisément que la fonction

$$(x+1)^{\omega} f_n - (x-1)^{\omega} \varphi_n$$

satisfait à l'équation

$$(x^2-1)u'' - 2(\omega-1)xu' + [\omega(\omega-1) - n(n+1)]u = 0.$$

En la différentiant p fois de suite, on obtient la relation suivante :

$$(x^2-1)u^{(p+2)} - 2(\omega-p-1)xu^{(p+1)} + [(\omega-p-1)(\omega-p) - n(n+1)]u = 0.$$

Comme elle ne diffère de l'équation précédente que par le changement de ω en $(\omega-p)$, on en conclut que la $p^{\text{ième}}$ dérivée de

(1) JACOBI, *Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe* (*Journal de Borchardt*, t. 56, p. 149).

$(x+1)^{\omega} f_n$ ne diffère que par un facteur constant de la fonction $(x+1)^{\omega-p} f_n(\omega-p)$. Ce facteur se détermine facilement, et l'on obtient l'identité suivante :

$$(12) \quad \frac{d^p}{dx^p} (x+1)^{\omega} f_n(x, \omega) = \frac{\Pi(\omega+n)}{\Pi(\omega+n-p)} (x+1)^{\omega-p} f_n(x, \omega-p).$$

En particulier, si l'on fait $\omega = p$, il vient

$$(13) \quad \frac{d^p}{dx^p} (x+1)^p f_n(x, p) = \Pi(n+p) X_n.$$

Si, dans cette formule, on fait $p = n$, comme

$$f_n(x, n) = \frac{\Pi(2n)}{2^n \Pi(n)} (x-1)^n,$$

on retrouve la formule connue, due à O. Rodrigues,

$$X_n = \frac{1}{2^n \Pi(n)} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n.$$

11. La formule (13) montre que, p étant un nombre entier positif, $(x+1)^p f_n(x, p)$ peut s'obtenir en intégrant plusieurs fois de suite le polynôme X_n .

Considérons, d'une façon plus générale, l'expression

$$I = \int_{-1}^x (x-z)^{\omega-1} X_n(z) dz,$$

où ω désigne un nombre quelconque positif.

En intégrant par parties, on a

$$I = \frac{(x+1)^{\omega}}{\omega} \left[X_n(-1) + \frac{X'_n(-1)}{\omega+1} (x+1) + \frac{X''_n(-1)}{(\omega+1)(\omega+2)} (x+1)^2 + \dots \right],$$

et, en partant de l'expression

$$X_n = (-1)^n \left[1 - \frac{n}{1} \frac{(n+1)}{1} \left(\frac{x+1}{2} \right) + \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{(n+1)(n+2)}{1.2} \left(\frac{x+1}{2} \right)^2 - \dots \right],$$

on trouve aisément

$$\begin{aligned} X_n(-1) &= (-1)^n, \quad X'_n(-1) = -\frac{n}{1}(n+1)\frac{(-1)^n}{2}, \\ X''(-1) &= \frac{n(n-1)}{1.2}(n+1)(n+2)\frac{(-1)^n}{2^2}, \quad \dots; \end{aligned}$$

on en déduit

$$I = \frac{(-1)^n(x+1)^\omega}{\omega} \left[1 - \frac{n}{1} \frac{n+1}{\omega+1} \left(\frac{x+1}{2} \right) + \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{(n+1)(n+2)}{(\omega+1)(\omega+2)} \left(\frac{x+1}{2} \right)^2 - \dots \right],$$

où la quantité entre crochets est, à un facteur numérique près, le polynôme f_n , d'où l'identité suivante :

$$(14) \quad f_n(x, \omega) = \frac{\Pi(\omega+n)}{\Pi(\omega-1)} (x+1)^{-\omega} \int_{-1}^x (x-z)^{\omega-1} X_n(z) dz.$$

Cette formule suppose essentiellement que ω est positif; comme l'on a

$$f_n(x, -\omega) = (-1)^n f_n(-x, \omega),$$

on a également, ω étant toujours supposé positif,

$$(14)' \quad f_n(x, -\omega) = \frac{\Pi(\omega+n)}{\Pi(\omega-1)} (x-1)^{-\omega} \int_1^x (x-z)^{\omega-1} X_n(z) dz.$$

On en déduit, en remarquant que $f_n(x, -\omega) = \varphi_n(x, \omega)$,

$$\frac{\Pi(\omega-1)}{\Pi(\omega+n)} [f_n(x+1)^\omega - \varphi_n(x-1)^\omega] = \int_{-1}^{+1} (x-z)^{\omega-1} X_n(z) dz.$$

Si donc on pose

$$(x-z)^{\omega-1} = \sum A_n X_n(z),$$

on a, en vertu d'une formule connue,

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} (x-z)^{\omega-1} X_n(z) dz,$$

d'où

$$A_n = \frac{2n+1}{2\omega(\omega+1)\dots(\omega+n)} [f_n(x+1)^\omega - \varphi_n(x-1)^\omega] \quad (1).$$

(1) Sur ce développement, voir le Mémoire de M. Bauer *Von den Coefficienten der Reihen von Kugelfunctionen einer Variablen* (Journal de Borchardt, t. 56, p. 101).

12. Si, dans la formule (12), on fait $\omega = 0$, et si l'on remarque que

$$f_n(x, 0) = \Pi(n) X_n,$$

il vient

$$f_n(x, -p) = \Pi(n-p)(x+1)^p \frac{d^p}{dx^p} X_n;$$

dans cette identité, p désigne zéro ou un nombre entier positif inférieur à $(n+1)$. Nous pouvons en déduire aisément une expression nouvelle de la fonction $\frac{f_n}{\omega(\omega+1)\dots(\omega+n)}$; posons, en effet

$$\frac{f_n(x, \omega)}{\omega(\omega+1)\dots(\omega+n)} = \frac{A_0}{\omega} + \frac{A_1}{\omega+1} + \dots + \frac{A_i}{\omega+i} + \dots + \frac{A_n}{\omega+n}.$$

D'une formule élémentaire bien connue il résulte que l'on a

$$A_i = (-1)^i \frac{1}{\Pi(i) \Pi(n-i)} f_n(x, -i),$$

ou, en vertu de l'identité précédente,

$$A_i = \frac{(-1)^i}{\Pi(i)} (x+1)^i \frac{d^i}{dx^i} X_n,$$

et de là

$$(15) \left\{ \begin{aligned} & \frac{f_n(x, \omega)}{\omega(\omega+1)\dots(\omega+n)} \\ &= \frac{X_n}{\omega} - \frac{(x+1)}{1} \frac{X'_n}{\omega+1} + \frac{(x+1)^2}{1.2} \frac{X''_n}{\omega+2} - \frac{(x+1)^3}{1.2.3} \frac{X'''_n}{\omega+3} + \dots \end{aligned} \right.$$

Si, dans cette formule, on change x en $-x$ et ω en $-\omega$, et si l'on remarque que $f(-x, -\omega) = (-1)^n f(x, \omega)$, on obtiendra encore la formule suivante :

$$(15') \left\{ \begin{aligned} & \frac{f_n(x, \omega)}{\omega(\omega-1)\dots(\omega-n)} \\ &= (-1)^n \left[\frac{X_n}{\omega} - \frac{x-1}{1} \frac{X'_n}{\omega-1} + \frac{(x-1)^2}{1.2} \frac{X''_n}{\omega-2} - \frac{(x-1)^3}{1.2.3} \frac{X'''_n}{\omega-3} + \dots \right]. \end{aligned} \right.$$

13. On sait que les racines de l'équation $X_n = 0$ sont toutes réelles et comprises entre -1 et $+1$; désignons respectivement,

viii. 4

pour un instant, par α et β la plus petite et la plus grande de ces racines. Si x désigne une quantité quelconque comprise entre $-\alpha$ et α , on voit que $(x + 1)$ est positif, et il suit du théorème de Fourier que la suite des quantités

$$X_n, X'_n, X''_n, \dots$$

ne présente aucune permanence de signe; l'équation (15) montre que dans ce cas l'équation $f(x, \omega) = 0$ peut se mettre sous la forme

$$\frac{A}{\omega} + \frac{B}{\omega + 1} + \frac{C}{\omega + 2} + \dots + \frac{L}{\omega + n} = 0,$$

A, B, C, ..., L désignant des coefficients ayant tous le même signe.

Par un raisonnement bien connu, on en conclut que toutes les racines de l'équation $f(x, \omega) = 0$ (où ω est regardé comme inconnue) sont réelles et séparées par les nombres

$$0, +1, +2, \dots, +(n-1) \text{ et } +n.$$

On déduirait de même de la formule (15)' que, si la valeur de x est comprise entre β et $+1$, l'équation $f_n(x, \omega) = 0$ a n racines réelles séparées par les nombres

$$0, -1, -2, \dots, -(n-1) \text{ et } -n.$$

IV.

14. La fonction f_n satisfaisant à l'équation

$$(1) \quad (x^2 - 1)y'' + 2(x - \omega)y' - n(n+1)y = 0,$$

on voit que $\frac{df_n}{d\omega}$ satisfait à l'équation

$$(x^2 - 1)u'' + 2(x - \omega)u' - n(n+1)u = 2 \frac{df_n}{dx}.$$

En désignant par y une solution quelconque de l'équation (1), on

déduit de là

$$(x^2 - 1)(yu'' - u)y' + 2(x - \omega)(yu' - uy') = 2 \frac{df_n}{dx} y,$$

et, en multipliant les deux membres par $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega$,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega (x^2 - 1)(yu' - uy') = 2 \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega \frac{df_n}{dx} y;$$

puis, en intégrant et en remplaçant u par $\frac{df_n}{d\omega}$,

$$2 \int \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega \frac{df_n}{dx} y dx = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega (x^2 - 1) \left(y \frac{d^2 f_n}{dx d\omega} - \frac{df_n}{d\omega} \frac{dy}{dx} \right).$$

Dans cette relation, faisons d'abord

$$y = f_n;$$

il viendra

$$2 \int \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega f_n \frac{df_n}{dx} dx = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega (x^2 - 1) \left(f_n \frac{d^2 f_n}{dx d\omega} - \frac{df_n}{d\omega} \frac{df_n}{dx} \right).$$

Faisons, en second lieu,

$$y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^\omega \varphi_n;$$

nous aurons

$$2 \int \varphi_n \frac{df_n}{dx} dx = (x^2 - 1) \left(\varphi_n \frac{d^2 f_n}{dx d\omega} - \frac{df_n}{d\omega} \frac{d\varphi_n}{dx} \right) - 2\omega \varphi_n \frac{df_n}{d\omega}.$$

Remplaçons, dans le second membre de cette égalité, $\frac{d^2 f_n}{dx d\omega}$ par sa valeur tirée de l'équation (2) et $\frac{d\varphi_n}{dx}$ par sa valeur tirée de l'équation (2)'; il viendra, toutes réductions faites,

$$(16) \quad 2 \int \varphi_n \frac{df_n}{dx} dx = \varphi_n f_n + \varphi_n \frac{df_{n+1}}{d\omega} - \varphi_{n+1} \frac{df_n}{d\omega},$$

d'où encore, en changeant ω en $-\omega$,

$$(16)' \quad 2 \int f_n \frac{d\varphi_n}{dx} dx = \varphi_n f_n - f_n \frac{d\varphi_{n+1}}{d\omega} + f_{n+1} \frac{d\varphi_n}{d\omega}.$$

On déduit de là l'identité suivante, où K désigne une quantité indépendante de x :

$$\varphi_n \frac{df_{n+1}}{d\omega} - \varphi_{n+1} \frac{df_n}{d\omega} + f_{n+1} \frac{d\varphi_n}{d\omega} - f_n \frac{d\varphi_{n+1}}{d\omega} = K.$$

*Sur l'application d'un principe de la théorie des fonctions
à des recherches purement géométriques; par M. ELLING
HOLST.*

(Séance du 19 décembre 1879.)

1. Plusieurs géomètres, particulièrement Poncelet, mais aussi Plücker, Chasles et les autres fondateurs de la Géométrie numérique, ont fait avancer la Géométrie en empruntant à l'Analyse de nouveaux *axiomes*, pour ainsi dire. Il peut être discutable si la science ainsi constituée peut encore être nommée *Géométrie pure*; mais personne ne peut nier que l'introduction de ces procédés ne forme un vrai progrès. Tandis que les principes mentionnés, empruntés à l'Analyse, se rattachent à la loi de la continuité, il est possible de faire également un usage semblable d'un autre principe de l'Algèbre, dont nous allons donner un aperçu en l'appliquant ensuite à divers exemples.

2. Le principe bien connu dont il s'agit est le suivant :

1° Quand une fonction algébrique F s'annule en même temps qu'une autre fonction algébrique f_1 , on a, pour une valeur déterminée α_1 ,

$$F = f_1^{\alpha_1} \varphi_1,$$

φ_1 étant une troisième fonction algébrique.

2° Quand la fonction F devient infinie, chaque fois qu'une autre fonction f_2 s'annule, on a, pour une valeur déterminée α_2 ,

$$F = f_2^{-\alpha_2} \varphi_2,$$

φ_2 étant une fonction algébrique.

Ces deux théorèmes sont énoncés par M. Liouville.

3. Pour rendre ce principe plus fécond pour des recherches géométriques, il convient de le présenter d'une manière plus complète en partant de la proposition suivante (1) :

Pour vérifier que le produit de certaines fonctions algébriques

$$(1) \quad P = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_n^{\alpha_n}$$

reste toujours constant, il suffit de démontrer qu'il ne peut jamais devenir nul (ou, ce qui revient au même, qu'il ne peut jamais devenir infini).

Comme, par hypothèse, le produit P ne peut pas être nul, il faut que, toutes les fois qu'un de ses facteurs s'annule, un au moins des autres facteurs devienne infini. Maintenant, si l'on fait approcher de zéro une quelconque des fonctions f_i , par exemple si l'on suppose

$$f_1 = \epsilon \quad (2),$$

ce qui, en général, peut arriver de plusieurs manières différentes, quelques-unes des fonctions restent, en général, finies, tandis que les autres deviennent infiniment petites ou infiniment grandes de différents ordres, c'est-à-dire

$$f_i = \epsilon^{m_i}, \quad m_i \geq 0, \quad m_1 = 1;$$

mais, comme P reste fini, on doit avoir

$$(2) \quad \sum m_i \alpha_i = 0.$$

En supposant successivement que les diverses fonctions f_i s'annulent, on arrive par ce même procédé à un certain nombre de relations linéaires entre les nombres α_i .

(1) En fondant mes applications sur cette proposition, qui, selon mon exposition primitive, formait un cas spécial, j'adopte une idée qui m'a été suggérée par M. Stéphanos.

(2) Désignons un infiniment petit du premier ordre par ϵ , une quantité finie quelconque par ϵ^0 . En conséquence, un infiniment petit quelconque du $n^{\text{ième}}$ ordre peut être désigné par ϵ^n , et un infiniment grand du même ordre par ϵ^{-n} .

Inversement, si les nombres α_i satisfont à ces relations, on sera sûr que le produit P est égal à une quantité constante.

4. Lorsqu'on cherche la valeur d'une certaine fonction géométrique, il suffit de déterminer une série d'autres fonctions qui forment avec la fonction cherchée un système tel que le produit de ces fonctions élevées à des puissances convenables soit constant.

Cette remarque suffit pour faire comprendre comment ces autres fonctions doivent être choisies. Ce choix même peut être fait de plusieurs manières. Quelques exemples que nous allons exposer serviront à faire comprendre comment, par des considérations purement géométriques, on arrive à déterminer par ce procédé la fonction cherchée.

5. EXEMPLE I. — Un exemple nous sera fourni par la recherche de la relation qui existe entre l'aire d'un triangle donné τ et l'aire du triangle T qui en est la polaire réciproque par rapport à une conique donnée. Pour cela, nous cherchons d'abord quand l'aire T s'annule. Cela n'arrive que lorsque ses sommets sont sur une même droite, c'est-à-dire lorsque les côtés de τ passent par un même point. Si l'on a donc $T = 0$, on aura $\tau = 0$, et réciproquement. Maintenant, quand T devient-il infini? *Seulement* lorsque au moins un de ses sommets est sur la droite à l'infini, c'est-à-dire lorsqu'un des côtés de τ passe par le centre O de la conique, en excluant le cas d'une parabole. On peut donc admettre pour fonctions f_i les aires des trois triangles τ_1, τ_2, τ_3 formés par le centre O et deux des sommets de τ . On s'assure facilement que les fonctions trouvées forment un système complet du genre (1), c'est-à-dire qu'on peut trouver des valeurs convenables des α_i pour lesquelles on a

$$T^{\alpha_1} \tau_1^{\alpha_2} \tau_2^{\alpha_3} \tau_3^{\alpha_4} = k, \text{ une const.,}$$

ou, en remarquant que $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$,

$$T^{\alpha_1} (\tau_1 \tau_2 \tau_3)^{\alpha_2} = k.$$

T peut s'annuler de trois manières différentes, suivant que deux des angles du triangle, ou un seul, ou aucun, sont nuls. Il en est de même des aires $\tau, \tau_1, \tau_2, \tau_3$. Les équations (2) forment ainsi

le système

$$\begin{aligned} 1 + 2\alpha_1 + 3\alpha_2 &= 0, \\ 1 + \alpha_1 + \alpha_2 &= 0, \\ 2 + \alpha_1 &= 0, \\ -1 + \alpha_2 &= 0, \\ -2 + \alpha_1 + 4\alpha_2 &= 0, \\ -2 + 2\alpha_1 + 6\alpha_2 &= 0, \end{aligned}$$

qui est satisfait pour

$$\alpha_1 = -2, \quad \alpha_2 = 1.$$

Pour déterminer la constante k , il suffit de choisir un triangle τ formé par deux tangentes parallèles aux deux axes $2a$ et $2b$ d'une ellipse et la corde de contact. Dans ce cas, on trouve

$$T = \tau = \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \frac{ab}{2},$$

et, en conséquence,

$$k = \frac{a^2 b^2}{4}.$$

La relation cherchée est donc

$$T = \frac{a^2 b^2}{4} \frac{\tau^2}{\tau_1 \tau_2 \tau_3}.$$

Cette formule donne naissance à une série d'autres considérations. On en conclut que toutes les coniques qui transforment un triangle donné τ en un autre T , ayant une aire donnée, ont une aire ⁽¹⁾ constante si l'on fixe leur centre ⁽²⁾. Ainsi, lorsqu'une conique tourne autour de son centre, les aires transformées restent constantes. Pour avoir donc une transformation homographique qui laisse les aires invariables, on peut employer successivement deux transformations polaires par rapport à deux coniques concentriques et ayant les mêmes aires.

En supposant que τ soit un triangle conjugué par rapport à la conique, T et τ se confondent, et l'on a, en vertu de l'équation

⁽¹⁾ L'aire d'une hyperbole étant définie $= ab\pi i$.

⁽²⁾ Plus généralement, si le centre décrit une courbe du troisième ordre, ayant les côtés du triangle τ pour asymptotes d'inflexion.

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = \tau,$$

$$\frac{1}{\tau_1 \tau_2} + \frac{1}{\tau_2 \tau_3} + \frac{1}{\tau_3 \tau_1} = \frac{4}{a^2 b^2},$$

formule assez curieuse pour l'aire d'une conique en fonction des coordonnées homogènes de Lagrange-Möbius rapportées à un triangle conjugué.

6. EXEMPLE II. — Soient données deux courbes planes φ et ψ . Appelons :

$P_{N\varphi\psi}$ le produit des normales communes aux deux courbes, chaque normale étant comptée entre les deux pieds sur les courbes ;

$P_{T\varphi\psi}$ le produit des tangentes communes aux deux courbes, chaque tangente étant comptée entre les deux points de contact ;

$P_{N\varphi as\psi}$ le produit des normales communes à la courbe φ et aux asymptotes de la courbe ψ ;

$P_{N\psi as\varphi}$ le produit analogue, en changeant les deux courbes.

Cela posé, on verra que ces quatre fonctions forment un système complet (1). En effet, $P_{N\varphi\psi}$ s'annule seulement en même temps que $P_{T\varphi\psi}$ et ne devient pas infini sans que $P_{N\varphi as\psi}$ ou $P_{N\psi as\varphi}$ devienne infini, etc. :

$$P_{N\varphi\psi} P_{T\varphi\psi}^{\alpha_1} P_{N\varphi as\psi}^{\alpha_2} P_{N\psi as\varphi}^{\alpha_3} = k,$$

$$P_{N\varphi\psi} = \varepsilon \quad \text{donne} \quad P_{T\varphi\psi} = \varepsilon \dots \dots \dots \quad 1 + \alpha_1 = 0 \quad (1),$$

$$\left. \begin{array}{l} P_{N\varphi as\psi} = \varepsilon \\ \text{ou} \\ P_{N\psi as\varphi} = \varepsilon \end{array} \right\} \text{donnent} \quad P_{T\varphi\psi} = \varepsilon^{-1} \dots \dots \dots \quad \left\{ \begin{array}{l} -\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ -\alpha_1 + \alpha_3 = 0. \end{array} \right.$$

En supposant que successivement φ et ψ tendent à toucher la droite à l'infini, on trouve

$$P_{N\psi as\varphi} = \left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \right)^{2n_\psi} \text{ et } P_{N\varphi\psi} = \varepsilon^{-n_\psi} \dots \dots \dots -1 - \alpha_3 = 0,$$

$$P_{N\varphi as\psi} = \left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \right)^{2n_\varphi} \text{ et } P_{N\varphi\psi} = \varepsilon^{-n_\varphi} \dots \dots \dots -1 - \alpha_2 = 0.$$

(1) Cette équation a lieu dans deux cas. $P_{N\varphi\psi}$ s'annule en effet : 1° si les deux courbes se touchent ; alors deux tangentes s'annulent aussi, chacune étant égale à $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ si la normale est égale à ε ; 2° si les deux courbes ont un foyer commun ; alors les normales communes qui disparaissent se confondent avec des tangentes communes.

Les n_φ , n_ψ signifient les classes des deux courbes.

En supposant encore que successivement φ et ψ tendent à passer par l'un des points cycliques, on retrouve les deux dernières relations.

Ces équations sont satisfaites par les valeurs

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = -1.$$

La constante k , ne pouvant pas contenir les variables, qui, dans ce cas, sont les coefficients des équations des deux courbes, sera un nombre. En supposant que l'une des courbes ait dégénéré en droites, on trouve la valeur $k = 1$. Donc la formule est

$$P_{N\varphi\psi} = P_{T\varphi\psi} P_{N\varphi\alpha\beta\psi} P_{N\psi\alpha\beta\varphi}.$$

Cette formule contient, comme un cas très spécial, un théorème de M. Laguerre (*Comptes rendus*, t. LX, p. 70) sur le produit des normales menées d'un point donné à une courbe donnée. J'ai démontré ce théorème en employant la méthode développée ici (*Clebsch Annalen*, t. XI, p. 341).

7. EXEMPLE III. — *Trouver une expression pour le produit des sinus des angles que forment l'une avec l'autre les tangentes menées d'un point P à une courbe donnée F (de l'ordre m, de la classe n, et ayant d' tangentes doubles et i tangentes d'inflexion).*

Soient :

$P_{\sin\varphi}$ le produit cherché;

F_N l'expression qui, égalée à zéro, fournit l'équation ponctuelle de la courbe donnée sous la forme normale ⁽¹⁾, c'est-à-dire que F_N est égal au produit des normales de P, divisé par le produit des distances focales de P.

EXEMPLE IV. — *Trouver une expression pour le produit des segments interceptés sur une droite D par une courbe donnée F (de l'ordre m, de la classe n, et ayant d points doubles et r points de rebroussement).*

Soient :

P_s le produit cherché;

F_M l'expression qui, égalée à zéro, fournit l'équation tangentielle de la courbe sous une forme normale, c'est-à-dire que F_M est égal au produit des normales communes de F et de D.

(¹) La Note citée de *Clebsch Annalen*.

Soient encore :

P_{td} le produit des distances de P à toutes les tangentes doubles de F;
 P_{ti} le produit des distances de P à toutes les tangentes d'inflexion;
 P_B le produit des distances focales de P.

Soient aussi :

P_{pd} le produit des distances de D à tous les points doubles de F;
 P_{pr} le produit des distances de D à tous les points de rebroussement;
 $P_{\sin \varphi}$ le produit des sinus des angles que forme la droite D avec les asymptotes.

Ces quantités forment deux systèmes complets :

$$P_{\sin \varphi} F_N^{\alpha_1} P_{td}^{\alpha_2} P_{ti}^{\alpha_3} P_B^{\alpha_4},$$

$$P_s F_M^{\alpha_1} P_{pd}^{\alpha_2} P_{pr}^{\alpha_3} P_{\sin \varphi}^{\alpha_4}.$$

En supposant successivement que :

- 1° le point P devienne infiniment voisin de la courbe $F_N = \varepsilon$;
- 2° le point P devienne infiniment voisin d'une tangente double $P_{td} = \varepsilon$;
- 3° le point P devienne infiniment voisin d'une tangente d'inflexion $P_{ti} = \varepsilon$;
- 4° le point P devienne infiniment voisin d'une tangente focale $P_B = \varepsilon$;
- 5° le point P s'éloigne à l'infini,

- 1° la droite D tende à devenir tangente de la courbe $F_M = \varepsilon$;
- 2° la droite D tende à passer par un point double $P_{pd} = \varepsilon$;
- 3° la droite D tende à passer par un point de rebroussement $P_{pr} = \varepsilon$;
- 4° la droite D tende à coïncider avec une asymptote $P_{\sin \varphi} = \varepsilon$;
- 5° la droite D tende à passer par un des points cycliques,

on trouve, toujours par des considérations purement géométriques,

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad & P_{\sin \varphi} = \varepsilon^{\frac{1}{2}}; \\ 2^\circ \quad & P_{\sin \varphi} = \varepsilon; \\ 3^\circ \quad & P_{\sin \varphi} = \varepsilon^{\frac{3}{2}}; \\ 4^\circ \quad & P_{\sin \varphi} = \varepsilon^{-(n-1)}; \\ 5^\circ \quad & \begin{cases} P_{\sin \varphi} = \varepsilon^{\frac{n(n-1)}{2}}, \\ F_N = \varepsilon^{-n}, \\ P_{td} = \varepsilon^{-n'}, \\ P_{ti} = \varepsilon^{-l}, \\ P_B = \varepsilon^{-n}. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad & P_s = \varepsilon^{\frac{1}{2}}; \\ 2^\circ \quad & P_s = \varepsilon; \\ 3^\circ \quad & P_s = \varepsilon^{\frac{3}{2}}; \\ 4^\circ \quad & P_s = \varepsilon^{-(m-1)}; \\ 5^\circ \quad & \begin{cases} P_s = \varepsilon^{\frac{m(m-1)}{2}}, \\ F_M = \varepsilon^{-m}, \\ P_{pd} = \varepsilon^{-d}, \\ P_{pr} = \varepsilon^{-r}, \\ P_{\sin \varphi} = \varepsilon^{-m}. \end{cases} \end{aligned}$$

En conséquence :

$ \begin{aligned} 1^o \quad & \frac{1}{2} + \alpha_1 = 0; \\ 2^o \quad & 1 + \alpha_2 = 0; \\ 3^o \quad & \frac{3}{2} + \alpha_3 = 0; \\ 4^o \quad & -(n-1) + \alpha_4 = 0; \\ 5^o \quad & \left\{ \begin{aligned} & \frac{n(n-1)}{2} - m\alpha_1 \\ & -d'\alpha_2 - i\alpha_3 - n\alpha_4 = 0. \end{aligned} \right. \end{aligned} $	$ \begin{aligned} 1^o \quad & \frac{1}{2} + \alpha_1 = 0; \\ 2^o \quad & 1 + \alpha_2 = 0; \\ 3^o \quad & \frac{3}{2} + \alpha_3 = 0; \\ 4^o \quad & -(m-1) + \alpha_4 = 0; \\ 5^o \quad & \left\{ \begin{aligned} & \frac{m(m-1)}{2} - n\alpha_1 \\ & -d\alpha_2 - r\alpha_3 - m\alpha_4 = 0. \end{aligned} \right. \end{aligned} $
---	--

Toutes ces équations sont satisfaites par les valeurs

$ \begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{1}{2}, \\ \alpha_2 &= -1, \\ \alpha_3 &= -\frac{3}{2}, \\ \alpha_4 &= n-1. \end{aligned} $	$ \begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{1}{2}, \\ \alpha_2 &= -1, \\ \alpha_3 &= -\frac{3}{2}, \\ \alpha_4 &= m-1. \end{aligned} $
--	--

On a ainsi les formules

$$P_{\sin \varphi}^2 P_B^{2(n-1)} = k F_N P_{td}^2 P_{ti}^3,$$

Pour déterminer la constante k , il suffit de supposer successivement le point P confondu avec les points I et J . Des deux formules ainsi obtenues on conclut

$$k = P_{B_i B_k}^2.$$

$B_i B_k$ désigne la distance entre deux quelconques des foyers.

$$P_s^2 P_{\sin \psi}^{2(m-1)} = k' F_M P_{pd}^2 P_{pr}^3.$$

Pour déterminer la constante k' , il suffit de supposer la droite D confondue avec la droite à l'infini. Cela posé, on trouve

$$k' = P_{\sin \psi_i}^2.$$

ψ_i désigne l'angle entre deux quelconques des asymptotes de la courbe.

Les formules sont alors

$$P_{\sin \varphi}^2 P_B^{2(n-1)} = P_{B_i B_k}^2 F_N P_{td}^2 P_{ti}^3,$$

$$P_s^2 P_{\sin \psi}^{2(m-1)} = P_{\sin \psi_i}^2 F_M P_{pd}^2 P_{pr}^3.$$

Nous pensons que ces quelques exemples suffiront pour faire saisir l'esprit général de la méthode et spécialement son application à l'étude des propriétés métriques de l'étendue.

*Réponse aux observations de M. HALPHEN sur la théorie
des caractéristiques* (1); par M. SCHUBERT.

(Séance du 16 janvier 1880.)

La formule (3) (2), dont mon savant contradicteur veut prouver l'inexactitude par son premier exemple, n'est établie que pour déterminer par une certaine élimination les coefficients de la formule (4) résultant de l'équation principale (1). La formule (4), qui suit la formule (3) immédiatement, s'écrit ainsi, pour la valeur $n = 3$:

$$x = g' \cdot gp_{1,2}^3 + p'_1 \cdot Gp_{23} + p'_2 \cdot Gp_{31} + p'_3 \cdot Gp_{12}.$$

Les symboles de cette formule, déjà définis dans le § 34 et introduits dans le § 42, font voir clairement que l'emploi fait par M. Halphen est *exclu* par le contexte de mon Livre, car il y a ∞^1 droites qui, assujetties à la condition Σ , satisfont à la condition $gp_{1,2}^3$, condition supposée *sextuple* par la formule, mais *quintuple* par l'emploi. Ainsi la formule (4) ne s'interprète pas même à l'exemple de M. Halphen. En voici l'origine. Si deux de quatre points harmoniques coïncident, l'un des deux autres points est perpétuellement obligé d'être infiniment voisin du point de coïncidence. Mais, dans mon Livre, j'ai toujours supposé qu'un système de ∞^i droites g , possédant trois points p_1, p_2, p_3 , contienne ∞^{i-1} droites g caractérisées par la réunion de *deux* de ces points, et qu'un tel système ne contienne que ∞^{i-2} droites g caractérisées par la réunion de tous les *trois* points. C'est pourquoi les formules des §§ 34 et 42 ne peuvent se rapporter ni aux cas où un système de ∞^1 figures Γ contient la dégénérescence constituée par la réunion de plus de deux points, ni aux cas analogues. Je vois maintenant qu'il aurait été *utile* d'ajouter cette restriction à la *formule* (3) *expressément*, parce que cette formule, ayant encore des coefficients indéterminés, ne fait pas connaître les cas exclus par elle-même.

(1) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. VIII, p. 31.

(2) Voir *Kalkül der abzählenden Geometrie*, p. 308.

M. Halphen, en appliquant la formule (3) à son exemple, n'a pas déterminé les coefficients par les symboles de la formule (4), mais par un autre procédé. Ainsi il n'est pas conduit au résultat absurde fourni par la formule (4), mais à un nombre fini. L'emploi n'étant pas permis, il est indifférent si ce nombre est correct ou incorrect. Aussi M. Halphen aurait employé un théorème qui ne résulte nullement des déductions de mon Livre, s'il avait trouvé peut-être un nombre correct.

Une réponse analogue se donne au second exemple de M. Halphen.

Note sur l'évaluation du nombre des coniques faisant partie d'un système et satisfaisant à une condition simple ⁽¹⁾; par M. SCHUBERT.

(Séance du 16 janvier 1880.)

Le Mémoire de M. Halphen sur la théorie des caractéristiques pour les coniques (*Proc. of the London Math. Soc.*, vol. IX, et *Math. Ann.*, t. XV) m'a fait comprendre enfin qu'une conique qui, d'après la notation de M. Halphen, est dégénérée suivant le mode B se détermine par quatre conditions simples ⁽²⁾. N'ayant nullement eu égard à cette dégénérescence dans le § 38 de mon Livre, j'y ai commis une erreur que je regrette à présent. Ainsi, les déductions du § 38 ne sont correctes qu'aux cas où le système de ∞^1 coniques ne contient pas une telle dégénérescence. Cette restriction n'a point d'influence sur les paragraphes suivants.

⁽¹⁾ Voir *Kalkül der abzählenden Geometrie*, § 38.

⁽²⁾ J'avoue que je n'ai pas été en état de reconnaître cela par les Notes publiées par M. Halphen dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXIII. (Voir mon Livre, p. 344, note 51.)

Sur une formule d'Analyse; par M. HALPHEN.

(Séance du 16 janvier 1880.)

La formule dont il s'agit ici est la suivante :

$$(1) \left\{ \begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} \left[f(x) \varphi \left(\frac{1}{x} \right) \right] &= \varphi \left(\frac{1}{x} \right) f^{(n)}(x) - \frac{n}{1} \frac{1}{x} \varphi' \left(\frac{1}{x} \right) \left[\frac{f(x)}{x} \right]^{(n-1)} \\ &+ \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{1}{x^2} \varphi'' \left(\frac{1}{x} \right) \left[\frac{f(x)}{x^2} \right]^{(n-2)} + \dots \\ &+ (-1)^k \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1.2\dots k} \frac{1}{x^k} \varphi^{(k)} \left(\frac{1}{x} \right) \left[\frac{f(x)}{x^k} \right]^{(n-k)} + \dots \end{aligned} \right.$$

dans laquelle, bien entendu, $\varphi^{(k)} \left(\frac{1}{x} \right)$ désigne une dérivée d'ordre k prise par rapport à $\frac{1}{x}$, et $\left[\frac{f(x)}{x^k} \right]^{(n-k)}$ une dérivée d'ordre $(n-k)$ prise par rapport à x .

Un des moyens les plus simples de vérifier la formule (1) me paraît être le suivant.

On peut, sans nuire à la généralité, supposer

$$f(x) = \sum_m A x^m, \quad \varphi \left(\frac{1}{x} \right) = \sum_{\mu} B \left(\frac{1}{x} \right)^{\mu}.$$

A cause de la forme doublement linéaire du second membre de (1), il suffit alors de vérifier l'identité pour

$$f(x) = x^m, \quad \varphi \left(\frac{1}{x} \right) = \left(\frac{1}{x} \right)^{\mu}.$$

Pour ce dernier cas, la formule (1) devient

$$\begin{aligned} &\frac{(m-\mu)(m-\mu-1)\dots(m-\mu-n+1)}{m(m-1)\dots(m-n+1)} \\ &= 1 - \frac{n}{1} \frac{\mu}{m} + \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{\mu(\mu-1)}{m(m-1)} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{m(m-1)(m-2)} + \dots, \end{aligned}$$

et le lecteur trouvera sans peine la démonstration de cette identité.

C'est en étudiant les dérivées successives de la fonction $x^m e^{\frac{1}{x}}$

que j'ai été conduit à la formule (1). Elle fournit effectivement ces dérivées, et l'on a

$$(2) \left\{ \begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} (x^m e^{\frac{1}{x}}) &= (-1)^n e^{\frac{1}{x}} \left[x^{m-2n} - \frac{n}{1} (m-n+1) x^{m-2n+1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{n(n-1)}{1.2} (m-n+1)(m-n+2) x^{m-2n+2} - \dots \right]. \end{aligned} \right.$$

Un cas particulier remarquable est celui où, m étant entier positif, le nombre n est égal à $(m+1)$. Pour ce cas, on a

$$(3) \quad \frac{d^n}{dx^n} (x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}) = (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}.$$

Il est facile de démontrer directement cette formule (3). J'en indique ici deux démonstrations.

La première est fondée sur l'emploi de la série de Lagrange. On trouve effectivement

$$e^{\frac{1-t}{x}} = e^{\frac{1}{x}} \left[1 - \frac{t}{x} + \frac{1}{1.2} \frac{t^2}{x^2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{1.2 \dots (n+1)} \frac{t^{n+1}}{x^{n+1}} + \dots \right],$$

développée de cette autre manière :

$$e^{\frac{1-t}{x}} = e^{\frac{1}{x}} - \frac{t}{1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} - \frac{t^2}{1.2} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} \right) - \dots - \frac{t^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}} \right) \dots$$

Si l'on applique la série de Lagrange à la fonction $e^{\frac{1}{z}}$, composée avec la racine z de l'équation

$$z = x + tz,$$

la comparaison des deux développements donne la formule (3).

La seconde démonstration consiste à observer que la dérivée d'ordre n du produit $x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}$ est de la forme suivante :

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}) = \frac{e^{\frac{1}{x}} \varphi(x)}{x^{n+1}},$$

$\varphi(x)$ étant un polynôme entier. En développant suivant les puis-

sances décroissantes de x le premier membre, on reconnaît que ce polynôme se réduit à $(-1)^n$.

En intégrant p fois de suite les deux membres de la formule (3), on obtient

$$\int^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}} dx^p = (-1)^n \frac{d^{n-p}}{dx^{n-p}} \left(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}} \right).$$

La formule (2) fournit l'expression de la dérivée qui figure au second membre, et l'on a ainsi

$$\int^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^m} dx^n = (-1)^n e^{\frac{1}{x}} \left[x^{2n-m} - \frac{n}{1} (m-n-1) x^{2n-m+1} + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} (m-n-1)(m-n-2) x^{2n-m+2} - \dots \right],$$

c'est-à-dire, sous forme finie, l'intégrale $n^{\text{ième}}$ de $\frac{1}{x^m} e^{\frac{1}{x}}$, quand m est un nombre entier au moins égal à 2, et n inférieur à m . En d'autres termes, la formule (2) s'applique aux valeurs négatives de n et de m , sous ces dernières réserves.

L'identité (3) conduit aisément à cette conséquence que l'équation

$$(4) \quad \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{x^{2n}} y$$

a pour intégrale générale

$$y = \sum A x^{n-1} e^{\frac{\alpha}{x}},$$

les coefficients α étant les racines de l'équation $(-\alpha)^n = 1$.

Note sur certaines équations différentielles obtenues par l'élimination de deux fonctions arbitraires; par M. Worms DE ROMILLY.

(Séance du 16 janvier 1880.)

Étant donnée une fonction explicite z de deux fonctions arbitraires F_1, F_2 , qui sont elles-mêmes fonctions de fonctions données φ_1 et φ_2 de x et de y , on peut se proposer d'éliminer les fonctions

arbitraires et de trouver une relation entre la fonction explicite z de F_1 et F_2 , les fonctions φ_1 et φ_2 et leurs différentielles.

Nous supposons, ce qui n'enlève rien à la généralité du problème, que F_1 ne dépend que de φ_1 et F_2 que de φ_2 . Soit donc

$$(1) \quad z = f[F_1(\varphi_1), F_2(\varphi_2)].$$

Prenons les dérivées partielles du premier et du second ordre par rapport à x et à y , et désignons par p, q, r, s, t ces dérivées partielles :

$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy}, \quad r = \frac{d^2z}{dx^2}, \quad s = \frac{d^2z}{dx dy}, \quad t = \frac{d^2z}{dy^2}.$$

Nous représenterons par a, b, c, d, e les dérivées de φ_1 prises dans le même ordre, et par $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ celles de φ_2 .

Pour simplifier l'écriture, nous poserons, en outre,

$$(2) \quad \begin{cases} \lambda_1 = \frac{df}{dF_1} \frac{dF_1}{d\varphi_1}, \\ \mu_1 = \frac{d^2f}{dF_1^2} \left(\frac{dF_1}{d\varphi_1} \right)^2 + \frac{df}{dF_1} \frac{d^2F_1}{d\varphi_1^2}, \end{cases}$$

et nous appellerons λ_2, μ_2 les expressions obtenues en remplaçant dans les seconds membres des relations précédentes l'indice 1 par l'indice 2; enfin nous désignerons par ρ la différentielle

$$(3) \quad \rho = \frac{d^2f}{dF_1 dF_2} \frac{dF_1}{d\varphi_1} \frac{dF_2}{d\varphi_2}.$$

Par de simples différentiations, nous obtiendrons les cinq équations suivantes :

$$p = a\lambda_1 + \alpha\lambda_2,$$

$$q = b\lambda_1 + \beta\lambda_2,$$

$$r = 2a\alpha\rho = c\lambda_1 + \gamma\lambda_2 + a^2\mu_1 + \alpha^2\mu_2,$$

$$s = (a\beta + \alpha b)\rho = d\lambda_1 + \delta\lambda_2 + ab\mu_1 + \alpha\beta\mu_2,$$

$$t = 2b\beta\rho = e\lambda_1 + \varepsilon\lambda_2 + b^2\mu_1 + \beta^2\mu_2.$$

Si nous considérons comme inconnues les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$, ces cinq équations entre quatre inconnues donneront une équation

de condition qui peut être mise sous forme de déterminant :

$$(4) \quad \begin{vmatrix} -p & a & \alpha & 0 & 0 \\ -q & b & \beta & 0 & 0 \\ -r + 2a\alpha\rho & c & \gamma & a^2 & \alpha^2 \\ -s + (a\beta + \alpha b)\rho & d & \delta & ab & \alpha\beta \\ -t + 2b\beta\rho & e & \varepsilon & b^2 & \beta^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant peut se décomposer en deux, et, en appelant D le suivant :

$$(5) \quad D = \begin{vmatrix} p & a & \alpha & 0 & 0 \\ q & b & \beta & 0 & 0 \\ r & c & \gamma & a^2 & \alpha^2 \\ s & d & \delta & ab & \alpha\beta \\ t & e & \varepsilon & b^2 & \beta^2 \end{vmatrix},$$

la relation (4) peut s'écrire

$$-D + \rho \begin{vmatrix} 2a\alpha & a^2 & \alpha^2 \\ a\beta + \alpha b & ab & \alpha\beta \\ 2b\beta & b^2 & \beta^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en effectuant les calculs, il vient enfin

$$(6) \quad -D + (a^2\beta^2 - \alpha^2b^2)\rho = 0.$$

La quantité que nous avons représentée par ρ peut se mettre sous une autre forme que (3). En effet, si nous remplaçons $\frac{dF_1}{d\varphi_1}$, $\frac{dF_2}{d\varphi_2}$ par leurs valeurs tirées des relations (2), nous trouvons

$$\rho = \frac{\lambda_1\lambda_2 \frac{d^2f}{dF_1 dF_2}}{\frac{df}{dF_1} \frac{df}{dF_2}};$$

mais les différentielles du premier ordre de z nous donnent les valeurs de λ_1 , λ_2 , de sorte que, en faisant la substitution, on a

$$z = \frac{\frac{d^2f}{dF_1 dF_2}}{\frac{df}{dF_1} \frac{df}{dF_2}} \frac{aq - bp(\beta\rho - \alpha\gamma)}{a\beta - \alpha b^2}.$$

La relation (6) peut donc se mettre sous la forme

$$(7) \quad D + (aq - bp)(\alpha q - \beta p)(\alpha\beta + \alpha b)^2 \frac{\frac{d^2 f}{dF_1 dF_2}}{\frac{df}{dF_1} \frac{df}{dF_2}} = 0.$$

Pour que cette équation soit indépendante des fonctions arbitraires, il faut que le dernier facteur du second terme puisse s'exprimer au moyen de z , c'est-à-dire, en représentant par $\psi(z)$ une certaine fonction explicite de z , que l'on ait

$$\frac{\frac{d^2 f}{dF_1 dF_2}}{\frac{df}{dF_1} \frac{df}{dF_2}} = \psi(z),$$

ou, en remplaçant les lettres F_1, F_2 par u et v , que l'on ait

$$(8) \quad \frac{d^2 z}{du dv} = \psi(z) \frac{dz}{du} \frac{dz}{dv}.$$

Considérons maintenant le problème inverse; supposons que l'on parte de l'équation différentielle pour remonter à la fonction z . Le déterminant D ne contient les différentielles p, q, r, s, t qu'au premier degré, le second terme ne les contient qu'au second degré, de sorte que, si l'on représente par

$$(9) \quad D + A\psi = 0$$

l'équation (7), on pourra mettre sous la forme correspondante

$$(10) \quad D_1 + B_1 = 0$$

l'équation différentielle donnée.

Or nous montrerons que la connaissance de D_1 suffit pour déterminer φ_1 et φ_2 . Ce premier résultat obtenu, en remplaçant $a, b, \dots$ par leurs valeurs dans A , on calculera la valeur A_1 que doit avoir A dans la relation (10), et, en divisant B_1 par A_1 , on trouvera $\psi(z)$. Le problème sera alors ramené à l'intégration de l'équation (8). Nous supposerons d'abord qu'aucun facteur commun aux deux

termes n'a été supprimé dans l'équation (10), de sorte que le premier membre est identique à l'expression obtenue en remplaçant, dans (7), $a, b, \dots$ par leurs valeurs déduites de celles de φ_1, φ_2 sans suppression d'aucun facteur commun à tous les termes de l'équation.

Considérons d'abord le déterminant D; si nous effectuons les calculs, il se mettra sous la forme

$$(11) \quad D = Pp + Qq + Rr + Ss + Tt,$$

où nous avons posé

$$(12) \quad \begin{cases} P = [\alpha\beta + \alpha b](\beta d - b\delta) + b\beta(b\gamma - \beta c) + a\alpha(b\epsilon - \beta e)[\alpha\beta - \alpha b], \\ -Q = [\alpha\beta + \alpha b](\alpha d - \alpha\delta) + b\beta(a\gamma - \alpha c) + a\alpha(a\epsilon - \alpha e)[\alpha\beta - \alpha b], \\ R = (\alpha\beta - \alpha b)^2 b\beta, \\ -S = (\alpha\beta - \alpha b)^2 (\alpha\beta + \alpha b), \\ T = (\alpha\beta - \alpha b)^2 a\alpha. \end{cases}$$

On tire des trois dernières équations les rapports

$$\frac{S}{T} = -\left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{b}{a}\right), \quad \frac{R}{T} = \frac{b}{a} \frac{\beta}{\alpha},$$

de sorte que l'équation

$$(13) \quad X^2 + \frac{S}{T}X + \frac{R}{T} = 0$$

a pour racines $\frac{\beta}{\alpha}$ et $\frac{b}{a}$; on peut donc exprimer ces quantités en fonction de $\frac{S}{T}$ et de $\frac{R}{T}$, et, comme les rapports des quantités S, R, T entrent seuls dans la relation, peu importe qu'un facteur commun à tous les termes ait été supprimé dans l'équation donnée (10). Le problème pour déterminer φ_1 et φ_2 se trouve donc ramené à l'intégration de

$$(14) \quad \frac{dy}{dx} = \Phi(x, y) \frac{dy}{dx},$$

dans laquelle $\Phi(x, y)$ représente la valeur de l'une des racines de l'équation (14); l'une des racines donnera φ_1 et l'autre φ_2 .

Les coefficients de r, s, t suffisent donc pour déterminer les fonctions φ ; si l'équation (11) correspond à une équation de la

forme (1), il faudra donc que les coefficients de p et q satisfassent chacun à une équation de condition. Or R, S, T sont des fonctions de φ_1, φ_2 et de leurs différentielles; donc, puisque P et Q ne dépendent que des mêmes quantités, on devra pouvoir exprimer P et Q en fonction de R, S, T , et les relations qui représenteront la valeur de P et Q au moyen de R, S, T devront être satisfaites. Cherchons quelles sont ces relations. Il est facile de voir que, en posant, pour abréger,

$$(15) \quad N = (a\beta - \alpha b),$$

P et Q peuvent se mettre sous les formes suivantes :

$$P = N^3 \left(b \frac{d\frac{\beta}{N}}{dx} - a \frac{d\frac{\beta}{N}}{dy} \right),$$

$$Q = -N^3 \left(b \frac{d\frac{\alpha}{N}}{dx} - a \frac{d\frac{\alpha}{N}}{dy} \right),$$

ou bien, en remarquant que $\frac{db}{dx} = \frac{da}{dy}$,

$$(16) \quad \begin{cases} P = N^3 \left(\frac{d\frac{b\beta}{N}}{dx} - \frac{d\frac{a\beta}{N}}{dy} \right), \\ Q = -N^3 \left(\frac{d\frac{\alpha b}{N}}{dx} - \frac{d\frac{\alpha a}{N}}{dy} \right). \end{cases}$$

Or nous pouvons exprimer $b\beta, a\beta, \alpha b, \alpha a$ au moyen de R, S, T et N ; nous avons, en effet,

$$(17) \quad \begin{cases} \alpha a = \frac{T}{N^2}, & b\beta = \frac{R}{N^2}, \\ \alpha b = -\frac{S + N^3}{2N^2}, & a\beta = \frac{N^3 - S}{2N^2}. \end{cases}$$

Si l'on remplace, dans les valeurs de P et de Q , les quantités a, α, b, β par leurs valeurs, on trouve, toutes réductions faites

$$(18) \quad \begin{cases} P = \frac{dR}{dx} - \frac{3R}{N} \frac{dN}{dx} + \frac{1}{2} \frac{dS}{dy} - \frac{3}{2} \frac{S}{N} \frac{dN}{dy}, \\ Q = \frac{dT}{dy} - \frac{3T}{N} \frac{dN}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dS}{dx} + \frac{3}{2} \frac{S}{N} \frac{dN}{dx}. \end{cases}$$

Il n'y a d'inconnu que N , mais il est facile de trouver la valeur de cette quantité en fonction des coefficients de l'équation donnée. On voit en effet immédiatement, par les formules (12), que l'on a

$$S^2 - 4RT = N^2(a^2\beta^2 + \alpha^2b^2 - 2\alpha\alpha b\beta) = N^6,$$

de sorte que

$$N = (S^2 - 4RT)^{\frac{1}{6}}.$$

Voyons si ces relations auraient encore lieu dans le cas où l'on aurait supprimé, dans l'équation différentielle donnée, un facteur commun K ; les coefficients P' , Q' , ... seraient alors liés à P , Q , ... par les relations

$$P = P'K, \quad Q = Q'K, \quad R = R'K, \quad S = S'K, \quad T = T'K,$$

d'où

$$N = K^{\frac{1}{3}}(S'^2 - 4R'T')^{\frac{1}{6}} = K^{\frac{1}{3}}N'.$$

Remplaçons P , Q , ... par ces valeurs dans les relations (18); on trouve, après réduction,

$$(19) \quad \begin{cases} P' = \frac{dR'}{dx} - \frac{3R'}{N'} \frac{dN'}{dx} + \frac{1}{2} \frac{dS'}{dy} - \frac{3}{2} \frac{S'}{N'} \frac{dN'}{dy}, \\ Q' = \frac{dP'}{dy} - \frac{3T'}{N'} \frac{dN'}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dS'}{dx} + \frac{3}{2} \frac{S'}{N'} \frac{dN'}{dx}, \\ N' = (S'^2 - 4R'T')^{\frac{1}{6}}. \end{cases}$$

Les relations sont donc encore les mêmes.

Il nous reste à examiner les termes du second degré en p et q qui multiplient $\psi(z)$; le coefficient de $\psi(z)$ dans l'équation (7) peut s'écrire

$$+ (a\beta + \alpha b)^2 [a\alpha q^2 + b\beta p^2 - (a\beta + \alpha b)pq],$$

c'est-à-dire

$$+ \frac{S^2}{N^2} \left(\frac{T}{N^2} q^2 + \frac{R}{N^2} p^2 + \frac{S}{N^2} pq \right),$$

ou enfin

$$+ \frac{S^2}{N^6} (Tq^2 + Rp^2 + Spq),$$

et, si l'on a supprimé un facteur K commun à tous les termes.

cette quantité devient

$$+ \frac{K^2 S'^2}{K^{\frac{2}{3}} N'^6} (KT'q^2 + KR'p^2 + KS'pq) \frac{1}{K},$$

ou enfin

$$(20) \quad + \frac{S'^2}{N'^6} (T'q^2 + R'p^2 + S'pq),$$

c'est-à-dire que l'expression ne change pas de forme.

Ainsi, pour que l'équation différentielle (10) représente une fonction z de la forme (1), il faut que, en désignant par $\psi(z)$ une fonction quelconque de z , en mettant l'équation donnée sous la forme

$$(21) \quad P'p + Q'q + R'r + S's + T't + A'p^2 + B'q^2 + C'pq = 0$$

et en posant

$$(22) \quad N' = (S'^2 - 4RT')^{\frac{1}{6}},$$

les coefficients P' , Q' , A' , B' , C' satisfassent aux équations de condition suivantes :

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} P' = \frac{dR'}{dx} - \frac{3R'}{N'} \frac{dN'}{dx} + \frac{1}{2} \frac{dS'}{dy} - \frac{3}{2} \frac{S'}{N'} \frac{dN'}{dy}, \\ Q' = \frac{dT'}{dy} - \frac{3T'}{N'} \frac{dN'}{dy} - \frac{1}{2} \frac{dS'}{dx} + \frac{3}{2} \frac{S'}{N'} \frac{dN'}{dx}, \\ A' = + \frac{S'^2 R'}{N'^6}, \\ B' = + \frac{S'^2 T'}{N'^6}, \\ C' = + \frac{S'^3}{N'^6}. \end{array} \right.$$

Si cela a lieu, on pourra trouver la fonction cherchée en intégrant l'équation aux différentielles partielles (8) et les deux équations obtenues en remplaçant, dans (14), $\Phi(x, y)$ successivement par chacune des racines X de l'équation (13).

L'intégration de l'équation aux différentielles partielles

$$(8) \quad \frac{d^2 z}{du dv} = \psi(z) \frac{dz}{du} \frac{dz}{dv}$$

se fait immédiatement; on peut écrire cette équation sous la forme

$$\frac{d \frac{dz}{dv}}{\frac{dz}{dv}} = \psi(z) \frac{dz}{du},$$

ou, en intégrant par rapport à u ,

$$L \frac{dz}{dv} = \int \psi(z) dz + L \theta(v),$$

en désignant par θ une fonction quelconque et par L les logarithmes népériens. Cette relation peut se mettre sous la forme

$$e^{-f\psi(z)dz} dz = \theta(v) dv,$$

et, en intégrant de nouveau,

$$\int e^{-f\psi(z)dz} dz = \int \theta(v) dv + \tau_1(u),$$

on peut remplacer l'intégrale de $\theta(v)$, qui est indéterminée, par une fonction quelconque de v . On a donc enfin

$$(24) \quad \int e^{-f\psi(z)dz} dz = \tau_1(u) + \tau_2(v) = \tau_1(F_1) + \tau_2(F_2),$$

ce qui détermine la fonction z .

Ainsi, pour que la fonction z définie par la relation (1) puisse donner lieu à une équation différentielle du second ordre indépendante des fonctions arbitraires F_1 et F_2 , il faut que la fonction f soit de forme telle qu'il existe deux fonctions τ_1 , τ_2 , dépendant l'une de F_1 seul, l'autre de F_2 seul, dont la somme puisse s'exprimer en fonction de z .

Nous avons montré comment, dans ce cas, on peut remonter de l'équation différentielle à la fonction intégrale.

Sur l'épure des vingt-sept droites d'une surface du troisième degré, dans le cas où ces droites sont réelles; par M. CARON.

(Séance du 6 février 1880.)

On choisit arbitrairement une droite a_1 et cinq droites b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 qui rencontrent a_1 ; il existera cinq droites a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 telles que chacune rencontre toutes les droites b qui n'ont pas le même indice qu'elle.

Enfin il existera une droite b_1 rencontrant a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 . On aura constitué le double-six

$$\begin{array}{c} a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \\ b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, \end{array}$$

tel que chaque droite d'une rangée rencontre toutes celles de l'autre ne portant pas le même indice.

Les quinze autres droites sont les intersections des deux plans a, b, b, a, p et q étant différents.

Tableau des vingt-sept droites.

$$\begin{array}{c} a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \\ b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, \\ 12, 13, 14, 15, 16, \\ 23, 24, 25, 26, \\ 34, 35, 36, \\ 45, 46, \\ 56. \end{array}$$

Une droite quelconque en rencontre dix autres. Exemple :

$$\begin{array}{ll} a_1 \text{ rencontre } & b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, 12, 13, 14, 15, 16, \\ a_2 & " \quad b_1, b_3, b_4, b_5, b_6, 12, 23, 24, 25, 26, \\ b_1 & " \quad a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, 12, 13, 14, 15, 16, \\ 23 & " \quad a_2, b_2, a_3, b_3, 14, 15, 16, 45, 46, 56, \\ & \dots\dots\dots \end{array}$$

Dans l'épure, la première droite a_1 a été choisie verticale ; il en résulte que les droites b_2, b_3, b_4 , par exemple, déterminent un hyperboloïde qui admet une deuxième génératrice verticale dont j'appelle le pied $(2, 3, 4)$. Toutes les droites rencontrant b_2, b_3, b_4 , passent donc en projection horizontale par le point $(2, 3, 4)$.

De même, les droites rencontrant b_2, b_3, b_5 passent en projection horizontale par le point $(2, 3, 5)$. Donc la deuxième droite, qui s'appuie sur les quatre droites b_2, b_3, b_1, b_5 , a pour projection horizontale $(2, 3, 4), (2, 3, 5)$.

On a déterminé à l'avance ces points fixes en construisant pour chaque système b_m, b_n, b_p deux droites s'appuyant sur ces dernières. On a ainsi les points fixes suivants :

$$\begin{aligned} & (2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 3, 6), (2, 4, 5), (2, 4, 6), \\ & (2, 5, 6), (3, 4, 5), (3, 4, 6), (3, 5, 6), (4, 5, 6), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit les projections horizontales des droites a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 ,

$$\begin{aligned} a_2 & \text{ passe par } (3, 4, 5), (3, 4, 6), (3, 5, 6), (4, 5, 6), \\ a_3 & \quad \quad (2, 4, 5), (2, 4, 6), (3, 5, 6), (4, 5, 6), \\ a_4 & \quad \quad (2, 3, 5), (2, 3, 6), (2, 5, 6), (3, 5, 6), \\ a_5 & \quad \quad (2, 3, 4), (2, 3, 6), (2, 4, 6), (3, 4, 6), \\ a_6 & \quad \quad (2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 4, 5), (3, 4, 5). \end{aligned}$$

Pour trouver la droite b_1 , on emploie un procédé analogue au précédent, à l'aide d'une projection auxiliaire parallèlement à l'une des droites données b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 . La construction des autres droites ne présente aucune difficulté.

Rectification d'une formule de probabilité; par M. LAQUIÈRE.

(Séance du 20 février 1880.)

Dans le problème : *Une droite l est divisée en m segments. Quelle est la probabilité pour que n d'entre eux soient d'une longueur plus grande qu'une longueur donnée a?* M. Jordan éta-

blit que la probabilité que les n premiers segments soient tous plus grands que a , désignée par X_n , est exprimée par

$$X_n = \left(\frac{l - na}{l} \right)^{m-1},$$

si $na < l$. Cherchant ensuite la probabilité que n segments fixés d'avance par une personne étrangère, à l'insu de celui qui fait la section, soient tous $> a$, il donne pour cette probabilité C_n la formule

$$C_n = \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{1.2.3 \dots n} \left(\frac{l - na}{l} \right)^{m-1},$$

c'est-à-dire

$$C_n = \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{1.2.3 \dots n} X_n.$$

Il me paraît y avoir ici une confusion. Le nombre C_n ainsi déterminé exprime le nombre probable des groupes qu'il est possible de former avec les segments supérieurs à a . La probabilité que n segments choisis d'avance, ou déterminés, ou pris au hasard, ce qui revient toujours au même, seront tous plus grands que a , est absolument indépendante de l'ordre des segments choisis, et par suite égale à X_n . Ce nombre est la probabilité commune à tous les groupes de m segments distingués par le choix particulier des segments mis à part; le nombre de groupes formés égal à $\frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{1.2.3 \dots n}$ disparaît dans la probabilité comme facteur commun aux deux termes de la fraction.

Il est, du reste, évident que le nombre donné dans la Note (1) de M. C. Jordan est trop fort, comme plus grand que l'unité, toutes les fois que le rapport $\frac{m}{n}$ sera suffisamment grand et $\frac{na}{l}$ suffisamment petit. Exemple : si $na < \frac{l}{4}$, $m = 2n$,

$$C_n > 2^n \left(\frac{3}{4} \right)^{2n-1} > 2^n \left(\frac{3}{4} \right)^{2n} = \left(\frac{9}{8} \right)^n > 1.$$

La probabilité C_n pour que n segments déterminés sur les m soient

(1) Voir *Bulletin*, t. I. p. 256.

tous plus grands que a n'est autre que

$$C_n = X_n = \left(\frac{l - na}{l} \right)^{n-1}.$$

Soient dès lors, avec M. Jordan,

A_r la probabilité qu'il y ait *juste* r segments plus grands que a parmi les n suivant lesquels a été partagée la tige, les points de division étant supposés tous également probables et indépendants les uns des autres;

B_r la probabilité qu'il y en a *au moins* r .

L'expression de A_r se déduit sans difficulté de celle de C_r , et, par suite, on obtiendra celle de B_r , dont la valeur évidente est

$$B_r = A_r + A_{r+1} + \dots + A_{r+k} + \dots + A_m,$$

en observant de prendre A_{r+k} , B_{r+k} , C_{r+k} nuls dès que $r+k$ est supérieur à $\frac{l}{a}$.

Calcul de la probabilité A_r en fonction de C_r .

Les r segments déterminés d'avance et tous plus grands que a proviennent d'un nombre $r+k$ de tels segments existant réellement sur les m , le nombre k étant compris entre les limites extrêmes 0 et $m-r$. Pour chaque valeur de k , la probabilité simple de r segments déterminés plus grands que a étant

$$\frac{(r+k)(r+k-1)\dots(k+2)(k+1)}{m(m-1)\dots(m-r+1)},$$

la probabilité qu'il existe r segments déterminés plus grands que a , provenant de segments de telle nature existant au nombre de $r+k$, est donc la probabilité composée

$$\frac{(k+1)(k+2)\dots(k+r)}{m(m-1)\dots(m-r+1)} A_{r+k},$$

d'où

$$(1) \quad C_r = \sum \frac{(k+1)(k+2)\dots(k+r)}{m(m-1)\dots(m-r+1)} A_{r+k},$$

somme dans laquelle k prend toutes les valeurs entières de 0 à $m - r$.

Pour avoir la valeur de A_r en fonction des quantités déjà connues et d'expression simple, telles que C_r , écrivons d'abord la série de toutes les valeurs de ces dernières en fonction des premières [formule (1)] pour les valeurs $r, r + 1, \dots, r + k, \dots$ successives entières de r , série qui s'arrête d'elle-même aux termes rendus nuls par l'inégalité $r + k > \frac{l}{a}$. Supposons écrites les valeurs ainsi développées de

$$C_r, C_{r+1}, C_{r+2}, \dots, C_{r+k}, \dots$$

Multiplions les deux membres des égalités de la série complète de ces valeurs par les facteurs, alternativement positifs et négatifs, compris entre les barres

$$+1 \left| -\frac{m-r}{1} \right| + \frac{(m-r)(m-r-1)}{1.2} \left| \dots \right| \pm \frac{(m-r) \dots (m-r-k+1)}{1.2.3 \dots k} \left| \dots \right|$$

Faisons la somme des produits membre à membre; il en résultera l'élimination de tous les termes du second membre en dehors de A_r , dont la valeur est, par suite, égale à

$$\begin{aligned} & \frac{1.2.3 \dots r}{m(m-1) \dots (m-r+1)} A_r \\ &= C_r - \frac{m-r}{1} C_{r+1} + \frac{(m-r)(m-r-1)}{1.2} C_{r+2} \\ & \quad - \frac{(m-r) \dots (m-r-2)}{1.2.3} C_{r+3} + \dots \\ & \quad \pm \frac{(m-r)(m-r-1) \dots (m-r-k+1)}{1.2.3 \dots k} C_{r+k} \mp \dots \end{aligned}$$

On voit, en effet, que le coefficient dans le second membre (contenant les A) d'un terme quelconque A_{r+k} , en dehors du premier, est dans cette somme formé des termes successifs du développement du binôme $(1-1)^k$.

On a ainsi

$$\begin{aligned} A_r &= \frac{m(m-1) \dots (m-r+1)}{1.2.3 \dots r} C_r - \frac{m(m-1) \dots (m-r)}{1.2.3 \dots r.1} C_{r+1} + \dots \\ & \quad \pm \frac{m(m-1) \dots (m-r-k+1)}{1.2.3 \dots r.1.2.3 \dots k} C_{r+k} \mp \dots \end{aligned}$$

Ajoutant ensuite les valeurs ainsi développées de $A_r, A_{r+1}, \dots, A_{r+k}, \dots$, on trouve, pour valeur du coefficient de C_{r+k} dans le développement de $B_r = \sum A_{r+k} \ (0 \leq k \leq m-r)$,

$$\frac{m(m-1)\dots(m-r-k+1)}{1.2.3\dots(r+k)} \left[1 - \frac{r+k}{1} + \frac{(r+k)(r+k-1)}{1.2} - \dots \right. \\ \left. \pm \frac{(r+k)(r+k-1)\dots(r+2)(r+1)}{1.2.3\dots k} \right],$$

ou, d'après les propriétés des nombres figurés,

$$\pm \frac{m(m-1)\dots(m-r-k+1)}{1.2.3\dots(r+k)} \frac{r(r+1)\dots(r+k-1)}{1.2.3\dots k}.$$

Ce développement s'écrira donc

$$B_r = \frac{m(m-1)\dots(m-r-1)}{1.2.3\dots r} C_r - \frac{m(m-1)\dots(m-r)}{1.2.3\dots(r+1)} \frac{r}{1} C_{r+1} \\ - \frac{m(m-1)\dots(m-r-1)}{1.2.3\dots(r+2)} \frac{r(r+1)}{1.2} C_{r+2} + \dots \\ \pm \frac{r(r-1)\dots(m-1)}{1.2.3\dots(m-r)} C_m.$$

Les valeurs de A_r et de B_r ainsi développées sont, du reste, identiques à celles que l'on obtiendrait en remplaçant dans les formules de la Note de M. Jordan les valeurs $C_r, C_{r+1}, C_{r+2}, \dots$ par $\frac{m(m-1)\dots(m-r-1)}{1.2.3\dots r} C_r, \dots$ qui leur doivent être substituées en vertu de la rectification qui fait l'objet principal de notre observation. Il y a lieu de signaler toutefois une erreur d'écriture dans le dernier terme du développement de B_r (bas de la page 256), qui contient un facteur de trop aux deux membres de la fraction et qui, pour se conformer à la loi de formation des termes, devrait être

$$\pm \frac{r(r+1)\dots(m-1)}{1.2.3\dots(m-r)}$$

au lieu de

$$\pm \frac{r(r+1)\dots m}{1.2\dots(m-r)}$$

que porte le *Bulletin*.

Les formules de M. Jordan sont donc algébriquement exactes en faisant disparaître les symboles tels que C et les remplaçant

par les valeurs qu'en donne l'auteur quelques lignes plus haut, et dont l'inexactitude met les dernières expressions développées en désaccord avec les définitions données, et d'ailleurs seules commodes, des symboles A, B, C.

N. B. — N'ayant point la faculté de lire les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, nous n'avons pu connaître la marche suivie par M. Jordan pour arriver aux expressions développées de B et A. Il semble, d'après les termes de l'article précité, que, dans le travail auquel se reporte l'auteur, la détermination de B ait dû précéder celle de A. Comme on l'a vu, nous obtenons, sans calculs en quelque sorte et sans le moindre effort de raisonnement, le développement de A par ses relations directes avec C et celui de B au moyen de A. Ayant cherché à obtenir une relation directe entre C et B, nous avons immédiatement abandonné cette marche pour celle qui a été exposée ci-dessus, la première nous paraissant se présenter dans des conditions de raisonnement beaucoup moins simples et de calcul plus compliquées.

Note sur un problème de probabilité; par M. LAQUIÈRE.

(Séance du 20 février 1880.)

Le problème de probabilité traité par M. Jordan dans le *Bulletin* (t. I, p. 257) peut se résoudre sans calculs ainsi qu'il suit :

PROBLÈME. — *La probabilité que le centre O d'une courbe fermée tombe dans l'intérieur du triangle rectiligne ABC, dont les trois sommets sont pris au hasard dans l'intérieur de la surface limitée par la courbe, est égale à $\frac{1}{4}$.*

Soient une position quelconque du diamètre AO et une position mobile du rayon OB, qui devra, pour comprendre tous les cas, varier depuis OA jusqu'à son prolongement, une première fois en tournant dans le sens positif, une seconde fois dans le sens négatif. Soit $z = \frac{s}{a}$ le rapport de la surface du secteur AOB à l'aire totale de la courbe; la probabilité élémentaire correspondant à la

position supposée du rayon OB sera zdz , dz étant évidemment la probabilité que le point B se trouve sur OB. La probabilité totale sera donc, indépendamment de la position du point A :

$$P = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} z dz = \frac{1}{4}.$$

Cette probabilité, commune à toutes les positions, indifférentes d'ailleurs, du point A, est, par suite, la probabilité cherchée.

Note sur une classe d'équations différentielles; par M. HAAG.

(Séance du 20 février 1880.)

Soit l'équation différentielle

$$(1) \left(\frac{d^m y}{dx^m} \right)^2 + A \left(\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} \right)^2 + \dots + L \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 + M \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + N y^2 + P = 0,$$

où A, B, . . . , L, M, N, P sont des constantes.

Posons

$$y = \lambda \sin(\alpha x + C),$$

λ , α , C étant trois constantes; nous en déduirons

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \lambda^2 \alpha^2 \cos^2(\alpha x + C),$$

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 = \lambda^2 \alpha^4 \sin^2(\alpha x + C).$$

et, par conséquent,

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \lambda^2 \alpha^2 [1 - \sin^2(\alpha x + C)] = \alpha^2 (\lambda^2 - y^2)$$

et

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 = \alpha^4 y^2.$$

On voit aisément qu'on trouvera, en général,

$$\left(\frac{d^{2p} y}{dx^{2p}} \right)^2 = \alpha^{4p} y^2$$

et

$$\left(\frac{d^{2p+1}y}{dx^{2p+1}}\right)^2 = \alpha^{(2p+2)}(\lambda^2 - y^2).$$

Substituant dans l'équation proposée, et groupant ensemble les termes qui renferment y^2 et ceux qui en sont indépendants, on trouve (supposons, par exemple, m pair)

$$(2) \quad \begin{cases} [\alpha^{2m} - A\alpha^{2(m-1)} + \dots + L\alpha^4 - M\alpha^2 + N]y^2 \\ + [A\alpha^{2(m-1)}\lambda^2 + \dots + M\alpha^2\lambda^2 + P] = 0, \end{cases}$$

et l'équation sera satisfaite si l'on a simultanément

$$(3) \quad \alpha^{2m} - A\alpha^{2(m-1)} + \dots + L\alpha^4 - M\alpha^2 + N = 0,$$

$$(4) \quad A\alpha^{2(m-1)}\lambda^2 + \dots + M\alpha^2\lambda^2 + P = 0.$$

L'équation (3), qui est du degré m en α^2 , donnera m valeurs de α^2 . L'équation (4), où l'on portera l'une quelconque de ces valeurs de α^2 , donnera alors

$$(5) \quad \lambda^2 = \frac{-P}{A\alpha^{2(m-1)} + \dots + M\alpha^2},$$

et, si l'on adopte pour α et λ des valeurs satisfaisant aux relations (3) et (4),

$$y = \lambda \sin(\alpha x + C)$$

sera une solution de l'équation différentielle proposée et renfermera une constante arbitraire C .

On trouvera ainsi $2m$ solutions de l'équation (1) (car les combinaisons obtenues en changeant simultanément les signes de α et de λ ne donnent pas de solutions distinctes) (1).

(1) Il est facile de reconnaître d'ailleurs que l'analyse précédente s'applique à toute équation de la forme

$$\sum A \left(\frac{d^m y}{dx^m}\right) \left(\frac{d^n y}{dx^n}\right) + P = 0,$$

où m et n peuvent être égaux, pourvu que dans chaque terme la somme $m + n$ soit paire.

*Solutions régulières du problème d'Euler sur la marche
du cavalier; par M. LAQUIÈRE.*

(Séance du 20 février 1880.)

J'appelle *pas* sur l'échiquier orienté la longueur d'une case dans le sens horizontal ou dans le sens vertical; cette dernière pourrait être également nommée *degré*, pour la distinguer de la première, qui conserverait le nom générique de *pas*. Le pas horizontal sera positif s'il est dirigé de gauche à droite, négatif de droite à gauche; le pas vertical, ou degré, sera positif de bas en haut, négatif de haut en bas. Un circuit polygonal sera parcouru dans le sens positif ou le sens négatif suivant que la normale aux côtés successifs tournera dans le sens des aiguilles d'une montre ou en sens inverse, le centre de rotation étant le point de croisement avec la normale au côté précédent. La marche du mobile sera dite positive ou négative selon le sens de description.

Un saut du cavalier, aux échecs, est la résultante de deux pas faits dans le même sens sur une direction horizontale ou verticale et d'un seul pas fait dans la direction perpendiculaire. Les signes de ces pas sont à volonté positifs ou négatifs, en observant toutefois que les deux de même direction ont l'un et l'autre le même signe, pour ne pas s'annuler.

Les diverses combinaisons de ces pas et de leurs signes produisent huit orientations différentes ou huit sauts du cavalier de directions déterminées, que nous désignerons par les indices 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, rappelant l'ordre dans lequel s'y place un rayon tournant autour de la case origine comme centre, orienté au départ sur l'horizontale et vers la gauche, et tournant dans le sens positif des aiguilles d'une montre. On remarquera que les directions dont les indices diffèrent de quatre unités sont parallèles, mais de sens opposés. On les dénommera *directions inverses* ou *contraires*. Les indices 5, 6, 7, 8 pourront avantageusement être remplacés par ceux plus expressifs de — 1, — 2, — 3 et — 4, qui rappellent cette corrélation.

Observons en outre que les orientations dont les indices diffèrent de deux unités sont perpendiculaires l'une à l'autre, par

suite de la substitution réciproque de leurs deux éléments, vertical et horizontal, qui s'échangent en conservant leur longueur.

Les inclinaisons sur les axes des deux orientations comprises dans le même quadrant sont réciproques; ces deux orientations sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle parallèle à l'une des diagonales de l'échiquier. Les inclinaisons des orientations successives 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 sont ainsi égales à $\frac{1}{2}$, 2, $-\frac{1}{2}$, -2 avec pas dans le sens positif, puis à la même série avec pas dans le sens négatif.

D'après les principes de la Géométrie des quinconces, les inclinaisons des divers sauts du cavalier les uns sur les autres sont commensurables.

Nous avons déjà remarqué que ceux dont les indices orientateurs diffèrent de deux unités sont perpendiculaires, et de trois unités sont parallèles et de sens contraires. L'inclinaison de deux sauts voisins dans le même angle coordonné est de

$$\text{tang} \left(2 \arctang \frac{1}{3} \right) = \frac{3}{4},$$

chacun d'eux étant incliné de $\frac{1}{3}$ sur la bissectrice. L'inclinaison de deux sauts voisins dans des angles adjacents, ayant leur bissectrice parallèle à cet axe, est de

$$\frac{4}{3} = \text{tang} \left(2 \arctang \frac{1}{2} \right),$$

complémentaire de la précédente, ce qui résulte de la perpendicularité des sauts dont les indices diffèrent de deux unités.

Marches rentrantes.

On donne le nom de *marche rentrante* du cavalier sur l'échiquier à une série de sauts consécutifs, exécutés entre des cases comprises dans les limites de l'échiquier fini, que nous prendrons carré et de huit pas de côté, selon la coutume, de telle sorte que la pièce partie d'une case revienne par un dernier saut de sa dernière station à la première sans s'être reposée deux fois sur une

même case. La ligne polygonale réunissant les centres des cases successivement visitées est la trace de la marche ; elle n'admet pas de points doubles en ses sommets et se ferme si la marche est rentrante ; elle offre dès lors l'avantage de pouvoir être parcourue d'une course continue, dans l'un et l'autre sens, en partant de l'une quelconque des cases de station.

Le problème connu dans le monde des échecs sous le nom de *problème d'Euler* consiste à fournir une marche rentrante comprenant soixante-quatre sauts sur les soixante-quatre cases dont se compose l'échiquier pratique. Disons en passant que le célèbre géomètre n'a nullement résolu la question théorique, dont Vandermonde a le premier donné un rudiment de solution dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* de 1771, si nos souvenirs ne sont pas en défaut.

Euler avait simplement trouvé une marche particulière, d'ailleurs disgracieuse, dépourvue de symétrie et se prêtant peu à des remarques utiles. Vandermonde, au contraire, avait établi un mode de recherches devant amener fatalement celui qui en suivra les règles à tomber sur une solution du problème, si toutefois il en existe réellement, restriction que l'auteur omet de signaler. La démonstration théorique et *a priori* de l'existence d'une solution, que personne à notre connaissance n'a encore tentée, serait des plus intéressantes, bien que l'obtention empirique de marches connues permette de ne pas la considérer comme tout à fait indispensable.

Nos premières recherches personnelles sur le problème d'Euler datent de 1861, époque à laquelle, de concert avec M. Siméon, alors notre camarade à l'École de Metz, nous avons été conduit à adopter une méthode de recherche comprenant en quelque sorte celle de Vandermonde (qui nous était du reste inconnue), mais en différant par certains détails des plus utiles pour abréger considérablement le travail empirique de la recherche d'une marche. Nous n'entrerons pas ici dans l'explication de ces premiers essais, que nous avons laissés de côté après avoir constaté l'existence de marches régulières, et dont le résultat ne contenait encore qu'en germe la méthode moins imparfaite et déjà rationnelle que nous nous proposons d'exposer ici.

Marches rentrantes partielles.

En dehors des marches rentrantes complètes, solutions particulières du problème, englobant dans une même série toutes les cases de l'échiquier comme stations successives de soixante-quatre sauts ramenant la pièce à son point de départ, nous considérerons les marches rentrantes partielles où le cavalier revient à son point de départ au bout d'un nombre moindre de sauts, soumis à la même restriction, faite une fois pour toutes, de ne jamais se reposer deux fois sur la même case. Il est à observer que, le cavalier changeant alternativement de couleur sur l'échiquier marqueté suivant la mosaïque ordinaire des carreaux alternés de blanc et de noir, les marches rentrantes partielles, dont l'existence évidente n'est pas à démontrer, se composent toujours d'un nombre pair de cases et de même d'un nombre pair de sauts ou côtés, en y comprenant celui de fermeture, ramenant au point de départ. Ce dernier sera remplacé par un côté de soudure lorsqu'on voudra réunir deux marches rentrantes en une seule, et le nombre des côtés ne changera pas.

Les marches rentrantes partielles se créent d'elles-mêmes par les sauts successifs d'un cavalier abandonné au pur caprice de la main qui le supporte et qui viendra se poser à un moment donné sur une case déjà visitée; la portion de sa course comprise entre les deux passages constitue une marche rentrante.

Ces marches peuvent être des plus irrégulières, quant à la forme du polygone où les sauts seraient représentés par la droite unissant les centres des deux cases du levé et du posé. D'autres, au contraire, peuvent présenter une certaine régularité; elles offrent alors un intérêt réel, aussi bien pour parvenir par leurs combinaisons entre elles à la constitution de marches rentrantes complètes, faciles, simples et régulières, qu'à faciliter le classement de ces dernières.

Il peut y avoir des marches rentrantes de 2, 4, 6, . . . , $2n$ cases ou sauts ($n \geq 32$).

Les marches rentrantes de deux sauts, soit l'aller d'une case à l'une quelconque des huit, constituant la rosace du cavalier, qui sont les extrémités des rayons issus de la case origine sous les huit orientations possibles (mais dont un certain nombre peuvent dis-

paraître, six au maximum, en raison des limites de l'échiquier), suivi du retour de la seconde à la première, ne sont point à considérer.

Autrement en est-il de celles de quatre cases, qui sont en quelque sorte la clef des solutions du problème qui nous occupe, et qui formeront les éléments des marches plus étendues présentant la plus complète régularité.

I. Observons dès le principe que, si l'on décompose un polygone fermé dessinant une marche rentrante en deux portions, les résultantes des deux portions (définies comme en Géométrie pour les contours) seront égales et de sens contraires, puisqu'elles ferment les deux polygones en les prenant en sens inverses pour conserver le sens de parcours continu des deux portions.

Réciproquement, deux marches ayant leurs résultantes de fermeture égales et de sens opposés entre deux cases identiques peuvent être réunies en une marche rentrante, à condition de n'avoir aucune case de station commune.

En conséquence, si une marche peut être divisée en deux portions composées de sauts réciproquement parallèles deux à deux et de sens inverses dans l'une et l'autre portion, quel que soit d'ailleurs l'ordre dans lequel se succèdent dans chaque portion les éléments correspondant aux éléments successifs de l'autre, la marche totale sera rentrante. *A fortiori*, toute marche dont les deux moitiés sont symétriques l'une de l'autre par rapport à un point central sera rentrante sur elle-même, car elle satisfait à la condition précédente, les éléments parallèles et opposés se succédant de plus dans le même ordre.

II. Une série de cases parcourues suivant une marche rentrante permet de prendre pour point de départ l'une quelconque d'entre elles et de parcourir à partir de cette origine choisie tout le polygone suivant deux marches rentrantes de sens inverses, que nous désignerons sous les dénominations de *sens positif*, ou *dextrorsum*, et *négatif*, ou *sinistrorsum*, suivant le sens général de rotation de la normale, celui suivant lequel, en cas d'inflexions diverses, la rotation totale excède de 360° la rotation en sens opposé.

III. Soient deux marches rentrantes l'une et l'autre sur elles-

mêmes, cheminant côte à côte ou s'enchevêtrant sur l'échiquier, mais sans avoir une seule case de station commune; considérons deux cases à distance de saut de cavalier prises sur l'une et l'autre marche, et coupons les deux marches suivant ces deux cases; puis réunissons-les en une seule, le saut d'une coupure à l'autre servant de trait d'union. L'accolement des deux marches, suivant qu'on les considérera comme parcourues individuellement dans le sens positif ou dans le sens négatif, donnera quatre marches ayant pour cases de départ et d'arrivée les quatre combinaisons de cases voisines, dans l'une et l'autre marche, de la case de rupture.

IV. Deux marches rentrantes dans de telles conditions ayant été soudées l'une à l'autre par les cases de rupture A et X, si deux des cases a et x , réciproquement adjacentes à la case de rupture de la marche dont elles font partie, sont à distance de saut de cavalier l'une de l'autre, celle des quatre marches qui les prend pour extrêmes est rentrante. Des trois autres l'une peut encore être rentrante, celle des deux autres cases prises pour extrêmes, ou bien les trois marches restent à point d'arrêt.

V. L'accolement de deux marches en une seule suivant deux cases de rupture et soudure à distance de saut de cavalier supprime ainsi, dans l'une et dans l'autre, l'un à volonté des éléments adjacents aux cases de soudure et les unissant aux cases extrêmes de la marche résultante. Ces suppressions, faites suivant les quatre combinaisons admissibles, constituent quatre circuits différents pouvant être parcourus l'un et l'autre dans deux sens. Si dans l'une de ces combinaisons arbitraires les éléments sont parallèles et de même sens, à partir de la case de soudure, la marche complète qui en résultera sera rentrante, d'après une remarque antérieure, comme composée de deux polygones à résultantes parallèles et de sens opposés, puisque les cases de rupture doivent être considérées dans l'un des deux polygones à accoler comme case d'arrivée et dans l'autre comme case de départ.

Ainsi deux marches rentrantes sur elle-même l'une et l'autre pourront être réunies l'une à l'autre pour former une marche rentrante également si l'on peut trouver deux cases de l'une et de l'autre en communication par saut de cavalier et telles que l'élé-

ment de marche adjacent soit de direction et de sens identiques dans l'un et l'autre circuit.

Cette remarque fort utile est d'ailleurs évidente, puisque les deux éléments supprimés, le côté de soudure des deux marches et le saut de fermeture, ou seconde soudure, dans le cas où la marche totale sera rentrante, étant tous les quatre de même longueur, forment un losange dont les cases de rupture occupent un côté. Ce losange, marche rentrante de quatre sauts du cavalier, peut être carré ou avoir ses deux côtés adjacents inclinés à $\frac{1}{3}$.

V. En conséquence de ces principes généraux, nous allons étudier la formation de marches rentrantes à éléments symétriques et réguliers, d'abord simples et formées des plus petits nombres de sauts, puis en nombre de sauts croissant par l'accolement de marches formées au préalable dans les conditions voulues pour que la marche résultante soit rentrante sur elle-même. Les marches rentrantes partielles qui se présenteront d'elles-mêmes sont celles de quatre sauts, de seize sauts composées de quatre marches de quatre sauts, et celles de soixante-quatre sauts formées de l'accolement de quatre marches de seize sauts.

Des combinaisons diverses de fragments réguliers de ces diverses marches partielles permettront de faire décrire au cavalier des figures symétriques aussi élégantes que variées, sans la moindre difficulté, en se posant des conditions particulières. Ajoutons que, ayant essayé de nous affranchir de l'emploi de ces marches pour la formation en tâtonnant de marches complètes, nous y avons toujours été ramené malgré nous, ce qui nous confirme dans l'opinion qu'elles représentent la clef véritable de la solution générale du problème. Mais nous ferons précéder cette partie essentielle de notre étude de quelques réflexions importantes sur la division logique de l'échiquier la plus propre à nous servir de guide dans une voie encore inexplorée.

Division de l'échiquier en quatre quartiers; leur corrélation (1).

Nous considérerons l'échiquier vulgaire comme divisé en quatre quartiers par les médianes des côtés opposés. Chacun de ces quartiers, que nous numérotions I, II, III, IV en partant du supérieur gauche et suivant le sens de rotation positive, est formé d'un carré de quatre cases de côté; pris à part, les quatre quartiers sont tous identiques les uns aux autres; accolés pour former l'échiquier, ils se distinguent par leur orientation ou la couleur de la case angulaire libre. Au point de vue de leur composition en cases blanches et noires, ou paires et impaires, d'après le numéro d'ordre de station dans une marche rentrante de soixante-quatre sauts, ces quartiers peuvent être mis en corrélation de diverses manières distinctes, eu égard aux diverses symétries de la mosaïque échiquéenne, dont les médianes sont axes de symétrie quant à la forme, et les diagonales de l'échiquier axes au double point de vue des formes et des couleurs, ou parité du numéro des cases. Nous remarquerons les corrélations suivantes :

1° Par coulisses, ou glissement parallèle d'un quartier sur son corrélatif; les coulisses sont formées pour deux quartiers adjacents par leurs deux côtés en ligne droite, côté et médiane parallèles de l'échiquier total; pour deux quartiers opposés par le sommet par les diagonales des deux autres quartiers, parallèles à la diagonale commune aux deux quartiers comparés l'un à l'autre;

2° Par symétrie par rapport à l'une des médianes pour deux quartiers adjacents seulement;

3° Par symétrie par rapport à un point central pour deux quartiers quelconques, comme pour les coulisses; le centre de symétrie sera le centre même de l'échiquier pour deux quartiers opposés, le milieu du côté de contact pour deux adjacents, c'est-à-dire toujours le milieu de la limite commune.

Observons, ce qui nous sera extrêmement précieux dans la suite, que les cases se correspondant l'une à l'autre dans deux quartiers

(1) Nous ne donnons pas avec le texte un certain nombre de figures que le lecteur peut établir sans difficulté; il fera toutefois bien de les construire à part dans le but de rendre la lecture plus facile et plus claire.

en corrélation par coulisses ou par centre sont toujours de même parité, et que les cases correspondantes par symétrie axile des médianes sont de parités ou couleurs contraires. De plus, dans la symétrie par coulisses seule, les cases correspondantes sont toujours à distance de deux sauts de cavalier, c'est-à-dire forment les extrémités non communes de deux éléments consécutifs dans une même marche.

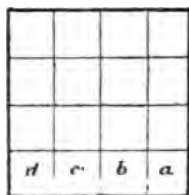
Marches rentrantes élémentaires dans un même quartier

(de quatre sauts).

Nous avons vu que les marches rentrantes de deux sauts exécutés successivement dans les deux sens sur le même élément sont sans intérêt; nous passerons donc de suite à l'étude des marches d'ordre immédiatement supérieur, c'est-à-dire de quatre sauts, que nous prendrons comme marches élémentaires.

Lorsque les deux cases en diagonale ne sont point situées sur une même parallèle aux côtés de l'échiquier, les quatre cases de la marche sont comprises dans l'intérieur d'une surface égale à l'un des quartiers; nous les étudierons donc dans ces derniers.

Fig. 1.



En vertu de la symétrie géométrique du quartier isolé, relativement à ses quatre côtés, et de la possibilité de commencer une marche rentrante en l'une quelconque de ses cases, nous pouvons choisir sur le carré de seize cases qui figure un quartier l'une des quatre cases *a*, *b*, *c*, *d*, situées sur un même côté, comme point de départ ou origine de la marche. On voit alors immédiatement que chacune de ces cases définit une marche rentrante distincte composée de quatre cases : les deux cases angulaires du quartier

servant de base à un circuit en losange à côtés inclinés au $\frac{1}{3}$, dont la case origine occupe l'extrémité de la grande diagonale commune avec le quartier et parallèle à l'une de celles de l'échiquier ; les deux cases intermédiaires *b* et *c* déterminant des marches en carré dont les côtés sont parallèles aux deux orientations 1 et 3, ou 2 et 4 de même parité, inclinées de $\frac{1}{2}$ ou 2 sur l'un ou l'autre axe. Chacun de ces quatre circuits, en lesquels se groupent les seize cases du quartier d'une manière parfaitement distincte et sans arbitraire, peut être parcouru d'ailleurs dans le sens positif ou dans le sens négatif.

Marches partielles rentrantes régulières en voltes (de seize sauts).

Supposons l'une de ces marches élémentaires tracée à la fois sur les quatre quartiers, que l'on orientera de la même manière en les replaçant sur l'échiquier ; elles se correspondront par coulisses dans les quartiers adjacents deux à deux et peuvent dès lors se souder en une seule marche par la suppression d'un côté à chacune d'elles, la case d'entrée dans les marches élémentaires successives étant indifférente, puisque la marche est rentrante.

On remarquera que, pour souder les marches élémentaires d'un quartier à l'autre, il est nécessaire de suivre ceux-ci dans un ordre de rotation continu, c'est-à-dire de ne souder que des quartiers adjacents deux à deux ; or, ce sont précisément ceux qui se correspondent par coulisses de même que les marches tracées sur chacun d'eux.

Le côté de jonction entre deux marches élémentaires successives étant à cheval sur le côté commun aux deux quartiers adjacents, la case d'entrée dans ce second quartier sera située sur le côté de la marche le plus rapproché du côté commun aux deux quartiers. Cela posé, si la marche se continue dans le sens qui vient d'être observé pour le passage du quartier précédent à celui où est décrite la marche, le troisième côté décrit sera l'un des deux voisins du quartier suivant et permettra, par la suppression du quatrième côté, de souder la marche au circuit dessiné dans le quartier suivant ; dans le cas où l'on voudrait poursuivre la marche dans le sens opposé, la quatrième case se trouverait l'une des deux éloi-

gnées du quartier suivant et le passage à la marche élémentaire suivante deviendrait impossible.

On voit donc que, si l'on décrit dans un premier quartier la marche élémentaire dessinée de manière à la souder à la marche du quartier suivant dans le sens de la rotation, le sens de la marche sera fixé par l'ordre dans lequel on veut visiter les divers quartiers, qu'à son tour il fixe le choix de celle des deux lignes de soudure possibles entre les deux circuits des quartiers voisins, mais dont une seule permet de réunir le circuit intermédiaire à ses deux adjacents dans un parcours continu.

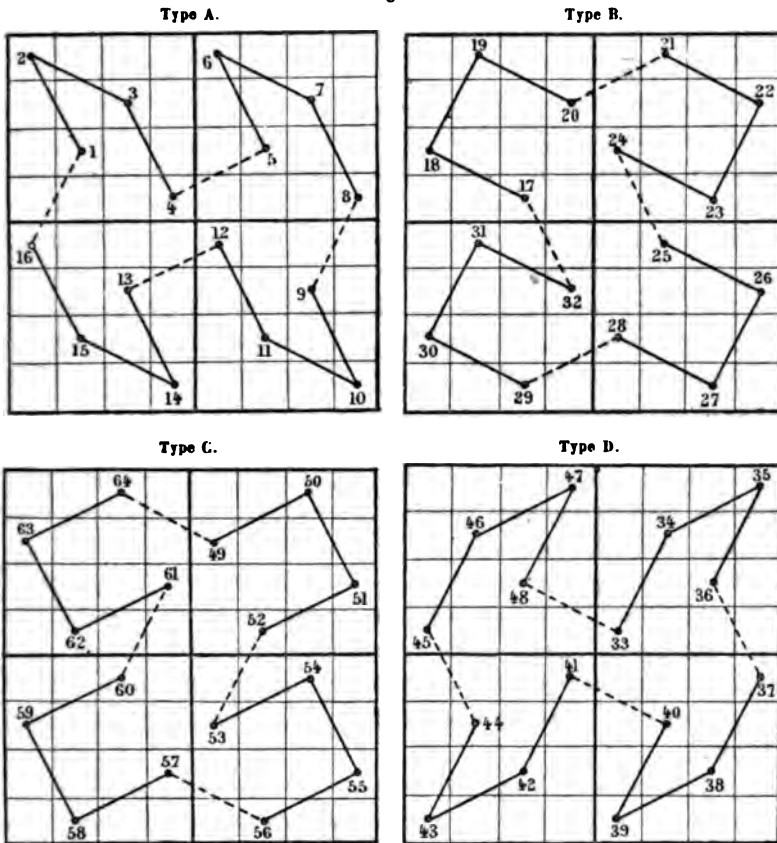
La case d'entrée dans un quartier et le sens de visite des quartiers, le même que le sens général de rotation dans la marche, déterminent ainsi la case de sortie de ce quartier et par elle la case d'entrée dans le suivant. Celle-ci, de même couleur ou parité que la case initiale du premier, lui correspondra soit par parallélisme ou coulisses, soit par symétrie centrale par rapport au milieu du côté mitoyen aux deux quartiers ; dans l'un et dans l'autre cas, la marche décrite par symétrie devra se produire dans le même sens que précédemment.

Quel que soit le côté supprimé à la marche élémentaire dans le premier quartier pour la souder à celle du second, il sera parallèle à celui qui resterait à parcourir pour fermer cette dernière, et qui sera supprimé à son tour pour effectuer la soudure entre les marches élémentaires du second et du troisième quartier ; le sens en sera le même si la corrélation des marches a été faite par coulisses, et inverse si elle a été obtenue au contraire par symétrie centrale.

On s'assurera aisément, par la construction des quatre diagrammes correspondant aux quatre marches résultant respectivement de la réunion en une seule des marches similaires dans les quatre quartiers, et pour les quatre types *a, b, c, d* voir *fig. 2*, types *A, B, C, D*, que, sur les quatre corrélations obtenues, deux sont centrales et deux par coulisses, alternativement, quel que soit celui des quatre types considérés. La marche est donc rentrante, puisque les côtés supprimés se compensent d'une part et qu'il en est de même des côtés ajoutés d'autre part. Les deux moitiés d'une même marche sont, en outre, symétriques par rapport au centre de l'échiquier.

Dans ces diagrammes, les marches sont indiquées par les numéros d'ordre successifs des cases parcourues.

Fig. 2.



Premier type, A ; voltes en losange :

Cases 1, 2, 3, ..., 15, 16, 1.

Deuxième type, B ; voltes en carré :

Cases 17, 18, 19, ..., 31, 32, 17.

Troisième type, C ; voltes en carré :

Cases 49, 50, 51, ..., 54, 49.

Quatrième type, D ; voltes en losange :

Cases 33, 34, . . . , 48, 33.

Ces numéros serviront dorénavant à désigner les cases qu'ils occupent toutes les fois qu'une convention particulière n'aura pas été faite au préalable.

On vérifie sur la composition des diagrammes les points sur lesquels nous avons appelé l'attention, et l'on constate que les quatre marches sont non seulement rentrantes sur elles-mêmes, mais encore que l'on peut accoler deux à deux les marches élémentaires pareilles de deux quartiers consécutifs quelconques, en une marche rentrante de seize cases.

On remarquera en outre que les marches A et D sont symétriques par rapport aux médianes, à condition de parcourir l'une d'elles en sens inverse de l'autre. Il en est de même des marches B et C.

Nous avons ainsi, avec la plus grande facilité, groupé les soixante-quatre cases de l'échiquier en quatre séries de seize cases pouvant être parcourues chacune suivant une marche rentrante d'une parfaite régularité.

Chacune de ces marches se compose d'une succession de quatre voltes décrites successivement dans les quatre quartiers de l'échiquier sur quatre figures quadrilatères identiques et identiquement placées dans leurs quartiers respectifs, parcourues parallèlement par groupes de deux voisines et symétriquement d'un groupe à l'autre.

Les figures dessinées par ces voltes sont des losanges dans deux de ces séries ou types de marche, des carrés dans les deux autres, les grandes diagonales des losanges étant l'une des diagonales du quartier qui les renferme et les carrés étant inscrits dans le pourtour du quartier.

Le sens dans lequel sont visités les quartiers est toujours le même que celui dans lequel sont décrites les voltes, c'est-à-dire l'un et l'autre à la fois *dextrorsum* ou *sinistrorsum*.

Les diagrammes ci-dessus (*fig. 2*) représentent les quatre marches types *dextrorsum* distinctes. Les numéros inscrits sur les cases sont indicateurs des époques de passage du cavalier sur ces cases dans la marche rentrante complète *dextrorsum* de soixante-



quatre sauts la plus régulière que nous verrons tout à l'heure pouvoir être obtenue par la liaison des quatre marches partielles types de seize cases qui viennent d'être trouvées, en les faisant succéder dans l'ordre ABDC que nous verrons en même temps devoir être observé si l'on désire éviter un changement de sens dans le parcours d'une partie du circuit.

En considérant les marches symétriques par rapport à une médiane de l'échiquier des quatre types *dextrorsum* précédentes, on obtiendra quatre types de marches à la fois *sinistrorsum* comme sens de description des voltes et de visite des quartiers, similitude de sens que nous savons être exigée pour la possibilité du passage continu d'un quartier à l'autre, passage qui se fait nécessairement entre deux éléments rapprochés de la limite mitoyenne, et par conséquent qui fait suite à un élément se dirigeant vers celui-ci.

Or une telle symétrie, revenant à une rotation de l'échiquier autour de la médiane, à condition qu'on lise la marche par transparence sur la face opposée, peut être considérée comme une intervention réciproque des diagonales. Si l'on ne considère dès lors que la figure géométrique du circuit, sans se préoccuper du sens de la description, ni de la case de départ, on voit que les voltes losanges sont simplement interéchangées, ainsi que les voltes en carré. Mais, tout circuit rentrant pouvant évidemment être parcouru dans les deux sens opposés, le nouveau, en le décrivant d'un sens continu contraire, c'est-à-dire à la fois *dextrorsum* pour la description des voltes et la visite des quartiers, donnera également une marche rentrante de soixante-quatre cases. Est-elle différente essentiellement de la précédente ?

Les deux marches A et D, de même que les deux marches B et C, sont symétriques l'une de l'autre, non seulement comme figures géométriques, mais encore comme sens de la marche, dans leur ensemble de marches rentrantes sur elles-mêmes, si dans chaque système l'une des deux marches est décrite dans le sens positif, l'autre dans le sens négatif.

Les marches *dextrorsum* rentrantes sur elles-mêmes de seize cases, obtenues par le sens positif de marche sur le circuit symétrique des marches types A, B, C, D, sont donc mécaniquement semblables aux marches primitives D, C, B, A. Au point de vue de la description sur l'échiquier, on observera que les couleurs sont in-

terverties dans la correspondance de symétrie par les axes, et, comme dans une marche continue formée de voltes successives, la case d'entrée dans une volte est de même couleur pour toutes et de couleur opposée à la couleur commune à toutes les cases de sortie des mêmes voltes, les cases d'entrée dans les voltes de A seront les symétriques des cases de sortie des voltes symétriques de celles de D, et réciproquement, lorsque les marches partielles de seize cases A et D feront partie d'une même marche totale de soixante-quatre cases, et qu'il en sera de même entre les marches B et C.

La marche symétrique d'une marche donnée, comme circuit et sens (image de cette marche sur un miroir normal à l'échiquier et tracé suivant la médiane), admettra comme cases d'entrée et de sortie réciproquement les images des cases de sortie et d'entrée dans la volte qui lui donne naissance par symétrie, dans le cas où l'on voudra retourner le sens de la nouvelle marche, et, comme les couleurs de ces cases ont été interverties par la symétrie, et que de plus le changement de sens intervertit à leur tour ces cases dans un quartier déterminé, il en résulte que la couleur d'entrée dans les cases, et la couleur de sortie des nouvelles marches obtenues sont les opposées à celles des premières marches et que la soudure entre les différentes marches élémentaires de quatre sauts se fera par l'autre combinaison de cases en communication ; ainsi, pour la marche A par 3-6, 5-12, 11-14 et 13-4, et de même pour les trois autres. Les nouvelles marches sont donc différentes des premières au point de vue de l'échiquier en mosaïque colorée.

Il n'en est plus essentiellement de même si l'on ne considère que la forme géométrique des circuits et leur sens de description, sans se préoccuper de la couleur de la dalle sur laquelle se fait le posé. On observe en effet que, si l'on superpose deux échiquiers tels que les cases se recouvrant soient de couleurs inverses dans l'un et dans l'autre, le premier système de marches sera décrit sur l'un d'eux par le cavalier qui décrit en même temps le second système sur le second échiquier, sa trace supposée traversant le dallage supérieur pour s'imprimer à la fois sur les deux.

Or, si l'on fait pivoter l'un des deux échiquiers autour du centre commun d'un quart de circonférence en supposant qu'il entraîne avec lui les traces laissées par la pièce avec les numéros des cases

visitées, les deux diagonales de même couleur, tout à l'heure à angle droit dans l'un et dans l'autre, viendront se superposer, et, les deux échiquiers devenant identiques, on voit que le cavalier décrivant la seconde marche n'a pour décrire la première qu'à débiter dans le quartier suivant et à la case qui est vue du centre à angle droit de la case initiale de la marche qu'il décrivait d'abord, et à même distance, puis à décrire à partir de ce point de départ des figures identiques aux premières et qui seront, vues du centre, à angle droit sur elles.

Dans ce mouvement, les marches élémentaires de quatre cases en losange s'intervertissent, A avec D, et de même les marches élémentaires B et C en carré comme orientation, mais en conservant leur coloration individuelle contraire à celle du système de cases sur lesquelles elles viennent se placer.

Si donc nous considérons une des marches rentrantes types primitives, A par exemple, qu'on forme sa symétrique par rapport à la médiane, qui n'est autre que la marche de nature semblable D parcourue en sens inverse, et qu'on en retourne le sens de description après avoir changé la case de départ d'un angle droit, c'est-à-dire de quatre unités dans son numéro d'ordre (en vertu de la symétrie centrale de la marche sur elle-même, il est indifférent de faire ce changement dans le sens positif ou dans le sens négatif), on obtiendra exactement la marche rentrante A, qui serait décrite en réunissant les quatre marches élémentaires α par la seconde combinaison de lignes de soudure, la première ayant donné la marche en voltes A.

On obtiendrait de même au moyen des marches B, C, D, par symétrie et retournement, les marches B₁, C₁, D₁, qui ne sont autres que C, B, D tournées d'un angle droit ou décrites sur l'échiquier à couleurs inversées.

Une autre rotation d'un angle droit rétablirait le système primitif.

En résumé, il n'existe, au point de vue géométrique pur, qu'un groupe de quatre marches rentrantes de seize cases de quatre types déterminés; mais ces types, sur l'échiquier coloré, donnent chacun naissance à deux marches exactement pareilles, mais exécutées réciproquement sur les cases de couleurs contraires. Les diagrammes des marches A₁, B₁, C₁, D₁, que nous donnerons déve-

loppés plus bas, à propos de la formation des marches complètes de soixante-quatre cases, permettent de se rendre compte par la vue seule de ces vérités, que nous avons tenu à ne devoir qu'au raisonnement géométrique.

Ayant obtenu les marches naturelles en voltes semblables uniformément décrites dans les quatre régions de l'échiquier, symétriques entre elles et se partageant les soixante-quatre cases, il nous reste, pour résoudre le problème, à les souder entre elles de manière à ne former qu'une seule marche s'étendant à toutes les cases de l'échiquier. Cette liaison se fera aisément, comme pour les marches élémentaires, qui par leur réunion ont donné les marches partielles de seize cases; les marches partielles vont à leur tour se souder les unes aux autres dans toute leur intégrité, sans aucun fractionnement, pour donner les marches entières de soixante-quatre cases. Cherchons donc les modes de soudure qu'admettent entre elles les marches de types différents.

Quartiers dérivés. — Soudure des marches de divers types.

Nous avons déjà vu que les voltes de même type se sont soudées les unes aux autres d'un quartier au quartier adjacent, et ainsi de suite, pour donner les quatre types correspondants de marches partielles. Pour connaître la manière dont se souderont les voltes de noms différents, reportons-nous à la rosace formée par une station du cavalier et les huit cases sur lesquelles il peut passer d'un seul saut sur l'échiquier indéfini; ces huit cases d'arrivée sont réparties, sur un cercle concentrique au centre de la case de départ, en groupes de deux symétriques par rapport aux parallèles menées par celui-ci aux diagonales de l'échiquier, chaque groupe de deux étant dans un quadrant différent formé par les parallèles aux côtés de l'échiquier menées par la case de départ. Elles se répartissent également par deux sur les quatre bandes horizontales ou sur les quatre colonnes verticales, non médianes, du carré de cinq cases de côté ayant son centre en la case de départ. Sur l'échiquier limité, un certain nombre de ces cases d'arrivée peuvent disparaître suivant la position de la case de départ, et dès que celle-ci sort du quartier central de quatre cases de côté. Ainsi :

Si la case de départ est située sur la colonne touchant au côté

de l'échiquier, deux des colonnes contenant les cases d'arrivée disparaissent. Il ne reste donc plus que quatre de ces dernières.

Si elle est voisine de la colonne frontière, une colonne du carré de cinq cases disparaît, et avec elle deux cases d'arrivée.

Si elle est éloignée de la colonne frontière, mais sur la bande frontière, ou simplement voisine d'elle, il ne reste de même que quatre ou six cases d'arrivée.

Si la case de départ est en même temps rapprochée des deux limites de l'échiquier formant un angle, il disparaîtra la somme des cases qui ne se trouvent pas à la fois dans les deux groupes à retrancher. On aura ainsi :

1° Pour les cases angulaires, deux cases d'arrivée seulement ;

2° Pour les cases frontières voisines du coin, trois cases d'arrivée ;

3° Pour les autres cases frontières, ainsi que la case diagonale voisine du coin, quatre cases d'arrivée ;

4° Pour les cases tangentes extérieurement au quartier central, six cases d'arrivée ;

5° Enfin, pour les cases intérieures au quartier central, huit cases d'arrivée.

On sait déjà que, les marches de chaque type étant rentrantes, chaque case est nécessairement en communication avec deux de son système ; ces deux cases sont donc à retrancher du nombre total pour obtenir le maximum de cases de sortie d'un système dans un autre. Cherchons comment les marches peuvent se souder dans un même quartier.

Un simple coup d'œil suffit à s'assurer que, dans un même quartier, le passage d'une volte à une autre ne peut s'effectuer que simultanément à un changement dans la nature de la volte, c'est-à-dire avec alternance de carré et de losange ; il ne peut, du reste, s'effectuer que d'une case centrale à une case de pourtour et réciproquement, les voltes carrées inscrites dans le pourtour fournissant les communications possibles de pourtour à pourtour. Il en résulte immédiatement que les voltes en losange qui se terminent sur l'un des angles nécessitent une sortie immédiate du quartier qui ne leur offre aucun débouché pour continuer la marche. Les voltes en losange qui ont débuté par un angle aigu sur le pourtour et se terminent dès lors sur un angle obtus au

centre peuvent au contraire se poursuivre par les deux marches différentes en carré auxquelles les deux cases de pourtour en communication avec la case terminale serviront d'entrée ; ces deux cases, opposées par le sommet commun et symétriques l'une de l'autre par rapport à la parallèle à la diagonale menée par la case terminale du losange, appartiennent nécessairement aux deux marches carrées différentes, en raison même de leur contiguïté.

Notons en passant que les marches élémentaires, étant rentrantes, peuvent, si aucune condition particulière ne s'y oppose, quelle que soit la case d'entrée, être indifféremment poursuivies dans un sens ou dans l'autre, ce qui intervertit simplement le premier côté et la résultante des trois autres, et change la case d'arrivée avec son opposée diagonale dans la volte.

Les voltes carrées dont les cases frontières d'un côté et voisines de la frontière de l'autre n'ont que trois cases d'arrivée, et par suite une seule de marche différente, ne peuvent se continuer dans le même quartier que par une seule case d'entrée et suivant la marche en losange, qui dans le carré a la petite diagonale de la couleur commune aux cases d'entrée de toutes les voltes (mais dans les deux sens de parcours).

On voit donc que, suivant la couleur de la case de départ ou d'entrée dans les diverses voltes, les passages d'une volte en carré à une volte en losange dans le même quartier ne pourront se faire que sur la marche type en losange, qui comprend les cases angulaires de l'échiquier de couleur opposée à la case d'entrée.

Si nous formons un quartier dérivé par l'accolement des deux demi-quartiers contigus à une médiane de l'échiquier, cette médiane, côté mitoyen des deux quartiers primitifs, devient la médiane du quartier dérivé ; les cases angulaires des côtés des quartiers primitifs perpendiculaires au côté mitoyen deviennent les cases intermédiaires des mêmes côtés du quartier dérivé, et réciproquement.

Si le côté mitoyen est vertical, les cases appartenant aux mêmes marches restent unies en une marche rentrante de quatre cases, mais de nom différent ; les marches A, B, C, D deviennent réciproquement C, D, A, B en avançant de deux rangs. Si le côté mitoyen est horizontal, la permutation de marche se fait encore

avec changement de forme, mais de voisine à voisine, A, B, C, D devenant réciproquement B, A, D, C du quartier dérivé.

Si l'on forme le dérivé de deux quartiers de l'échiquier, ainsi que le dérivé des deux autres, on aura deux nouveaux quartiers accolés suivant la médiane en dehors de l'accolement précédent. En les dérivant par rapport à cette médiane, on obtient le quartier central de l'échiquier, et les cases appartenant aux diverses marches des quartiers primitifs se grouperont de manière à former les marches symétriques du quartier doublement dérivé, soit A et D permutant entre elles ainsi que B et C.

Les cases par lesquelles se soudent les marches dans deux quartiers voisins, distantes de deux pas l'une de l'autre dans le sens d'un des côtés et d'un seul dans l'autre, appartiennent l'une et l'autre au quartier dérivé des deux, et, par conséquent, les règles de passage d'une volte à l'autre avec changement de quartier se déduiront des règles de passage dans le même quartier, eu égard aux modifications de marche introduites par la dérivation. On constate ainsi que, dans le passage d'un quartier au suivant :

Les marches en losange se terminant à un angle aigu (couleur paire) ⁽¹⁾ se soudent dans le carré suivant, soit à l'angle obtus de la marche losange de même nom, soit à une seule marche en carré : celle qui, sur la médiane aussi bien que sur le pourtour de l'échiquier, lui est contiguë si le côté mitoyen traversé est vertical ; celle qui ne lui est pas contiguë si le côté mitoyen est au contraire horizontal.

Les marches en losange terminées sur un angle obtus (également couleur paire) se soudent dans le carré suivant à l'angle aigu de leur homonyme et de même à une seule marche en carré, celle de même qui, par les cases sur la médiane ou sur le pourtour de l'échiquier, lui est contiguë ou non, suivant que le côté mitoyen est vertical ou horizontal.

Enfin les marches en carré se soudent également à leurs homonymes de même orientation dans le carré voisin, et de plus à l'une et l'autre des marches en losange, à l'angle obtus de celle qui sur le pourtour lui est contiguë, à l'angle aigu de celle qui ne la touche

(¹) On suppose la marche débutant à l'une des cases d'entrée, et par suite les cases d'entrée toutes impaires, les cases de sortie toutes paires.

point sur les médianes ou le contour de l'échiquier si le côté mitoyen est vertical, aux angles contraires s'il est horizontal.

En règle générale, dans le même quartier comme d'un quartier à l'autre, une marche se soude à elle-même ; mais le changement de marche ne s'effectue que conjointement à un changement dans la nature losange ou carrée de la volte.

Lorsque l'on soude une marche à une autre, le sens de description de la seconde doit être observé de manière à ne pas rejeter la case de sortie de sa première volte vers l'extérieur, sous peine de ne pouvoir être continuée ; suivant que la case d'entrée est intérieure ou extérieure au quartier central de l'échiquier, il y aura possibilité de poursuivre la marche dans les deux sens sur le circuit nouveau en modifiant suivant le sens les lignes de soudure, ou bien on devra adopter le sens unique qui débute par côtoyer la frontière extérieure.

Autre observation. Si l'on cherche à parcourir le plus de cases possible dans le même quartier, on n'aura point la faculté d'éviter la description par voltes ; il sera d'ailleurs impossible d'y souder plus de trois voltes consécutives, l'intermédiaire étant l'une des voltes en carré, soudée de part et d'autre aux deux voltes en losange ; la soudure étant nécessairement sur les angles obtus de celles-ci, les cases d'entrée de la première décrite et de sortie de la dernière seront sur les angles aigus et, par suite, ne communiqueront qu'avec l'extérieur. On peut d'ailleurs souder l'une ou l'autre des voltes carrées aux deux voltes losanges.

(*A suivre.*)

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

SÉANCE DU 7 NOVEMBRE 1879.

PRÉSIDENCE DE M. JORDAN.

Communications :

M. Laguerre : *Sur la fonction exponentielle.*

M. Lucas : *Sur la résolution des équations indéterminées du troisième degré.*

M. Halphen : *Sur quelques cas singuliers du mouvement d'un solide.*

M. Rodet : *Sur le tracé des courbes usuelles.*

SÉANCE DU 21 NOVEMBRE 1879.

PRÉSIDENCE DE M. DE POLIGNAC.

Élection : M. Weill, ancien élève de l'École Polytechnique, présenté à la dernière séance par MM. Lucas et Fouret, est élu Membre de la Société.

Communications :

M. Laguerre : *Sur la réduction en fractions continues d'une fonction qui satisfait à une équation linéaire du premier ordre à coefficients rationnels.*

M. Lebon : *Sur l'arête de rebroussement de la développable circonscrite à deux coniques.*

M. Halphen : *Sur la théorie des caractéristiques de M. Schubert.*

SÉANCE DU 5 DÉCEMBRE 1879.

PRÉSIDENCE DE M. JORDAN.

Communication :

M. Laguerre : *Sur la fonction* $\left[\frac{x+1}{x-1} \right]^n$.

SÉANCE DU 19 DÉCEMBRE 1879.

PRÉSIDENCE DE M. JORDAN.

Communication :

M. Elling Holst : *Sur un nouveau principe de Géométrie.*

La Société décide que la séance du 2 janvier 1880 n'aura pas lieu et que les élections seront reportées au 16 janvier.

SÉANCE DU 16 JANVIER 1880.

PRÉSIDENCE DE M. JORDAN.

Élections : Le Bureau et le Conseil sont renouvelés comme l'indique l'état qui est au commencement du Volume.

M. Halphen lit le Rapport de la Commission de comptabilité.

M. Elling Holst, stipendiat à l'Université de Christiania, présenté à la dernière séance par MM. de Polignac et Stephanos, est élu Membre de la Société.

M. Svilokossitsch, ingénieur, présenté à la dernière séance par MM. Darboux et Stephanos, est élu Membre de la Société.

Communications :

M. Halphen : *Sur une formule d'Analyse.*

M. Worms de Romilly : *Sur certaines équations différentielles obtenues par l'élimination de deux fonctions arbitraires.*

M. Halphen communique la réponse de M. Schubert aux objections qu'il lui avait faites dans une séance précédente.

M. Léauté dépose une Note *Sur le calcul approché par la méthode de Poncelet des radicaux de la forme* $\sqrt{x^2 - y^2}$.

SÉANCE DU 6 FÉVRIER 1880.

PRÉSIDENTE DE M. JORDAN.

Élections :

M. Léauté, répétiteur à l'École Polytechnique, présenté à la dernière séance par MM. André et Collignon, est élu Membre de la Société.

M. Humbert, élève-ingénieur des Mines, présenté à la dernière séance par MM. Jordan et Fouret, est élu Membre de la Société.

Communications :

M. Caron présente le modèle en plâtre d'une *surface du troisième degré avec ses vingt-sept droites* et donne des explications sur l'épure de cette surface.

M. Stephanos : *Sur une propriété fondamentale des connexes conjugués.*

M. Darboux : *Sur la résolution de l'équation du cinquième degré et sur les équations du cinquième degré résolubles par radicaux.*

M. Laisant : *Sur les fonctions 1^x et $(-1)^x$.*

SÉANCE DU 20 FÉVRIER 1880.

PRÉSIDENTE DE M. DE POLIGNAC.

Communications :

M. Laguerre : *Sur les équations numériques.*

M. Haag : *Sur les équations différentielles de la forme*

$$\sum \left(A \frac{d^m \gamma}{dx^m} \frac{d^n \gamma}{dx^n} \right) + P = 0,$$

dans lesquelles $m + n = 2K$.

M. Halphen : *Sur les surfaces minima.*

M. de Polignac : *Sur les ramifications et sur le problème des quatre couleurs.*

M. Laquière adresse un Mémoire intitulé *Solutions régulières du problème d'Euler* et une Note *Sur une question de probabilité.*

SÉANCE DU 3 MARS 1880.

PRÉSIDENCE DE M. JORDAN.

Communications :

M. Darboux : *Sur l'intégration des systèmes d'équations différentielles linéaires.*

M. de Polignac : *Sur la théorie des ramifications.*

M. Rodet : *Sur les procédés de calcul en usage chez les Chinois.*

M. Humbert : *Sur l'équation hypergéométrique.*

SÉANCE DU 19 MARS 1880.

PRÉSIDENCE DE M. JORDAN.

Communications :

M. Humbert : *Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynôme.*

M. Halphen : *Sur les polynômes X, Y, Z donnant lieu à l'identité*

$$X^m + Y^n + Z^p = 0,$$

m, n et p étant entiers.

M. Laquière adresse deux Notes, l'une *Sur la Géométrie de l'échiquier*, l'autre *Sur les cercles qui coupent trois cercles donnés sous des angles donnés.*

Note sur le calcul approché par la méthode de Poncelet des radicaux de la forme $\sqrt{x^2 - y^2}$; par M. LÉAUTÉ.

(Séance du 16 janvier 1880.)

La méthode géométrique indiquée par le général Poncelet pour remplacer, avec une approximation connue, le radical $\sqrt{x^2 + y^2}$ par une fonction linéaire $\alpha x + \beta y$, s'applique, comme il l'a dé-

montré lui-même ⁽¹⁾, au calcul approché du radical $\sqrt{x^2 - y^2}$; les formules auxquelles on arrive dans ces deux cas, tant pour la valeur des coefficients que pour celle de l'erreur commise, n'ont aucune analogie apparente, bien que, *a priori*, une relation étroite doive cependant exister entre elles. Le calcul montre, en effet, que les résultats auxquels on est conduit dans chaque cas ne diffèrent que par le changement des fonctions circulaires en fonctions hyperboliques. Il m'a paru intéressant d'établir ce point, qui permet de réduire de moitié les formules à employer, et de remplacer toute la théorie, que l'on est obligé de faire à nouveau pour le calcul approché du second radical, par une simple remarque après le calcul du premier.

La présente Note a donc pour but d'établir que les valeurs des coefficients α et β , ainsi que celle de l'erreur commise, restent identiquement les mêmes lorsqu'on passe du radical $\sqrt{x^2 + y^2}$ au radical $\sqrt{x^2 - y^2}$, à la seule condition de changer alors les lignes trigonométriques en lignes hyperboliques, ou, si l'on veut, à la seule condition de remplacer dans le calcul la Table de logarithmes ordinaires par une Table de fonctions hyperboliques.

Posons

$$\sqrt{x^2 - y^2} = c,$$

et prenons le cas le plus général où $\frac{y}{x}$ varie entre les deux limites K' et K'' .

Traçons l'hyperbole équilatère

$$x^2 - y^2 = c^2,$$

dont l'équation peut s'écrire

$$x = c \cosh u,$$

$$y = c \sinh u,$$

et marquons sur elle les deux points A et B, dont les arguments u'

⁽¹⁾ Voir la théorie de Poncelet, *Cours de Mécanique appliquée aux machines*, publié par M. Kretz, p. 409, Note I. Sur la valeur linéaire et rationnelle des radicaux de la forme $\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sqrt{a^2 - b^2}$, ...

et u'' sont définis par les relations

$$\begin{aligned}\text{tanghyp } u' &= K', \\ \text{tanghyp } u'' &= K''.\end{aligned}$$

Le problème revient, comme l'on sait, à former l'équation de la droite $A''B''$ située à égale distance de la corde AB et de la tangente parallèle la plus voisine $A'B'$. Quant à la limite de l'erreur, elle a pour expression

$$\epsilon = \frac{OI - OI'}{OI + OI'},$$

I et I' étant les points d'intersection de l'axe Ox avec les droites AB et $A'B'$.

Cela rappelé, l'équation de la droite AB est

$$\begin{vmatrix} x & c \coshyp u' & c \coshyp u'' \\ y & c \sinhyp u' & c \sinhyp u'' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

qui peut s'écrire

$$x \coshyp \frac{u' + u''}{2} - y \sinhyp \frac{u' + u''}{2} - c \coshyp \frac{u' - u''}{2} = 0.$$

L'équation de la tangente $A'B'$ est

$$x \coshyp \frac{u' + u''}{2} - y \sinhyp \frac{u' + u''}{2} - c = 0,$$

et, par suite, on a, pour équation de la droite $A''B''$,

$$x \coshyp \frac{u' + u''}{2} - y \sinhyp \frac{u' + u''}{2} - c \frac{\coshyp \frac{u' - u''}{2} + 1}{2} = 0.$$

On déduit de là

$$c = \frac{\coshyp \frac{u' + u''}{2}}{\left(\coshyp \frac{u' - u''}{4}\right)^2} x - \frac{\sinhyp \frac{u' + u''}{2}}{\left(\coshyp \frac{u' - u''}{4}\right)^2} y.$$

Ainsi, l'expression linéaire à substituer au radical $\sqrt{x^2 - y^2}$ étant prise sous la forme $\alpha x - \beta y$, on a

$$\alpha = \frac{\cosh \frac{u' + u''}{2}}{\left(\cosh \frac{u' - u''}{4} \right)^2},$$

$$\beta = \frac{\sinh \frac{u' + u''}{2}}{\left(\cosh \frac{u' - u''}{4} \right)^2}.$$

Quant à l'erreur commise, elle a pour limite

$$\varepsilon = \frac{\cosh \frac{u' - u''}{2} - 1}{\cosh \frac{u' - u''}{2} + 1} = \left(\tanh \frac{u' - u''}{4} \right)^2.$$

Ces trois formules sont *identiques* à celles trouvées par Poncelet dans le cas de $\sqrt{x^2 + y^2}$, sauf le changement des lignes trigonométriques en fonctions hyperboliques; le calcul s'effectuera donc de la même manière, sous la seule réserve de remplacer les Tables de logarithmes ordinaires par les Tables de Hoüel.

Remarques sur les fonctions 1^x et $(-1)^x$; par M. LAISANT.

(Séance du 6 février 1880.)

Le plus souvent, dans l'étude de la fonction exponentielle a^x , on ne considère qu'incidemment le cas où a est négatif. On se contente de dire que, dans ce cas, la fonction est de forme bizarre, qu'elle donne lieu à une infinité de valeurs réelles, aussi rapprochées les unes des autres qu'on le voudra, et dans les intervalles desquelles restent des infinités de valeurs imaginaires.

On ajoute que, si l'on veut figurer cette fonction par une courbe, on trouve des points isolés les uns des autres et indéfiniment rapprochés.

Tout cela ne laisse pas que d'être assez obscur. Il me semble pourtant qu'on pourrait sans trop de peine éclaircir ces notions, enlever à la fonction $(-a)^x$ le caractère un peu mystérieux qu'elle présente au premier abord, et montrer qu'elle est loin d'offrir la moindre discontinuité.

A mon avis, toute la difficulté vient d'une définition insuffisante, et aussi de ce que l'on ne s'habitue pas assez facilement à l'idée du passage, sans discontinuité, des valeurs réelles aux valeurs imaginaires.

Prenons tout simplement d'abord la fonction

$$y = a^x;$$

nous pouvons l'écrire

$$y = a^x 1^x,$$

en appelant a^x la valeur arithmétique, essentiellement positive. Examinons maintenant le second facteur 1^x ; nous pouvons écrire

$$1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = e^{2k\pi i},$$

suivant la notation de M. Bellavitis.

De là

$$1^x = e^{2k\pi i x}.$$

La fonction, comme on le voit, est donc infinitiforme, puisqu'on peut donner à k une valeur entière quelconque. Pour définir complètement la fonction, il faut donc se donner cette valeur de k . Si alors on fait varier x de $-\infty$ à $+\infty$ en lui conservant des valeurs réelles, l'extrémité de 1^x , représentée à la manière accoutumée, parcourra sans discontinuité la circonférence de rayon 1 ayant son centre à l'origine.

Les valeurs de x telles que $2kx$ soit entier, mais celles-là seulement, donneront pour y des valeurs réelles. Par exemple, si nous avons choisi $k=6$, nous aurons

$$1^x = e^{12\pi i x};$$

les valeurs $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$ de x donneront des valeurs réelles; mais, de 0 à $\frac{1}{12}$, aucune valeur de x ne saurait donner pour 1^x une valeur réelle.

Quant à la fonction $y = a^x$, son extrémité parcourt évidemment une spirale logarithmique ayant son pôle à l'origine. Cette spirale coupe l'axe polaire au point C, distant du pôle d'une longueur égale à l'unité. Elle le coupe aussi à la distance $OA = a$, répondant à $x = 1$. Mais, entre ces deux points, la spirale a fait un nombre k , plus ou moins grand, de circonvolutions.

Des considérations tout à fait analogues sont applicables à la fonction

$$y = (-a)^x = a^x (-1)^x = a^x \epsilon^{(2k+1)\pi x},$$

dont nous avons parlé en commençant. Il faut, ici encore, définir la fonction $(-1)^x$ en se donnant une fois pour toutes la valeur de k , et l'extrémité de y parcourt une spirale logarithmique. Cette courbe coupe l'axe polaire à la distance $+1$ de l'origine, répondant à $x = 0$, puis à la distance $-a$, répondant à $x = 1$. Entre ces deux points, elle fait un nombre impair, plus ou moins grand, de demi-circonvolutions.

Nous ne croyons pas qu'il soit nécessaire d'insister outre mesure sur ces notions très simples, qui font bien reconnaître la nécessité de définir avec précision les fonctions avant de les soumettre au calcul.

Bornons-nous seulement aux remarques suivantes :

Lorsqu'on dit, comme on en a coutume, que 1^x est constamment égal à 1, c'est qu'on suppose implicitement $k = 0$ dans la relation de définition $1^x = \epsilon^{2k\pi x}$. La spirale a^x se réduit alors à l'axe polaire.

Lorsqu'on dit, comme on en a coutume, que $(-1)^x$ affecte une infinité de valeurs réelles, aussi rapprochées les unes des autres que l'on voudra et séparées par des infinités de valeurs imaginaires, c'est qu'on suppose implicitement $k = \infty$ dans la relation de définition $(-1)^x = \epsilon^{(2k+1)\pi x}$. La spirale $(-a)^x$ décrit alors une infinité de circonvolutions entre les points $+1$ et $-a$ situés sur l'axe polaire.

Ce rapprochement ne fait-il pas ressortir d'une manière frappante la contradiction dans laquelle on tombe, faute de définition suffisante?

Sur l'équation hypergéométrique; par M. HUMBERT.

(Séance du 5 mars 1880.)

Considérons l'équation différentielle du second ordre

$$(1) \quad (x^2 - 1)y'' + [(\lambda + \mu + 2)x + (\lambda - \mu)]y' + Fy = 0,$$

à laquelle on peut toujours ramener l'équation de Gauss; pour abréger, nous l'écrivons souvent

$$(2) \quad \Delta y'' + G y' + F y = 0.$$

I. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme entier de degré n satisfasse à l'équation (1) est que n soit racine de l'équation du second degré

$$(3) \quad n(n - 1) + (\lambda + \mu + 2)n + F = 0,$$

l'autre racine n'étant pas en même temps entière et inférieure à $n - 1$.

Plus généralement, si l'on pose

$$\Delta = Ax^2 + Bx + C,$$

$$G = Dx + E,$$

n devra être racine de

$$(3') \quad An(n - 1) + Dn + F = 0.$$

Cette équation joue un grand rôle dans la théorie qui va suivre; nous l'appellerons l'équation *caractéristique* de l'équation (1).

II. Jacobi a donné une expression du polynôme qui satisfait à l'équation différentielle (1); nous emploierons la même expression, mise sous une forme un peu plus générale.

Soit $K(x)$ une fonction satisfaisant à la relation

$$\frac{K'}{K} = \frac{G}{\Delta}.$$

Je dis que, si l'équation caractéristique (3') a une racine entière et positive n , une solution de l'équation différentielle sera le poly-

nomme de degré n

$$(4) \quad P_n = \frac{\Delta}{K} D_n K \Delta^{n-1}.$$

Il suffit, pour le montrer, d'écrire

$$z = K \Delta^{n-1},$$

$$\frac{z'}{z} = \frac{G + (n-1)\Delta'}{\Delta}$$

ou

$$\Delta z' = z[G + (n-1)\Delta'];$$

en prenant les dérivées d'ordre $(n+1)$ des deux membres de cette relation et posant $z^{(n)} = \frac{K}{\Delta} \gamma$, on retrouve l'équation (2).

Il est d'ailleurs évident, à cause de la relation

$$\frac{K'}{K} = \frac{G}{\Delta},$$

que P_n est un polynôme entier de degré n .

La formule (4) est plus commode, dans les calculs, que celle de Jacobi; elle ne nécessite aucune transformation préalable de l'équation (2), et elle s'applique aux équations de la forme

$$(Bx + C)y'' + (Dx + E)y' + F = 0,$$

B pouvant être égal à zéro ou différent de zéro.

Elle donne même, dans ce cas, des résultats intéressants par l'introduction de fonctions transcendantes que la formule de Jacobi ne laissait pas prévoir immédiatement.

Ici, en effet, si $B \geq 0$,

$$\frac{K'}{K} = \frac{MB}{Bx + C} - N,$$

$$K = (Bx + C)^M e^{-Nx}.$$

On aura donc ici

$$P = (Bx + C)^{1-M} e^{Nx} D_n e^{-Nx} (Bx + C)^{n+M-1}.$$

Si $B = 0$,

$$\frac{K'}{K} = 2D'x + E',$$

$$K = e^{1/2 D'x^2 + E'x},$$

et, par suite,

$$P = e^{-(D'x^2 + E'x)} D_n e^{(D'x^2 + E'x)},$$

III. Il est un cas où la formule (4) ne donne rien : c'est celui où

$$K \Delta^{n-1} = \text{const.}$$

On peut s'assurer d'ailleurs que la formule de Jacobi est également en défaut.

On a, dans ce cas,

$$\frac{K'}{K} = - \frac{(n-1)\Delta'}{\Delta},$$

par suite

$$G + (n-1)\Delta' = 0$$

ou

$$(Dx + E) + (n-1)(2Ax + B) = 0,$$

$$D + 2A(n-1) = 0,$$

$$E + B(n-1) = 0.$$

Comme n satisfait à l'équation

$$An(n-1) + Dn + F = 0,$$

on aura

$$F - An(n-1) = 0$$

ou

$$\frac{F}{A} = n(n-1).$$

La seconde racine de l'équation caractéristique sera donc $(n-1)$.

Par suite, on aura la solution

$$P_{n-1} = \Delta^n D_{n-1} \frac{1}{\Delta}.$$

On s'assure ensuite directement que le polynôme

$$P_n = \Delta^n D_{n-1} \frac{2x + \frac{F}{A}}{\Delta}$$

satisfait à l'équation différentielle.

On voit que cette solution renferme la précédente.

Donc la solution la plus générale de l'équation

$$(Ax^2 + Bx + C)y'' - (n-1)(2Ax + B)y' + An(n-1)y = 0$$

est donnée par la formule

$$P_n = \Delta^n D_{n-1} \frac{\alpha x + \beta}{\Delta},$$

α et β étant deux constantes arbitraires.

IV. Cela posé, nous allons arriver à d'autres expressions des solutions de l'équation (1) de la manière suivante.

Faisons dans cette équation la substitution

$$y = u \varphi(x).$$

Nous arriverons à une équation en u du second ordre.

En exprimant qu'elle est de la forme (1), nous déterminerons $\varphi(x)$; dès lors, à une expression de u va correspondre une expression de y .

Sans entrer dans les détails du calcul, les substitutions répondant à la question seront les suivantes :

$$(A) \quad y = (x-1)^{-\lambda} (x+1)^{-\mu} u,$$

$$(B) \quad y = (x-1)^{-\lambda} u,$$

$$(C) \quad y = (x+1)^{-\mu} u.$$

Nous allons les étudier successivement ⁽¹⁾.

V. *Substitution (A)*:

$$y = (x-1)^{-\lambda} (x+1)^{-\mu} u.$$

On trouve, pour l'équation en u ,

$$(x^2-1)u'' + [(-\lambda-\mu+2)x - \lambda + \mu]u' + F_1 u = 0.$$

Plus généralement, cette substitution revient à

$$y = \frac{\Delta}{K} u,$$

et l'on a

$$\Delta u'' + u'(2\Delta' - G) + n(F + \Delta'' - G') = 0.$$

⁽¹⁾ Ces substitutions ont été données sous une autre forme par Jacobi, dans son *Mémoire posthume Sur l'équation de Gauss*.

L'équation caractéristique est ici

$$(5) \quad A n'(n' - 1) + (4A - D)n' + F + 2A - D = 0.$$

C'est la transformée de l'équation caractéristique primitive (3) par la substitution

$$n' + 1 = -n.$$

Si donc une racine de l'équation caractéristique

$$A n(n - 1) + Dn + F = 0$$

est entière et négative, $-m$, l'équation (4) aura la racine $m - 1$.

La formule (4), appliquée à l'équation différentielle en u , donne, après un calcul facile, la solution

$$u = \frac{K}{\Delta} D_{m-1} \frac{\Delta^m}{K},$$

et par suite, pour l'équation en y ,

$$y = D_{m-1} \frac{\Delta^m}{K}.$$

Avec la forme (1) on aura

$$y = D_{m-1} (x - 1)^{-\lambda+m-1} (x + 1)^{-\mu+m-1}.$$

VI. *Substitution (B) :*

$$y = (x - 1)^{-\lambda} u.$$

On trouve que les racines de l'équation caractéristique nouvelle sont celles de l'équation (3), augmentées de λ .

Si donc $n + \lambda$ est entier, la formule (4) donnera une expression de u . On a ainsi pour y :

1° Si $n + \lambda$ est entier et positif,

$$y = (x + 1)^{-\mu} D_{n+\lambda} (x^2 - 1)^n (x + 1)^{\lambda+\mu};$$

2° Si $n + \lambda$ est entier et négatif,

$$y = (x - 1)^{-\lambda} D_{-n-\lambda-1} (x^2 - 1)^{-n-1} (x + 1)^{-\lambda-\mu}.$$

VII. *Substitution (C) :*

$$y = (x - 1)^{-\lambda} u.$$

Elle donne de même :

1° Si $n + \mu$ est entier et positif,

$$y = (x-1)^{-\lambda} D_{n+\mu} (x^2-1)^n (x-1)^{\lambda+\mu};$$

2° Si $n + \mu$ est entier et négatif,

$$y = (x+1)^{-\mu} D_{-n-\mu-1} (x^2-1)^{-n-1} (x-1)^{-\lambda-\mu}.$$

VIII. Les deux derniers paragraphes nous permettent d'exprimer par des dérivées les solutions d'équations différentielles auxquelles la formule de Jacobi ou la formule (4) n'est pas applicable immédiatement.

Il peut se faire en effet que n ne soit pas entier et que $n + \lambda$ le soit.

Nous allons, par exemple, retrouver deux formules connues, dues à Jacobi.

L'équation

$$(x^2-1)y'' + xy' - \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 y = 0$$

admet pour solutions les fonctions

$$\begin{aligned} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) \arccos x, \\ \cos\left(m + \frac{1}{2}\right) \arccos x. \end{aligned}$$

Or $\lambda = \mu = -\frac{1}{2}$; prenant $n = \frac{2m+1}{2}$, $n + \lambda = m$, on trouve facilement

$$\begin{aligned} \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) (\arccos x) \\ = \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{1.3 \dots 2m-1} D_m (x-1)^{m+\frac{1}{2}} (x+1)^{m-\frac{1}{2}}, \\ \cos\left(m + \frac{1}{2}\right) (\arccos x) \\ = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}}{1.3 \dots 2m-1} D_m (x+1)^{m+\frac{1}{2}} (x-1)^{m-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

IX. Appliquons les substitutions (B) et (C) aux équations différentielles qu'on obtient en différentiant p fois le premier membre de (1) :

$$(6) \quad \begin{cases} 0 = (x^2 - 1)z'' + [(\lambda + p + \mu + p + 2)x + \lambda - \mu]z' \\ \quad + y[p(p-1) + (\lambda + \mu + 2)p + F]. \end{cases}$$

Les racines de l'équation (3) étant n et n' , celles de l'équation caractéristique nouvelle sont

$$n - p \quad \text{et} \quad n' - p.$$

Faisons la substitution (B) :

$$z = (x - 1)^{-\lambda - p} u.$$

Les racines de l'équation caractéristique correspondant à l'équation en u seront

$$n - p + \lambda + p = n + \lambda.$$

On a donc ce théorème :

Les transformées de l'équation (1) et des équations dérivées par les substitutions

$$\begin{aligned} y &= (x - 1)^{-\lambda - p} u, \\ y &= (x + 1)^{-\lambda - p} u \end{aligned}$$

ont même équation caractéristique.

X. Dans ce qui précède, on n'a fait aucune hypothèse sur le signe de p . Si p est positif, l'équation (6) s'obtient en différentiant p fois l'équation (1); si p est négatif et égal à $-p'$, c'est l'équation (1) qui s'obtient en différentiant p' fois l'équation (6).

Dans les deux cas, nous représenterons les solutions de l'équation (6) par $D^p y$, où y représente une solution de (1).

Si $p > 0$, cette expression sera une dérivée; si $p < 0$, ce sera une intégrale.

XI. Il résulte de là que, si $n + \lambda$ est entier et positif, nous pourrons exprimer une solution de l'équation (1), ses dérivées et ses intégrales par une fonction contenant une dérivée d'indice constant.

On aura ainsi

$$D_p y = (x+1)^{-\mu-p} D_{n+\lambda} (x^2-1)^n (x+1)^{\lambda+\mu+p} (x-1)^{-p}.$$

Si de même $n+\mu$ est entier et positif,

$$D_p y = (x-1)^{-\lambda-p} D_{n+\mu} (x^2-1)^n (x-1)^{\lambda+\mu+p} (x+1)^{-p}.$$

Il y aura une discussion à faire pour chercher si ces expressions représentent bien les dérivées d'une même solution de l'équation (1). Nous allons donner quelques exemples.

XII. *Polynômes de Legendre.* — X_n satisfait à l'équation

$$(x^2-1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0.$$

Ici $\lambda = \mu = 0$, $n + \lambda = n + \mu = n$.

L'équation (6) aura donc pour solutions

$$(x+1)^{-p} D_n (x+1)^{n+p} (x-1)^{n-p}$$

et

$$(x-1)^{-p} D_n (x-1)^{n+p} (x+1)^{n-p}.$$

Ces deux expressions, tant que p est compris entre $-n$ et $+n$, représentent des polynômes entiers de degré $n-p$.

Comme X_n est le seul polynôme satisfaisant à l'équation différentielle écrite plus haut, ces deux expressions représentent, à un facteur constant près, $D_p X_n$.

On a donc

$$D_p X_n = \frac{C}{(x+1)^p} D_n (x+1)^{n+p} (x-1)^{n-p},$$

$$D_p X_n = \frac{C}{(x-1)^p} D_n (x+1)^{n-p} (x-1)^{n+p}.$$

On a de même

$$D_{-p} X_n = \frac{C'}{(x+1)^{-p}} D_n (x+1)^{n-p} (x-1)^{n+p}.$$

On en déduit la formule connue

$$\frac{D_{-p} X_n}{D_p X_n} = A (x^2-1)^p.$$

XIII. Appliquons les mêmes formules à l'équation

$$(x^2-1)y'' + xy' - \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 y = 0.$$

On trouve, après une discussion facile,

$$\begin{aligned} D_p \sin n \arccos x &= \frac{C}{(x+1)^{p-\frac{1}{2}}} D_m (x-1)^{m-p-\frac{1}{2}} (x+1)^{m+p-\frac{1}{2}}, \\ D_p \cos n \arccos x &= \frac{C'}{(x-1)^{p-\frac{1}{2}}} D_m (x-1)^{m+p-\frac{1}{2}} (x+1)^{m-p-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On en déduit, par un calcul analogue à celui qu'on a fait pour X_n ,

$$\begin{aligned} &\frac{D_{-(p-1)} \sin(m + \frac{1}{2}) \arccos x}{D_p \cos(m + \frac{1}{2}) \arccos x} \\ &= \frac{D_{-(p-1)} \cos(m + \frac{1}{2}) \arccos x}{D_p \sin(m + \frac{1}{2}) \arccos x} = A(x^2 - 1)^{p-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Formules et considérations diverses se rapportant à la théorie des ramifications; par M. DE POLIGNAC.

(Séance du 5 mars 1880.)

I.

J'appellerai indistinctement *arbre*, *ramification*, *arborescence* une figure tracée sur un plan composé de *branches* et de *nœuds* satisfaisant à la loi suivante :

De chaque nœud on peut, en suivant ces branches, parvenir à un nœud quelconque, mais par un seul chemin.

Les nœuds sont les points d'intersection des branches, celles-ci des lignes droites ou courbes, mais sans points doubles, la loi qui vient d'être énoncée excluant les contours fermés.

De pareilles configurations ont été d'abord étudiées par M. C. Jordan (*Journal de Crelle*), puis indépendamment par M. Sylvester (*Educational Times*), par M. Cayley (*British Association Report*, 1875), M. Septimus Tebay, etc.

Les recherches suivantes ont pour base le mode d'existence *graphique* d'une arborescence, et, à ce propos, je ferai une re-

marque fondamentale qui, à ma connaissance, n'a pas encore été publiée.

Toute ramification peut être tracée au moyen d'un certain nombre de traits continus sans répétition ni arrêt, c'est-à-dire en partant de l'extrémité d'une branche et continuant jusqu'à ce qu'on arrive à l'extrémité d'une autre branche ou à une branche déjà parcourue. Observons que le trait doit *traverser* une ligne, quoique déjà tracée, s'il peut continuer au delà, sans cheminer le long de cette ligne. Cela posé :

REMARQUE FONDAMENTALE. — *De quelque manière que l'on trace une ramification sans répétition ni arrêt, le nombre des parcours sera toujours le même.*

Voici, je crois, le moyen le plus simple de se rendre compte de cette propriété.

En faisant une coupure à chaque branche joignant deux nœuds, on décomposera une ramification en une série d'*étoiles*, ou, si l'on veut, de *carrefours*; on la recomposera en rendant aux carrefours leurs routes communes. Pour chaque étoile, la propriété fondamentale sera évidente. On remarquera ensuite que, en réunissant deux étoiles, on perd *un trait* sur la somme des parcours relatifs à chaque étoile, et l'on en conclura

$$N = N_1 + N_2 + \dots + N_v - (v - 1),$$

équation dans laquelle N est le nombre des traits qui ont servi à tracer l'arborescence, $N_1, N_2, \dots$ les nombres de traits relatifs à chaque nœud (ou étoile), et v le nombre des nœuds. Le second membre de l'équation étant constant, le premier le sera aussi.

Quant à $N_1, N_2, \dots$, on peut en donner l'expression en fonction des quantités qui caractérisent la ramification.

Appelons *ordre* d'un nœud le *nombre de ses branches*, autrement dit le *nombre des rayons de l'étoile* dans la décomposition de l'arborescence. Soient $m_1, m_2, \dots$ les ordres des nœuds. On vérifiera immédiatement que l'on a, en se servant de la notation de Lejeune-Dirichlet pour désigner le plus grand nombre entier contenu dans une expression fractionnaire,

$$N_1 = \left(\frac{m_1 + 1}{2} \right), \quad N_2 = \left(\frac{m_2 + 2}{2} \right), \quad \dots$$

L'équation précédente s'écrit alors

$$(1) \quad N = \sum \left(\frac{m+1}{2} \right) - (v-1).$$

J'appellerai N le nombre fondamental de la ramification.

II.

DIVERSES AUTRES EXPRESSIONS DU NOMBRE N .

1. Soit e le nombre des extrémités libres d'une ramification. Soit, en général, v_k le nombre des nœuds d'ordre k ; remarquons que le minimum de k est 3; on aura

$$N = e - 1 - (v_4 + v_5) - 2(v_6 + v_7) - 3(v_8 + v_9) - 4(v_{10} + v_{11}) - \dots$$

Cette formule s'établira de proche en proche en partant d'une ramification qui n'a que des nœuds d'ordre 3 et s'élevant graduellement à la considération des ordres supérieurs. La démonstration, sans être difficile, serait un peu longue, et j'ai cru devoir me borner à en donner le résultat.

La formule peut s'écrire

$$(2) \quad N = e - 1 - \sum_{\mu} (\mu - 1) (v_{2\mu} + v_{2\mu+1}).$$

Observons qu'elle est indépendante du nombre des nœuds d'ordre ternaire et que, pour une ramification qui n'en a pas d'autres, on a simplement

$$(3) \quad N = e - 1.$$

La comparaison des équations (1) et (2) donne

$$e = \sum_{\mu} (\mu - 1) (v_{2\mu} + v_{2\mu+1}) + \sum \left(\frac{m+1}{2} \right) - v + 1.$$

On peut transformer cette équation en remarquant que

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_{2\mu} + v_{2\mu+1};$$

et, après quelques réductions faciles, on obtiendra

$$e = \sum_{\mu} (\mu - 2)(\nu_{2\mu} + \nu_{2\mu+1}) + \sum \left(\frac{m+1}{2} \right) - \nu_3 + 2.$$

Si la ramification est d'ordre ternaire, le premier Σ disparaît; de plus, m étant partout égal à 3, on a

$$\frac{m+1}{2} = 2 \quad \text{ct} \quad \sum \left(\frac{m+1}{2} \right) = 2\nu_3,$$

d'où

$$e = \nu_3 + 2,$$

résultat facile à vérifier directement. Aussi, par la formule (3),

$$(4) \quad N = e - 1 = \nu_3 + 1.$$

2. La formule (1), remise sous la forme

$$N = N_1 + N_2 + \dots + N_\nu - (\nu - 1),$$

est susceptible de la transformation suivante.

Soient

$P_1, P_2, \dots, P_p$ les nœuds d'ordre pair;

$2\mu_1, 2\mu_2, \dots, 2\mu_p$ leurs ordres respectifs.

Soient, de même, les nœuds d'ordre impair

$$I_1, I_2, \dots, I_i$$

et leurs ordres

$$2\lambda_1 + 1, 2\lambda_2 + 1, \dots, 2\lambda_i + 1.$$

Alors

$$N = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_p + \lambda_1 + 1 + \dots + \lambda_i + 1 - (\nu - 1).$$

Mais

$$\nu = p + i;$$

donc

$$N = \Sigma \mu + \Sigma \lambda + i - (p + i - 1)$$

ou

$$N = \Sigma \mu + \Sigma \lambda - p + 1.$$

i , nombre des nœuds d'ordre impair, a disparu de cette équation, résultat conforme au mode de description graphique donné au

début, d'après lequel il est évident que, chaque fois qu'un trait aboutit à un nœud, on peut le prolonger au delà en ajoutant une branche au nœud sans modifier le nombre des traits.

Si la ramification n'a pas de nœuds d'ordre pair, on a

$$(5) \quad N = \Sigma \lambda + 1,$$

relation dont la formule (4) est un cas particulier.

Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynôme; par M. HUMBERT.

(Séance du 19 mars 1880.)

I. M. Laguerre a montré, en développant $\log(x - z)$, la liaison étroite de cette question avec la théorie des fractions continues algébriques; il est facile de généraliser les résultats qu'il a obtenus; au lieu du logarithme, nous considérerons les fonctions ainsi définies.

Soient

$$\Delta(x) = Ax^2 + Bx + C = A(x - x_0)(x - x_1)$$

et une fonction $K(x)$ satisfaisant à la relation

$$\frac{K'(x)}{K(x)} = \frac{Dx + E}{Ax^2 + Bx + C} = \frac{\mu_0}{x - x_0} + \frac{\mu_1}{x - x_1},$$

$$K = (x - x_0)^{\mu_0}(x - x_1)^{\mu_1}.$$

Proposons-nous de développer la fonction

$$\int \frac{\Delta(x) dx}{K(x)(x - z)}$$

suivant les puissances croissantes de $\Delta(z)$.

Cette intégrale indéfinie est une fonction de x et de z ; elle se développera de la manière suivante :

$$\int \frac{\Delta(x) dx}{K(x)(x - z)} = \Sigma \{U_m + V_m z\} \Delta^m(z).$$

Prenons les dérivées des deux membres par rapport à x :

$$\frac{\Delta(x)}{K(x)(x-z)} = \Sigma(U'_m + V'_m z) \Delta^m(z),$$

$$\frac{\Delta(x)}{K(x)} \frac{\Delta(x) - \Delta(z)}{x-z} - \frac{1}{\Delta(x) - \Delta(z)} = \Sigma(U'_m + V'_m z) \Delta^m(z),$$

ou

$$V'_m = \frac{A}{K(x) \Delta^m(x)},$$

$$U'_m = \frac{Ax + B}{K(x) \Delta^m(x)}.$$

Ces expressions sont susceptibles d'une interprétation remarquable.

Considérons, en effet, l'équation différentielle

$$(E) \quad (Ax^2 + Bx + C)y'' + (Dx + E)y' = [Am(m-1) + Dm]y.$$

Une des solutions est un polynôme entier de degré m que j'appellerai P_m ; une seconde solution, y_1 , sera

$$y_1 = P_m(x) \int \frac{dx}{K(x) P_m^2(x)} = P_m(x) \int \frac{dx}{(x-x_0)^{2\alpha_0} (x-x_1)^{2\alpha_1} P_m^2(x)};$$

elle commence par un terme en $\frac{1}{x^{2\alpha_0+2\alpha_1+m-1}}$.

Si nous prenons les dérivées d'ordre m des deux membres de l'équation (E), on a

$$(Ax^2 + Bx + C)y^{(m+2)} + [m(2Ax + B) + Dx + E]y^{(m+1)} = 0,$$

ce qui donne

$$y_1^{(m+1)} = \frac{1}{K \Delta^m}.$$

On a donc

$$V'_m = y_1^{(m+1)},$$

$$V_m = y_1^{(m)} + \text{const.}$$

Or, en appliquant la formule de Jacobi à l'intégrale

$$\int \frac{\Delta(x) dx}{K(x)(x-z)},$$

on voit aisément que V_m et la dérivée d'ordre m de y_1 commencent tous deux par des termes en $\frac{1}{x^{\mu_0 + \mu_1 + 2m - 1}}$.

Donc

$$V_m = y_1^{(m)};$$

de même

$$U'_m = (Ax + B)y_1^{(m+1)},$$

$$U_m = (Ax + B)y_1^{(m)} - Ay_1^{(m-1)}.$$

Ces expressions sont générales; mais, dans le cas où μ_0 et μ_1 sont positifs, y_1 a une forme remarquable.

On a, en effet, d'après une formule de Jacobi modifiée quant à la notation,

$$\frac{K(x)}{\Delta(x)} y_1 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z)}{\Delta(z)} \frac{P_m(z)}{x-z} dz$$

ou

$$y_1 = \frac{\Delta(x)}{K(x)} \left[P_m(x) \int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z) dz}{\Delta(z)(x-z)} + \prod_{m-1}(x) \right].$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Dans le développement*

$$\int \frac{\Delta(x)}{K(x)} \frac{dx}{x-z} = \Sigma (U_m + V_m z) \Delta^m(z),$$

V_m est égal à la dérivée d'ordre m de l'expression

$$\frac{\Delta(x)}{K(x)} \left[P_m(x) \int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z)}{\Delta(z)} \frac{dz}{x-z} + \prod_{m-1} \right],$$

P_m et $\prod_{m-1}$ étant les polynômes de degrés m et $m-1$ qui rendent cette expression du plus haut degré possible en $\left(\frac{1}{x}\right)$, pourvu toutefois que l'intégrale prise entre x_0 et x_1 ait un sens.

Cette dernière hypothèse revient, en effet, à $\mu_0 > 0$, $\mu_1 > 0$.

Remarque. — Les polynômes $P_m(x)$ sont, dans ce cas, les dénominateurs des réduites de $\int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z)}{\Delta(z)} \frac{dz}{x-z}$.

Les formules précédentes comprennent, comme cas particulier, le logarithme; il suffit de prendre $K = \Delta$.

II. — Les résultats qui viennent d'être exposés s'appliquent évidemment au cas où Δ est du premier degré.

Par exemple, prenons $\Delta = x$:

$$\frac{K'}{K} = \frac{x+1}{x} \quad \text{ou} \quad K = x e^x.$$

L'équation

$$x y'' + (x+1) y' = m y$$

est celle que nous avons appelée E.

Soit y_1 celle de ses solutions qui ne renferme pas de termes entiers en x et dont M. Laguerre a donné plusieurs expressions (*Bulletin de la Société mathématique*, t. VII, p. 74-75).

On aura

$$\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x-z} dx = \sum V_m(x) z^m$$

et

$$V_m(x) = D_x^{(m)} y_1.$$

La fonction de z , $\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x-z} dx$, est évidemment uniforme, et l'intégrale a un sens si z n'est pas compris entre x et ∞ . Pour qu'elle soit développable en série convergente suivant les puissances croissantes de z , il faut et il suffit qu'elle soit holomorphe dans un cercle décrit de l'origine; on pourra toujours trouver un pareil cercle si x est plus grand que zéro.

Supposons donc

$$x > 0 \quad \text{et} \quad z < x.$$

Posons dans l'intégrale

$$x - z = u;$$

on aura

$$\int_x^{x-z} \frac{e^{-z-u}}{u} du = \sum V_m(x) z^m.$$

Faisons $x - z = y$:

$$e^{-y-x} \int_x^y \frac{e^{-u}}{u} du = \sum V_m(x) (x-y)^m$$

ou enfin

$$e^y \int_x^y \frac{e^{-y}}{y} dy = \sum e^x V_m(x) (x-y)^m.$$

Avec les conditions $x > 0$, $y > 0$, la série du second membre est convergente.

Nous avons ainsi le développement de l'intégrale *rectiligne*

$$e^y \int_x^y \frac{e^{-y}}{y} dy,$$

qu'a étudiée M. Laguerre, suivant les puissances de $(y-x)$, et ce théorème :

THÉOREME. — *Le coefficient de $(x-y)^m$ est égal à e^x multiplié par la dérivée d'ordre m de l'expression*

$$\varphi_m(x) e^{-x} - f_m(x) \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx,$$

$\varphi_m(x)$ et $f_m(x)$ étant les polynômes de degrés $m-1$ et m qui rendent cette expression de l'ordre le plus élevé possible en $\frac{1}{x}$.

Je me propose, dans une prochaine Communication, de généraliser ces résultats en prenant pour Δ un polynôme de degré quelconque.

Note sur les determinants bordés; par M. C. LE PAIGE.

(Séance du 2 avril 1880.)

Soit un déterminant symétrique du $n^{\text{ième}}$ ordre

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

que l'on peut toujours regarder comme le discriminant d'une forme quadratique à n variables

$$f = \sum a_{ik} x_i x_k.$$

Le déterminant symétrique que l'on obtient en bordant Δ de

p rangées et de p colonnes composées chacune de n éléments et de p zéros peut toujours se mettre sous une forme assez élégante.

Nous nous bornerons à le faire voir pour $n=5$, $p=3$, afin d'éviter la longueur des formules; mais on s'apercevra aisément que la méthode de démonstration est générale.

Soit

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & \lambda_5 & \mu_5 & \nu_5 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 & 0 & 0 & 0 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \nu_4 & \nu_5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Soit

$$F = \sum A_{ik} x_i x_k$$

la forme adjointe de f .

Multiplions Δ_1 par

$$\Delta^1 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{15} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{25} & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{51} & A_{52} & \dots & A_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

nous aurons

$$2^1 \Delta_1 \Delta^1 = \begin{vmatrix} 2\Delta & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{dF(\lambda)}{d\lambda_1} & \frac{dF(\mu)}{d\mu_1} & \frac{dF(\nu)}{d\nu_1} \\ 0 & 2\Delta & 0 & 0 & 0 & \frac{dF(\lambda)}{d\lambda_2} & \frac{dF(\mu)}{d\mu_2} & \frac{dF(\nu)}{d\nu_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\Delta & \frac{dF(\lambda)}{d\lambda_5} & \frac{dF(\mu)}{d\mu_5} & \frac{dF(\nu)}{d\nu_5} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 & 0 & 0 & 0 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \nu_4 & \nu_5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

VIII.

Mais il est visible, par le théorème de Laplace, que ce dernier déterminant peut se mettre sous la forme de produit de deux déterminants rectangulaires.

En conséquence,

$$2^5 \Delta_1 \Delta_4 = 4 \Delta^2 \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \nu_4 & \nu_5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{dF(\lambda)}{d\lambda_1} & \frac{dF(\lambda)}{d\lambda_2} & \frac{dF(\lambda)}{d\lambda_3} & \frac{dF(\lambda)}{d\lambda_4} & \frac{dF(\lambda)}{d\lambda_5} \\ \frac{dF(\mu)}{d\mu_1} & \frac{dF(\mu)}{d\mu_2} & \frac{dF(\mu)}{d\mu_3} & \frac{dF(\mu)}{d\mu_4} & \frac{dF(\mu)}{d\mu_5} \\ \frac{dF(\nu)}{d\nu_1} & \frac{dF(\nu)}{d\nu_2} & \frac{dF(\nu)}{d\nu_3} & \frac{dF(\nu)}{d\nu_4} & \frac{dF(\nu)}{d\nu_5} \end{vmatrix}.$$

En appliquant la règle de multiplication à ces deux déterminants rectangulaires, on trouve

$$2^5 \Delta_1 \Delta^4 = 2^2 \Delta^2 \begin{vmatrix} \sum \lambda_i \frac{dF(\lambda)}{d\lambda_i} & \sum \lambda_i \frac{dF(\mu)}{d\mu_i} & \sum \lambda_i \frac{dF(\nu)}{d\nu_i} \\ \sum \mu_i \frac{dF(\lambda)}{d\lambda_i} & \sum \mu_i \frac{dF(\mu)}{d\mu_i} & \sum \mu_i \frac{dF(\nu)}{d\nu_i} \\ \sum \nu_i \frac{dF(\lambda)}{d\lambda_i} & \sum \nu_i \frac{dF(\mu)}{d\mu_i} & \sum \nu_i \frac{dF(\nu)}{d\nu_i} \end{vmatrix}.$$

En général, si nous désignons par D le déterminant fonctionnel du second membre, nous aurons

$$2^n \Delta_1 \Delta^{n-1} = 2^{n-p} \Delta^{n-p} D$$

ou

$$2^p \Delta_1 \Delta^{p-1} = D.$$

Cette relation est bien connue pour $p = 1$. Elle donne, par exemple, l'équation tangentielle d'une conique ou d'une surface du second degré dont on connaît l'équation en coordonnées ponctuelles.

Pour $n = 4$, $p = 2$, elle a été employée par Hesse dans la théorie des surfaces du second ordre ⁽¹⁾.

Cependant la manière dont l'illustre géomètre démontre l'iden-

(¹) *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes*, 3^{re} Aufl., S. 179.

tité des équations

$$D = 0, \quad \Delta_1 = 0$$

semblerait porter à croire que le théorème général ne lui était pas connu.

Cette même propriété, pour $n = 3$, $p = 2$, a été employée par Clebsch (1).

Enfin, pour $p = 2$, n quelconque, elle résulte, comme l'a fait voir M. Salmon (2), d'une propriété générale des mineurs du second ordre d'un déterminant; mais cette démonstration n'est plus applicable dès que p surpasse 2.

Si l'on observe que

$$\partial(\lambda\mu) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \lambda_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \lambda_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 \end{vmatrix} = \lambda_1 \mu_1 A_{11} + \lambda_2 \mu_2 A_{12} + \dots + \lambda_3 \mu_3 A_{33} \\ = \lambda_1 (\mu_1 A_{11} + \mu_2 A_{12} + \mu_3 A_{13}) + \dots,$$

on voit que

$$\partial(\lambda\mu) = \frac{1}{2} \sum \lambda_i \frac{dF'_i(\mu)}{d\mu_i}.$$

Cette relation s'applique naturellement aux déterminants d'ordre quelconque.

Par suite, la formule donnée plus haut peut encore s'écrire

$$\Delta^2 \partial(\lambda\mu) = \begin{vmatrix} \partial(\lambda\lambda) & \partial(\lambda\mu) & \partial(\lambda\nu) \\ \partial(\mu\lambda) & \partial(\mu\mu) & \partial(\mu\nu) \\ \partial(\nu\lambda) & \partial(\nu\mu) & \partial(\nu\nu) \end{vmatrix}.$$

et, en général,

$$\Delta^{p-1} \partial(\lambda, \mu, \nu, \dots, \varpi) = \pm [\partial(\lambda\lambda) \partial(\mu\mu) \partial(\nu\nu) \dots \partial(\varpi\varpi)].$$

Une démonstration absolument semblable donnerait le théorème plus général

$$\Delta^{p-1} \partial \begin{pmatrix} \lambda, \mu, \dots, \varpi \\ \lambda', \mu', \dots, \varpi' \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \partial(\lambda, \lambda') & \partial(\lambda, \mu') & \dots & \partial(\lambda, \varpi') \\ \partial(\mu, \lambda') & \partial(\mu, \mu') & \dots & \partial(\mu, \varpi') \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial(\varpi, \lambda') & \partial(\varpi, \mu') & \dots & \partial(\varpi, \varpi') \end{vmatrix}.$$

(1) *Vorlesungen über Geometrie*, 1^{er} B., 2^{ter} Theil, S. 909.

(2) *Lessons on higher Algebra*, 3^d ed., p. 29.

Sous cette dernière forme, on voit que la relation s'applique encore lorsque le déterminant Δ n'est pas symétrique.

On a donc ce théorème général :

Le produit du déterminant que l'on obtient en bordant un déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre Δ , de p colonnes de n éléments $\lambda, \mu, \dots, \varpi$ et de p rangées $\lambda', \mu', \dots, \varpi'$, par la puissance $p-1$ de Δ , est égal à un déterminant du $p^{\text{ième}}$ ordre dont les éléments sont les formes bilinéaires obtenues en bordant Δ d'une colonne et d'une rangée prises dans les $2p$ lignes $\lambda, \mu, \dots, \varpi; \lambda', \mu', \dots, \varpi'$.

Nous pensons que cette relation, tout au moins sous sa forme générale, n'est pas connue; du moins ne l'avons-nous point rencontrée jusqu'ici.

Elle se prête à différentes applications à la théorie des formes algébriques et à la Géométrie.

Solutions régulières du problème d'Euler sur la marche du cavalier; par M. LAQUIÈRE.

(SUITE.)

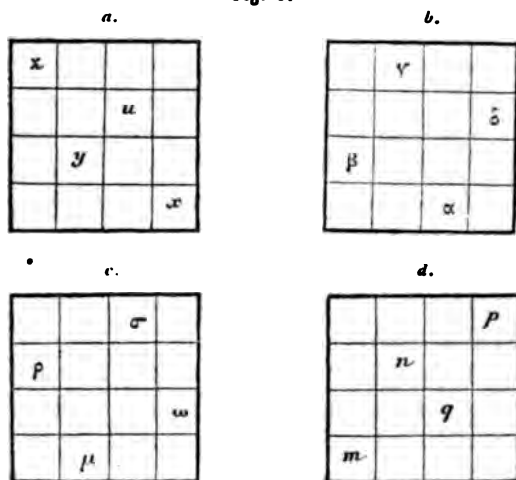
Formation des marches rentrantes régulières complètes
(de soixante-quatre sauts).

Nous n'aurons plus maintenant aucune difficulté à composer des marches rentrantes complètes de soixante-quatre cases. Il est d'abord évident qu'en parcourant successivement les quatre marches partielles et opérant les soudures de marches alternées en carré et en losange, qui sont toujours possibles, soit dans le même carré, soit dans le carré voisin de toute case terminale de l'une des marches, on formera une marche de soixante-quatre cases continue, quels que soient les sens adoptés dans chaque circuit pour sa description. En ménageant convenablement ce sens, on conçoit qu'il sera possible de diriger la case terminale de la quatrième marche dans le voisinage de la case d'entrée de la première; et au besoin, en retournant la dernière volte, d'obtenir la fermeture, les

deux cases étant de couleurs différentes. La possibilité d'obtenir une marche rentrante n'est donc plus douteuse; mais elle deviendra plus précise par la loi de formation rationnelle des marches régulières.

Supposons désignés, comme dans la *fig. 3*, les quatre types de marches élémentaires A, B, C, D.

Fig. 3.



Nous désirons composer une marche totale dans laquelle les seize cases appartenant au même type de volte soient réunies en une seule marche partielle comprenant le quart des cases de l'échiquier uniformément réparties dans les quatre quartiers, sur les huit colonnes et sur les huit bandes de l'échiquier, telles que les marches types partielles que nous avons trouvées. Nous savons qu'il en existe deux groupes qui se distinguent par la couleur de la case d'entrée dans les quartiers pour un même sens de description : groupe ABCD et groupe A, B, C, D₁. Les cases d'entrée dans une marche continue complète étant de même couleur et les cases de sortie de couleur contraire, et de plus dans le retournement des marches les cases de sortie et d'entrée se permutant l'une dans l'autre, il est dès à présent évident que, si l'on veut décrire la marche entière sans changer de sens, on devra prendre les quatre marches partielles dans le même groupe, c'est-à-dire ABCD en-

semble, et de même A, B, C, D₁, le sens adopté pouvant être indifféremment positif dans l'un et l'autre groupe, et l'ordre de passage d'un type à l'autre restant à fixer pour obtenir la fermeture, mais devant toujours, comme il a été déjà établi, alterner les types en carré et les types en losange.

Si l'on veut décrire une partie de la marche dans un sens et une partie dans l'autre, on devra, toujours pour respecter la couleur d'entrée dans les quartiers que l'on ne peut modifier, prendre dans l'un des groupes les marches types que l'on désire parcourir dans un sens et dans l'autre groupe celles à parcourir en sens inverse. Ainsi, par exemple, on pourra prendre A et B avec C₁ et D₁, à condition que le sens de description des deux premiers types et celui des deux derniers soient contraires, et faire toutes les combinaisons possibles entre les types d'après ces principes, ce qui donne $2^4 = 16$ combinaisons possibles, ou trente-deux marches régulières à éléments par marches partielles en voltes semblables de seize cases, chacune de seize circuits pouvant être décrits dans les deux sens différents.

L'étude détaillée d'une de ces marches ne sera pas superflue pour montrer comment les marches types se soudent les unes aux autres pour parvenir à la fermeture; elle nous suggérera de plus la formation de diagrammes symboliques pouvant servir également à trouver promptement les cases d'entrée et de sortie de chacune des marches partielles dont la réunion constitue la marche totale, et à conserver les éléments suffisant à la reconstruction immédiate de celle-ci.

Dans ces marches régulières totales, les quatre types devront être décrits successivement sans coupures venant enchevêtrer une portion de marche appartenant à un type dans les autres. Nous savons que, pour que les quatre voltes d'une même marche se succèdent ainsi sans interruption, le sens de la marche doit être continu pour toutes les voltes de la marche partielle et le même que celui qui indique l'ordre de visite des quartiers.

La marche devant être rentrante, le point de départ est arbitraire sur l'échiquier; nous le prendrons dans le type de marche élémentaire α et le quartier I. Remarquons d'abord que, si la case de départ était l'angulaire z de l'échiquier, la case terminale 64 serait nécessairement l'une des deux seules u ou y en communi-

cation avec elle, l'autre étant la seconde visitée ; par suite, pour ne pas couper la volte en deux parties, il faudrait rétrograder jusqu'à la case de soudure de la marche partielle avec la précédente de type précédent.

La case de départ, pour décrire sans interruption toute la marche de type déterminé, sera donc nécessairement l'une des trois x, y, u , autres que l'angulaire, ce qui donne quatre modes de description de la volte, $xyzu, yzux, xzy, uzyx$, les cases reliées à l'angle n'admettant qu'un sens de parcours, la case opposée x laissant le choix entre les deux.

Choisissons le sens *dextrorsum* ; le sens *sinistrorsum*, symétrique par rapport aux médianes, ne nécessitera pas d'étude nouvelle. Il y a donc deux débuts de marches *dextrorsum* à étudier :

1^{er} début, $yzux$, voir fig. 2, Tableaux A, B, C, D ;

2^e début, $xyzu$, voir fig. 5, Tableaux A₁, B₁, C₁, D₁.

Première marche dextrorsum.

Partant de la case y (ou 1 du diagramme) dans le quartier I, on aura pour 16^e case de la marche la case de ce type partiel contenue dans le quartier IV et qui se relie à la case 1, case qui peut être déterminée immédiatement sans développer la marche, ainsi qu'il sera dit pour former le diagramme symbolique de la marche (fig. 4). Elle correspond à x par centre et à z par coulisses (¹).

De la case 16 ou z du quartier IV, case terminale de la marche type A, composée des voltes a , avec case de départ blanche, couleur de y du quartier I dans l'échiquier pratique, il faut, pour continuer le sens *dextrorsum* de la marche, traverser le côté mitoyen dans le sens du mouvement ; cette condition suffirait pour fixer la case 17 de départ de la marche suivante, que l'on savait déjà devoir être en carré, puisque la première est en losange. La position de la case 16 ne laisse d'ailleurs qu'une case de marche différente de A en communication avec elle. C'est la marche B

(¹) Pour désigner les cases dans chaque quartier, nous les supposerons en corrélation par coulisses avec les diagrammes orientés a, b, c, d (fig. 3) des quatre voltes types, et nous les distinguerons par la lettre de la case dans le type et le numéro du quartier qui la contient.

voisine, puisque le passage se fait sur un côté mitoyen horizontal. La case 17 est l' α du type b de marche en carré dans le quartier I.

La 32^e case, case de fermeture de la marche B *dextrorsum*, se trouvera en répétant le raisonnement déjà fait comme case de ladite marche b dans le quartier IV, en communication avec 17 du quartier I. C'est la case δ du quartier IV.

Cherchons maintenant la case 33 de départ de la troisième marche, qui, d'après les principes posés, doit être en losange et ne peut en conséquence être formée que du type d . Or, dans le quartier I, en traversant le mur mitoyen dans le sens du mouvement, on ne trouve point de case en communication avec 32, et dans le IV^e quartier lui-même il n'en existe qu'avec la marche A déjà parcourue. Force est donc de pousser, en conservant le sens de la marche jusqu'au quartier II, où l'on trouve la case m , du type en losange d , seule en communication avec 32. Ce sera donc elle qui devra servir d'entrée 33 à la troisième marche partielle (¹).

De même que ci-dessus, on voit que la case 48, dernière de la marche partielle du système d (ou D), est la seule de ce système et dans le quartier I, précédant II dans le sens de la marche, en communication avec 33. La case q du quartier I sera donc la case n° 48 de sortie de la troisième marche D, en losange.

Dans le quartier I, la case p du type non encore décrit serait en communication avec 48 et pourrait servir de case d'entrée, mais elle exigerait que la marche fût continuée en sens inverse. On peut du reste s'assurer qu'elle se fermerait encore d'elle-même en décrivant le circuit de sens *sinistrorsum* et aboutissant au 64^e stationnement en σ du quartier I, avec coupure de la volte dans ce quartier. La case σ est d'ailleurs celle que nous allons encore trouver pour 64^e de la marche *dextrorsum* cherchée. Dans le quartier suivant, passant de 48 le côté mitoyen dans le sens de la marche, nous trouvons la case ρ du type c en communication avec 48 dans le quartier II, de même que dans le quartier I. Ce sera la case de départ 49 de la quatrième marche en carré du type C.

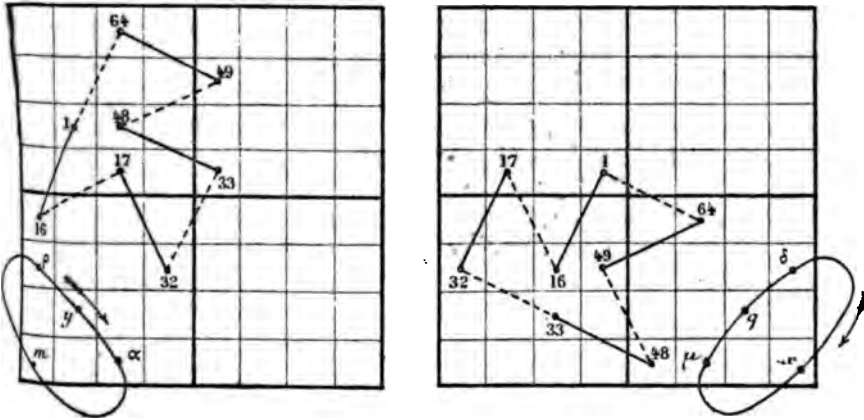
La dernière station de cette marche se trouvera dans le quartier

(¹) On trouverait encore la case m du quartier III; mais elle obligerait à prendre la marche *sinistrorsum* pour le circuit, de même qu'on aurait rétrogradé de quartier par rapport à la première direction de visite adoptée.

précédent I et en communication avec 49, en σ que nous numérotions 64, et qui, par sa communication avec γ du même quartier, origine de la première marche, fait rentrer sur elle-même la marche complète *dextrorsum* sur les 64 cases avec case blanche d'entrée dans toutes les voltes.

Le diagramme symbolique ci-dessous résume cette marche. On le compose d'un octogone formé par les quatre résultantes de quinze sauts empruntés à chaque marche partielle type et les quatre côtés de soudure. Les quatre résultantes étant les sauts supprimés à chaque marche pris en sens inverse, l'octogone symbolique est une marche réelle de huit sauts de cavalier.

Fig. 4.



Si nous reportons (comme il est fait sur un angle du diagramme symbolique) sur un même quartier les cases correspondant à celles de départ dans les quatre marches partielles types, qui, réunies, forment la marche totale, nous trouvons pour la première marche *dextrorsum* : γ , α , m , ρ , c'est-à-dire, dans les trois marches partielles succédant à la première, les cases de chacun des types qui touchent à celle choisie la première comme case de départ, et prises dans l'ordre où l'on peut former un circuit continu (ou elliptique) les traversant toutes les quatre et parcourant le circuit dans le sens *dextrorsum* ou celui de la marche.

On peut au moyen de ce circuit retrouver la marche entière. La loi de sa formation est du reste générale, comme on le verra dans

le second circuit *dextrorsum*. Si l'on formait une marche totale composée de marches partielles les unes dans un sens, les autres dans l'autre, la courbe d'union des cases d'entrée se composerait de deux arcs se tournant le dos comme les branches d'une hyperbole et rappelant ainsi le sens discontinu de la marche. Nous en donnerons tout à l'heure un exemple.

Deuxième marche *dextrorsum*.

La seconde marche *dextrorsum* est celle que définit la volée *xyzu* et pour laquelle les cases d'entrée des voltes sont noires sur l'échiquier orienté. La *fig. 4* en donne le diagramme symbolique et la courbe d'union des origines de marches partielles, en regard de ceux de la première marche; les *fig. 5* en montrent le complet développement. Pour la trouver, il suffit de composer le diagramme symbolique par la série des raisonnements pareils à ceux qui nous ont fait connaître les éléments nécessaires de la première marche; nous formons ainsi le Tableau suivant. On trouve pour :

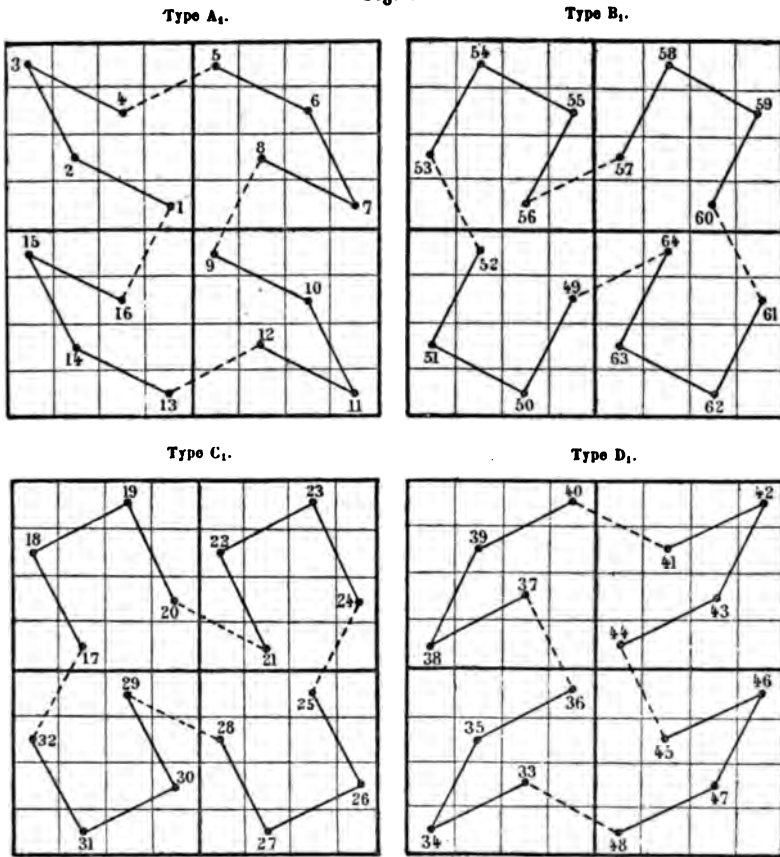
Marche A ₁ ...	{	La case	1,	case γ	du type élém. a ,	dans le quart.	I
		"	16,	" u	" a ,	"	IV
Marche C ₁ ...	{	"	17,	" μ	" c ,	"	I
		"	32,	" ρ	" c ,	"	IV
Marche D ₁ ...	{	"	33,	" q	" d ,	"	IV
		"	48,	" m	" d ,	"	III
Marche B ₁ ...	{	"	49,	" δ	" b ,	"	IV
		"	64,	" γ	" b ,	"	III

Si l'on forme la courbe d'union des cases origines des quatre marches types, ce sont encore les quatre les plus rapprochées de x , dans le diagramme qui les figure dans le même quartier; ils se succèdent dans le sens du mouvement d'un mobile décrivant la courbe d'union dans le même sens que la marche, comme il a été observé pour la première marche, la courbe pouvant se fermer de même. D'une manière générale les marches étudiées se composent des quatre marches partielles types formées par la réunion des quatre voltes semblables, se succédant dans l'ordre alternatif de marches en voltes losanges et voltes carrées qu'indique l'ordre des cases de départ types les plus rapprochées de la case d'origine

choisie de l'une des marches, les quatre cases étant réunies entre elles par un trait ou anneau continu, parcouru dans le même sens que celui qui est commun à la visite des quartiers et à la description des voltes.

Quant au diagramme symbolique relatant les cases d'entrée et de

Fig. 5.

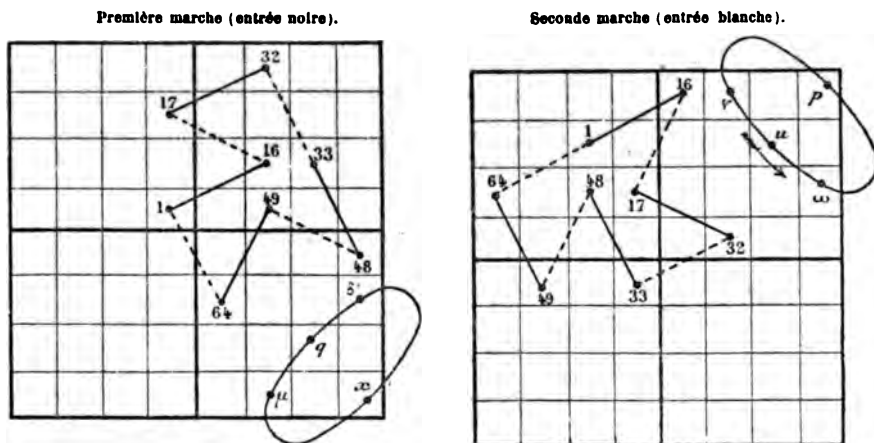


sortie, il est égal comme figure géométrique à celui de la première marche, mais orienté rectangulairement dans la seconde, ce qui nous démontre à nouveau que les deux marches n'en font qu'une seule au point de vue géométrique, c'est-à-dire abstraction faite des couleurs.

Des marches sinistrorsum.

En choisissant convenablement l'origine, les marches *sinistrorsum* ne sont évidemment autres que les marches *dextrorsum* retournées, soit leurs symétriques. Nous n'aurions rien à en dire si nous ne voulions insister sur l'emploi du diagramme symbolique qui rend si facile la combinaison des marches partielles, en réduisant celles qui sont connues d'autre part à leur résultante; nous nous bornerons à donner les diagrammes symboliques des deux marches définies par les voltes *xuzy* et *uzyx*. Ces diagrammes sont formés en reliant, d'après la règle exposée, la case de départ de chaque marche partielle type à celle de même type à distance de

Fig. 6.



cavalier dans le quartier voisin vers la droite (sens opposé au mouvement) pour avoir la résultante de la première marche, puis revenant vers la gauche (sens du mouvement) à la case possible dans le quartier voisin sur la gauche, ou, si besoin est, dans le suivant. Cette case est toujours déterminée, car la résultante d'une marche et le côté de soudure avec la marche suivante sont nécessairement symétriques par rapport à la direction des médianes ou des diagonales, et des lignes ainsi définies une seule a son extrémité dans le quartier où doit se prendre la case de départ de la marche suivante.

Les trois autres marches partielles se déterminent par la même règle.

On remarquera que toutes les marches partielles types sont symétriques par rapport au centre de l'échiquier et que, par suite, deux cases symétriques par rapport au centre de l'échiquier sont, dans toutes les marches composées de marches partielles types, marquées de numéros de station différant de huit unités.

Les marches *sinistrorsum* sont, de même que les marches *dextrorsum*, représentées par l'anneau d'union des cases d'entrée dans chaque marche que rencontre successivement le mobile décrivant l'anneau dans le sens de la marche.

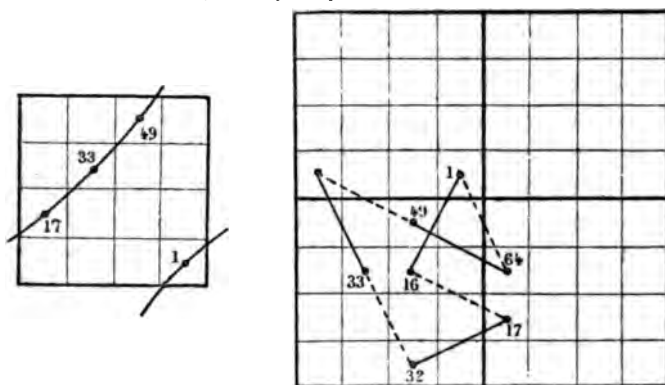
Quant aux diagrammes symboliques, ils sont symétriques de ceux des marches *dextrorsum* par rapport à la médiane verticale pour les deux premières de chaque nom, par rapport à la médiane horizontale pour les secondes; cela devait être prévu, les deux marches ayant ces axes de symétrie relative. Quant aux numéros des cases symétriques, ils diffèrent de 32, nombre de cases de deux marches complètes, en raison de la permutation qui se produit dans la symétrie linéaire entre les marches losanges d'une part et les marches carrées d'autre part, distantes de 32 sauts.

Marches régulières avec changement de sens.

Nous avons vu qu'il pouvait être formé 32 marches régulières

Fig. 7.

Diagramme symbolique et courbe d'union.



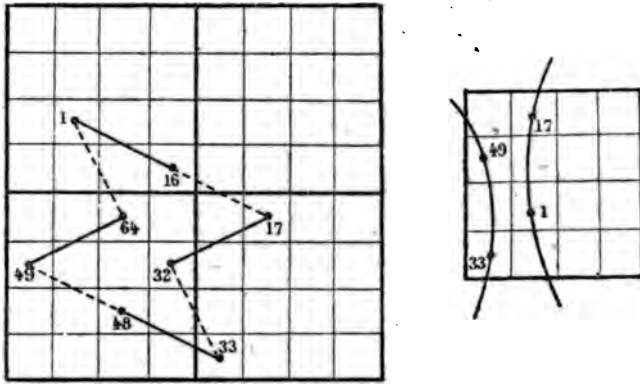
avec les diverses combinaisons des sens de marches partielles; nous

ne donnerons ici que le diagramme symbolique et la courbe d'union des cases de départ des deux marches rentrantes :

$$+ A_1 - B - D + C_1 \quad \text{et} \quad A - B_1 - D_1 + C.$$

Fig. 7 bis.

Diagramme symbolique et courbe d'union.



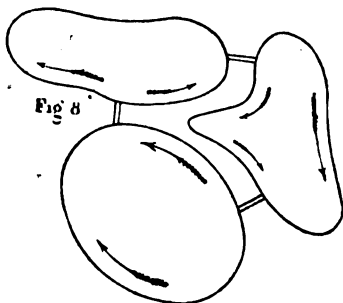
On remarquera que la courbe d'union est du genre hyperbole dans l'un et dans l'autre.

Marches régulières entrecoupées.

Les principes établis précédemment ont donné immédiatement les marches régulières à rotation continue; par l'étude du diagramme symbolique convenable, ils serviraient à déterminer les marches plus compliquées, composées de marches types entières, ou fractionnées, parcourues dans des sens divers. Nous ne nous étendrons pas davantage sur un sujet qui serait long à épuiser, mais qui est déjà convenablement élucidé; mais l'étude des marches régulières resterait incomplète si nous passions complètement sous silence celles de ces marches composées de portions de marches types entrecoupées de telle sorte que les deux moitiés de la marche totale soient symétriques par rapport au centre de l'échiquier, comme le sont entre elles les deux moitiés d'une marche partielle type. La clef de ces études nous est donnée par la substitution à une marche de sa résultante et l'application des deux théorèmes évidents ci-après :

THÉOREME I. — *Étant donné un certain nombre de marches rentrantes comprenant entre elles toutes les cases de l'échiquier, sans qu'une seule case fasse partie de deux marches, si l'on peut former une marche rentrante d'un certain nombre de sauts en*

Fig. 8.



empruntant dans un sens ou dans l'autre à chacune des marches une portion de son parcours et les reliant par un seul saut de soudure, les portions laissées de côté dans chaque marche formeront aussi une marche rentrante dans laquelle les portions appartenant aux mêmes marches se succéderont dans le même ordre, mais seront parcourues en sens inverse si les sauts de soudure sont exécutés dans le même sens.

Comme cas particulier, si dans une marche rentrante on remplace un certain nombre de ses côtés par des marches à cases distinctes de la marche et qui les admettent comme résultantes, on obtiendra une marche rentrante.

Si les marches substituées aux côtés supprimés au polygone rentrant primitif comprennent avec les côtés restants toutes les cases de l'échiquier, on aura composé une des marches rentrantes complètes de 64 sauts du cavalier sur l'échiquier.

THÉOREME II. — *Si deux séries de cases présentent une symétrie quelconque éléments par éléments, et que la dernière case de la marche non rentrante constituée par la première série soit à distance de saut de cavalier de la première marche de l'autre, il en sera réciproquement de même de la dernière case de la seconde marche et de la première case de la première marche ; les deux marches réunies formeront par suite une marche rentrante.*

Marches rentrantes dédoublées par demi-échiquier.

Corollaire. — On formera ainsi une marche rentrante complète si l'on comprend toutes les cases de deux quartiers de l'échiquier dans une marche de 32 sauts telle que la case d'arrivée, 32^e, soit en communication avec la case extérieure qui doit être considérée comme symétrique de la case de départ 1, suivant le mode de symétrie possible devant exister entre la portion parcourue et celle laissée vide sur l'échiquier.

Étant donné l'ensemble de deux quartiers de l'échiquier, ils formeront, suivant qu'ils seront adjacents ou opposés, un système symétrique des deux autres, dans le premier cas à volonté par centre ou par axe, dans le second par axe seulement. Or les cases de départ, étant nécessairement de même couleur, ne peuvent se correspondre que par symétrie par rapport au centre, et non aux axes, de l'échiquier ; on devra accoler, pour les parcourir en entier d'une course continue deux quartiers adjacents, c'est-à-dire I et II, ayant III et IV pour correspondants symétriques, ou I et IV, dont les correspondants par symétrie seront III et II. Cela posé, le côté de soudure doit être à cheval sur la médiane de l'échiquier limite commune des deux groupes, et par conséquent les cases de départ et d'arrivée 1 et 32 ne sauraient être extérieures à la bande de deux cases de largeur voisine de cette médiane. On voit de plus immédiatement que les deux cases ne sauraient être à la fois sur la tranche de cases non contiguë à la frontière et qu'une au moins doit être sur la frontière même ; nous supposerons que c'est la case de départ, ce qui s'obtiendrait par retournement de la marche dans le cas où elle serait case d'arrivée. Il suffit en outre d'étudier l'accolement de deux quartiers déterminés, I et II par exemple, l'autre s'en déduisant par symétrie axile.

Quelques essais suffisent à se convaincre que les marches en voltes doivent être, en raison du rapprochement des quatre angles, décrites sans interruption dans leur intégrité, sous peine de ne pouvoir relier à la portion ultérieure de la marche les cases omises de ces voltes sans s'exposer à un arrêt immédiat.

Nous pouvons choisir le quartier I pour celui de départ, le départ dans le quartier II s'en déduisant par symétrie axile. Il n'y a

donc que quatre cases de départ à considérer, celles de la tranche inférieure du quartier I. L'étude se fera par diagramme symbolique, en représentant chaque volte par sa résultante et traçant son côté de soudure avec la suivante, ce qui réduit à 16 le nombre de côtés du diagramme symbolique. On formera aisément des marches issues de chacune des cases x, α, μ, m ; mais elles viendront toutes se terminer également sur la tranche inférieure aux diverses cases en communication avec la symétrique de la case de départ par rapport au centre de l'échiquier.

Il n'y a donc sur la seconde tranche de case de départ ni d'arrivée possible. Nous signalons ce fait au lecteur en avouant que la raison théorique nous en a échappé; mais la démonstration empirique n'en est ni longue ni difficile : il suffit de prendre successivement les quatre cases de la seconde tranche comme cases de départ et l'on s'aperçoit bien vite que l'on ne peut par voltes complètes remplir à partir d'elles, d'un circuit continu, que les seize cases appartenant à deux systèmes de voltes, l'une en carré et l'autre en losange.

Les éléments en voltes permettront de trouver ainsi, avec un travail peu considérable de tâtonnements, des marches régulières satisfaisant aux conditions voulues. Quelle que soit la case d'entrée dans une volte, on peut en effet choisir le sens de sa description, puisqu'elle est rentrante, et par suite la terminer sur une case voisine de la frontière; la couleur se réglant d'elle-même en raison du nombre de sauts, on comprend que toutes les marches de 32 sauts obtenues par ce procédé se ramèneront à la condition exigée par de légères modifications, si elles n'ont pas été du premier coup entièrement satisfaisantes. Nous signalerons comme exemple la marche *dextrorsum*

$x, I (A, C), II (A, C), I (D, B), II (D, B),$

c'est-à-dire commençant à la case x du premier quartier, et décrivant successivement dans le sens positif les voltes A et C dans le quartier I, A et C dans le quartier II, puis D et B dans le quartier I, et enfin D et B dans le quartier D. La case de départ est la case x ou 4 de la marche A; la case d'arrivée, 32^e, est la case 23, marche B, quartier II, en communication avec 12, symétrique centrale dans le quartier IV (marche A) de la case de départ. La

marche symétrique au centre débutant à la case 12 se terminera à la case 31, marche B (quartier IV), en communication avec 4 (marche A), case origine. La réunion des deux marches symétriques donne donc une marche totale rentrante.

Autres exemples; marches de sens variés dans l'indication desquelles le signe + ou — précédant une suite de voltes désignées comme ci-dessus indique le sens de la marche des voltes comprises depuis ce signe jusqu'au suivant :

2^e marche α , B (I, II) — D (I, II) — II, C + II, A + I (C, A),

partant de la seconde case à partir du centre pour aboutir à la première dans le même quartier; suivant les voltes décrites de sens positif, B dans les quartiers successifs I et II; puis D dans le sens négatif d'abord dans le quartier I, puis dans le quartier II; C dans le sens négatif, quartier II; A dans le quartier II, sens positif; enfin C et A dans le quartier I et le sens positif.

3^e marche m , D (I, II) + B (II, I) + A (I — II) + C (I, II),

de la 4^e case à partir du centre sur l'horizontale à la 3^e dans l'autre quartier.

Les diagrammes complets ou symboliques seront formés sans peine; nous ne les donnerons point, pour ne pas augmenter inutilement le nombre des figures.

Marches spirales sur la circonférence et le centre.

Signalons maintenant une marche, ou plutôt un type de marches, régulière, fort belle, formant une spirale continue à spires décrites alternativement sur le pourtour ou circonférence de l'échiquier et sur le centre ou quartier central. Cette marche nous a été inspirée par le désir de marier l'idée géométrique de régularité symétrique des éléments à combiner avec la tendance naturelle à tout joueur d'échecs étranger à la science de diriger ses tâtonnements en longeant le plus longtemps possible le contour de l'échiquier. Elle dérive du reste très simplement de nos types de marches en voltes, groupés en deux systèmes d'après la couleur de la case d'entrée.

Si l'on isole sur l'échiquier la partie centrale de dimension

égale à un quartier, c'est-à-dire le quartier doublement dérivé des quatre, l'échiquier sera divisé en un quartier central de quatre cases de côté et un cadre de deux cases de largeur. Le carré central sera formé de la case la plus rapprochée du centre dans les 16 voltes, et le pourtour formant cadre renfermera les trois cases éloignées de toutes ces voltes.

Cela posé, considérons sur l'une des marches types quelconques deux cases en communication par saut de cavalier à cheval sur la limite des deux régions, c'est-à-dire dont l'une soit intérieure au carré central, l'autre extérieure ; elle sera la ligne de fermeture d'une marche rentrante dans laquelle les 12 cases de pourtour forment un premier circuit extérieur parcouru dans un sens déterminé, le second circuit intérieur composé des quatre cases du quartier central étant parcouru postérieurement dans le sens opposé. Il sera, dès lors, facile de former des marches rentrantes totales composées avec ces nouveaux types de marches rentrantes, partielles comme on l'avait déjà fait avec les types primitifs.

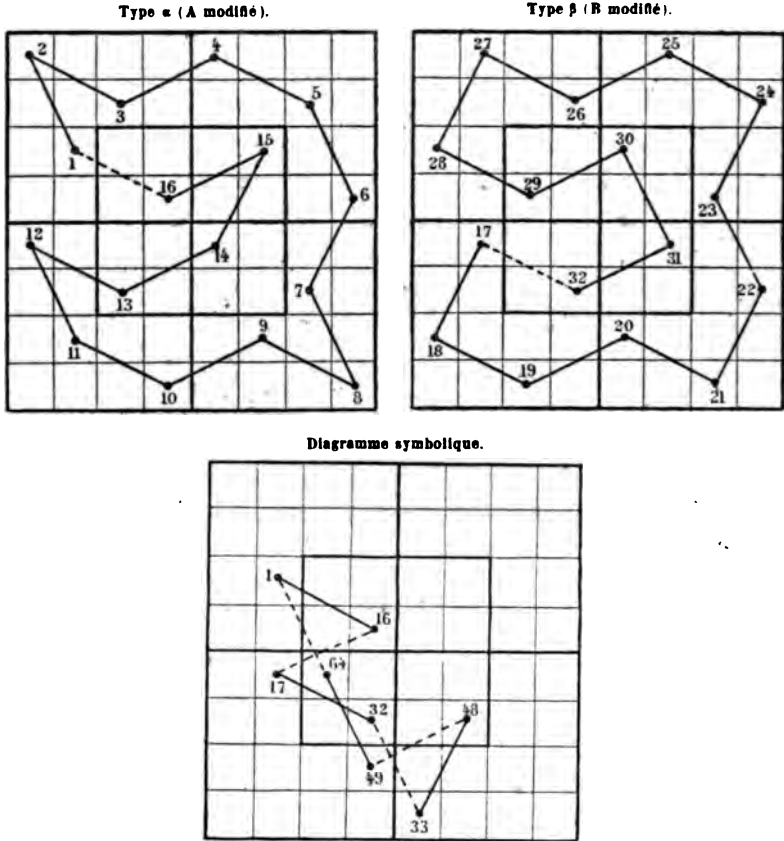
L'étude empirique, extrêmement prompte et facile, se réduira, comme pour les marches partielles en voltes à l'établissement d'un polygone de huit côtés formé alternativement de la résultante d'une marche partielle rentrante du nouveau type en spirale et de sa ligne de soudure à la marche suivante. Ces soudures sont évidemment réglées par les mêmes conditions que précédemment. Sans entrer dans de plus grands détails, nous nous bornerons à un exemple dont la *fig. 9* ci-après donne la représentation des éléments et le diagramme symbolique.

Prenons le type α (ou A modifié ainsi qu'il vient d'être dit), et conservons les cases extrêmes ; le pourtour sera parcouru de gauche à droite, puis le carré central de droite à gauche, ce que nous désignerons par la notation expressive $+A - \alpha$; la partie extérieure du type étant représentée par la lettre majuscule et la partie intérieure par la minuscule, le signe qui précède désignant le sens de la description. Représentant de même par B, β ; Γ , γ ; Δ , δ les portions extérieures et intérieures des types en spirale modifiés de B, C, D, et sans se préoccuper bien entendu des points de départ, qui s'imposent d'eux-mêmes, on formera sans peine la marche complète en spirale la plus régulière, commençant à la case 1,

$$1 A - \alpha - B + \beta - D + \delta + \Gamma - \gamma,$$

dans laquelle chaque marche partielle spirale type est décrite d'un seul parcours, la spirale extérieure la première, la spirale intérieure postérieurement avec rebroussement entre les deux.

Fig. 9.



On remarquera que les spires $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ se confondent avec les voltes d, c, b, a du type conjugué dans les marches en voltes du type qui fournit la marche. Comme pour les fonctions périodiques la dérivation double reproduit la quantité primitive, identique ici, dans deux directions opposées, en raison même de sa symétrie centrale relativement à elle-même.

On remarque que, pour obtenir des marches partielles de deux spires, l'une intérieure, l'autre extérieure, rentrantes, on doit

admettre un rebroussement (changement de sens de parcours) entre la spire extérieure et la spire intérieure; cette condition étant supprimée, on obtient des marches de deux spirales extérieure et intérieure sans rebroussement intermédiaire, qui, bien que n'étant pas rentrantes sur elles-mêmes, pourront néanmoins entrer dans la composition d'une marche totale rentrante. Ainsi la marche rentrante

$$1 A - \alpha - B - \beta - \Delta - \delta + \Gamma + \gamma$$

n'a que deux rebroussements, l'un entre les deux spirales d'une même marche spirale partielle, l'autre entre deux marches partielles, le nombre des rebroussements étant toujours pair.

Enfin on peut obtenir une marche totale en spirale sans rebroussement, telle que la marche *dextrorsum*

$$\begin{array}{ccccccc} & 5 & 17 & 41 & 53 & & \\ A & \alpha & B & \beta & \Delta & \delta & \Gamma & \gamma, \\ 15 & 22 & 46 & 62 & & & & \end{array}$$

dans la notation de laquelle la case d'entrée dans une marche est indiquée au-dessous et la case de sortie au-dessus de la lettre indicatrice de sa spire ('). La marche *sinistrorsum* sur le même circuit se noterait

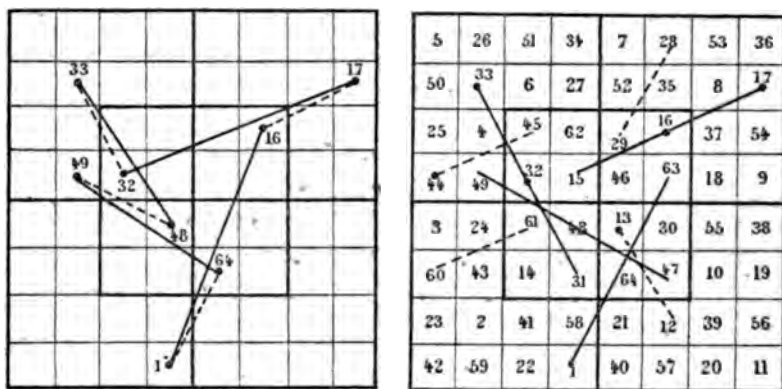
$$- \gamma \Gamma \delta \Delta \beta B \alpha A \quad \text{ou} \quad \alpha A \gamma \Gamma \delta \Delta \beta B,$$

en en réduisant la notation aux indications indispensables; on comprend en effet que la case de départ doit être indiquée, puisque la portion extérieure et la portion intérieure de la marche partielle en voltes mère peuvent se souder dans l'un quelconque des quartiers de l'échiquier et de deux manières dans chacun, donnant ainsi naissance à huit marches spirales partielles, spirales externe et interne de même sens, et à autant de marches spirales partielles à rebroussement ou spirales interne et externe de sens inverses; quatre seulement de ces dernières sont rentrantes sur elles-mêmes.

(') Les numéros des cases se rapportent à ceux de la *fig. 2* (types A, B, C, D), bases de tous les autres. Il en sera ainsi toutes les fois qu'il n'y aura pas mention contraire.

La fig. 10 donne le diagramme symbolique et le développement de la marche spirale à sens continu *dextrorsum* signalée la dernière.

Fig. 10.



Observation pratique. — Pour arriver très promptement et quasi sans travail à la composition des diverses marches fort nombreuses que l'on peut composer avec les éléments étudiés, il est bon de s'aider de quatre diagrammes représentant développées et séparément les quatre types primitifs en voltes, avec une ligne de démarcation entre le quartier central et le pourtour, ainsi que les médianes divisant l'échiquier en ses quatre quartiers, ou bien de les noter sur un même diagramme en coloriant de quatre teintes différentes les cases appartenant à chacune de ces marches, et dessinant par un filet les deux médianes et le carré central. Par ce procédé extrêmement simple et commode, les résultantes de marches ou de portions de marches sautent immédiatement aux yeux, et les tâtonnements qu'exige la composition des diagrammes symboliques se réduisent à presque rien, en même temps que les erreurs provenant d'une inadvertance seront presque absolument évitées. Ces mêmes diagrammes serviront pour composer les marches spirales, et les cases de l'échiquier pourront toujours être désignées par le numéro d'ordre de passage du cavalier dans la première marche régulière *dextrorsum* trouvée que portent les diagrammes de la fig. 2.

Remarque. — La marche spirale *dextrorsum* à sens continu

donne lieu à quelques remarques intéressantes par comparaison avec la première marche spirale donnée, qui possédait un rebroussement entre chaque spire. Pour les marches de sens continu, les points de passage ont lieu dans la description *dextrorsum* de la spirale intérieure d'une marche partielle à la spirale extérieure de la marche suivante, et suivant une marche de trois cases en ligne droite, c'est-à-dire que la ligne de soudure est le prolongement en ligne droite du dernier saut dans la marche intérieure. C'est en réalité une inflexion double remplaçant deux changements de sens successifs dans la courbure de la spirale, existant dans la première en ses points de rebroussement. Les quatre inflexions sont, dans les quatre directions différentes, perpendiculaires deux à deux, que prennent les huit pas de cavalier, et leurs tangentes s'inclinent successivement dans le sens de la rotation.

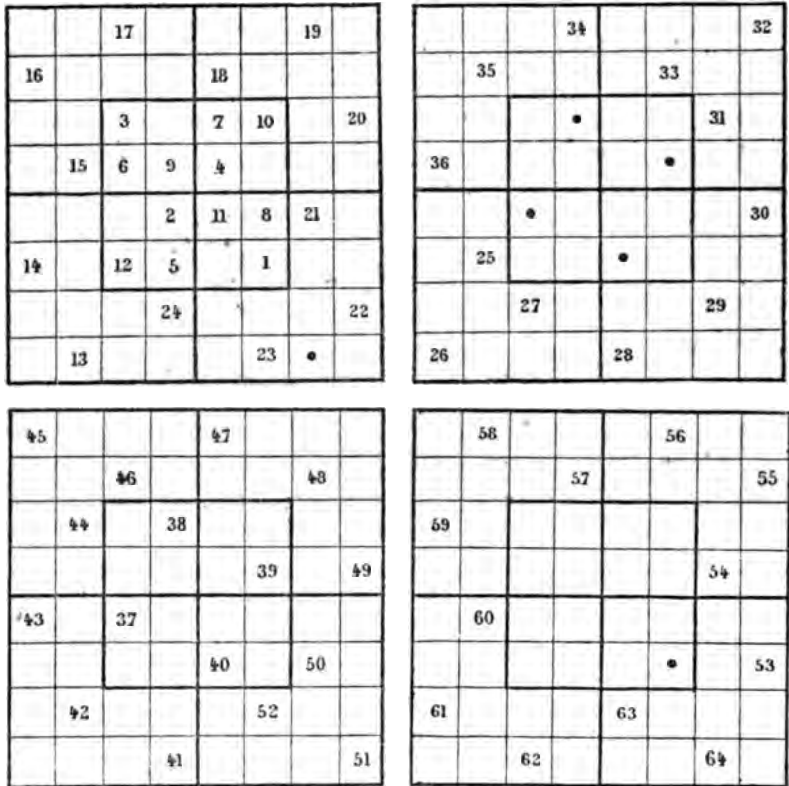
Solution condensée en nébuleuse, ou carrousel du cavalier.

Une dernière solution, également fort curieuse, est celle où l'on cherche à remplir le plus possible de cases consécutives dans le carré central. On reconnaît immédiatement que ce nombre maximum sera de 12 en pénétrant dans le carré par un angle et en sortant par l'un des angles adjacents. Cette solution, décrite dans les quatre diagrammes ci-joints (*fig. 11*), emprunte aux marches spirales leurs éléments extérieurs. On remarquera que les deux marches qui contiennent les angles de l'échiquier, dérivées de A et Δ , se succèdent l'une à l'autre par l'intermédiaire d'une soudure formée de la volte carrée qui reste encore à décrire dans le carré central. A proprement parler, cette solution se compose de six marches partielles, soit, en commençant par le quatrième diagramme 54, 55, ... et continuant par les premier, deuxième et troisième diagrammes : deux marches circulaires extérieures simples de douze cases chacune, uniformément réparties entre les quartiers, se succédant par l'intermédiaire d'une nébuleuse centrale de douze cases également ; enfin deux marches circulaires extérieures faussées chacune en deux des angles opposés de l'échiquier par un saillant, ces deux marches, de douze cases chacune, unies par la petite couronne intérieure de quatre marches.

Dans la marche notée, il y a changement de sens d'une marche

à l'autre lorsque le cavalier traverse de dehors en dedans la limite entre le pourtour et le carré central. D'autres marches de composition analogue présenteront au contraire le changement de sens

Fig. 11.



dans la marche lorsque le cavalier franchira la limite de dedans en dehors.

Cette marche, qui offre une succession de figures d'une grâce particulière, pourrait être désignée sous le nom de *carrousel du cavalier* et rappelle très fidèlement la figure du carrousel qui est connue en équitation sous le nom de la *mélée*.

La combinaison des éléments de cette marche, diversement groupés et orientés, peut fournir d'autres marches dessinant de même les diverses phases de la *mélée* du carrousel, alors que les

marches en voltes, les demi-échiquiers successifs et les spirales ne sont encore que différentes figures également décrites par les quadrilles d'écuyers.

On peut de la marche précédente, et en groupant ses éléments successifs, déduire la suivante (chiffres des derniers diagrammes),

$$1, \dots, 12, \overline{61, \dots, 62}, 25, \dots, 52, \overline{21, \dots, 22},$$

dans laquelle les polygones formant les quatre groupes interrompus sont décrits les deux impairs dans le sens du diagramme, les deux pairs en sens inverse.

Observations générales.

Étant donnée une marche, rentrante ou non sur l'échiquier, on en déduit de même nature :

- 1° Une symétrique par rapport à la médiane verticale ;
- 2° Une symétrique par rapport à la médiane horizontale ;
- 3° Une symétrique par rapport au centre, symétrique de chacune des précédentes par rapport à l'axe différent de celui qui lui a donné naissance.

Cette série de quatre se double encore par les séries qui leur sont symétriques par rapport aux diagonales, ce qui porte à huit le nombre des marches irrégulières se correspondant par symétrie.

Chaque marche peut, en outre, être parcourue dans les deux sens contraires, et l'on a définitivement un nombre de seize marches pour lesquelles les cases homologues sont parcourues dans le même ordre ou en ordre inverse.

Ces seize marches, si elles sont rentrantes, donnent lieu à $16.64 = 2^{10} = 1024$ marches différentes entre elles par l'orientation, le sens, ou la case de départ, qui est arbitraire sur l'échiquier, mais que l'on peut considérer comme appartenant à un type unique et ne formant en réalité qu'une solution distincte du problème.

Lorsqu'une marche possède une ou plusieurs symétries sur elle-même, le nombre des marches qui s'en déduit doit être divisé par autant de fois le facteur 2 qu'il existe de symétries.

Par exemple, dans les marches régulières étudiées, les types élémentaires sont tous symétriques d'eux-mêmes par rapport au centre ; les deux types en losange sont symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe horizontal ainsi qu'à l'axe vertical, et de même les deux types en carré. Les trois premières symétries ne donnent point de multiplication de marche, et la symétrie diagonale seule reste pour en doubler le nombre, car elle existe dans la marche même pour les marches losanges et d'une marche à l'autre pour les carrés. Les marches que l'on composera avec les types réguliers entiers par l'intervention d'ordre et de sens dans les marches se doubleront simplement par la symétrie diagonale et donneront lieu à quatre marches seulement, deux dans un sens et deux dans l'autre, soit deux cent cinquante-six en tout, avec les changements d'origine pour les marches rentrantes.

La symétrie par rapport au centre respecte le sens de la marche ; celle par rapport aux axes la change de signe, et par conséquent change également la couleur d'entrée dans les quartiers ; les lignes de soudure se changent également en leurs symétriques par rapport à l'axe de symétrie. Les quartiers sont également permutés entre symétriques par rapport audit axe, ce qui renverse l'ordre de visite.

Si pour rétablir le sens de description, indépendant du circuit sur lequel on l'exécute et arbitraire, on renverse la marche symétrique de la première, la nouvelle permutation entre les cases d'entrée et de sortie rétablit la couleur primitive de ces cases, mais laisse le passage s'effectuer sur les lignes de soudure symétriques des premières. Toutes ces modifications reviennent, suivant l'axe de symétrie choisi, à des permutations faciles à trouver entre les types en losange, et de même entre les types en carré, avec modifications dans les quartiers de début de certaines marches. A ce sujet on se souviendra, pour l'indication des marches obtenues par symétrie d'une marche connue, que les types A et A₁ ne diffèrent que par une rotation d'un quadrant, c'est-à-dire une permutation tournante dans les quartiers de voisin à voisin, et qu'il en est de même entre les types B et B₁, les types C et C₁ et les types D et D₁.

Par symétrie suivant les diagonales, les types en losange sont maintenus, les types en carré échangés ; la symétrie par rapport

aux médianes permute au contraire à la fois les deux types en losange, ainsi que les deux types en carré.

Comme exemple, prenons la marche rentrante désignée par les voltes qu'elle emprunte à chaque marche partielle (types sans indices pour les numéros) :

$$\overset{26}{17}B(I, II) - \overset{36}{47}D(I, II) + \overset{32}{61}C(I - II) + \overset{16}{9}A(III, IV).$$

Formons sa symétrique par rapport à la diagonale gauche, commune aux quartiers impairs :

$$- \overset{60}{61}C(I, IV) + \overset{45}{48}D(I, IV) - \overset{32}{17}B(I - IV) - \overset{6}{11}A(III, II);$$

le sens de toutes les marches est renversé, les types losanges sont conservés, les types en carrés permutés; enfin les quartiers impairs traversés par la diagonale axe de symétrie conservée, et les quartiers pairs en dehors de la diagonale axe permutés.

Si nous retournons la marche pour lui rendre le sens primitif général, nous obtiendrons :

$$\overset{61}{60}C(IV, I) + \overset{11}{6}A(II, III) - \overset{17}{32}B(IV - I) - \overset{46}{44}D(IV, I).$$

Nous n'avons pas voulu distinguer dans ce qui précède les marches similaires avec ou sans indice, à cause des numéros d'entrée et de sortie, que nous tenions à indiquer pour faciliter la vérification au lecteur, et qui ne pouvaient, sous peine de compliquer et embrouiller les séries, être empruntés tantôt aux diagrammes de la *fig. 2*, tantôt à ceux de la *fig. 5*. L'écriture serait plus correcte en inscrivant pour la première des trois marches

$$(de\ 17)\ B(I, II) - D_1(I, II) + C(I - II) + A(III, IV)\ (à\ 16),$$

pour la seconde

$$(de\ 20) - C_1(I, IV) + D(I, IV) - B_1(I - IV) - A_1(III, II)\ (à\ 5),$$

où l'on reconnaît toutes les règles de transformation par symétrie : changements de sens, permutations de quartiers avec indice et sans indice, en raison du changement d'orientation des lignes de soudure; maintien des losanges, permutation des carrés, maintien

des quartiers impairs et permutation des quartiers pairs. On aurait enfin pour la dernière

$$(de\ 29)\ C_1(IV, I) + A_1(II, III) - B_1(IV - I) - D(IV, I) \text{ (à 45),}$$

dans la notation de laquelle les fractions de marches sont indiquées telles qu'on les trouverait sur les diagrammes de l'une ou l'autre *fig.* 2 et 5, avec le numéro correspondant.

Nous terminerons ici ce travail encore fort imparfait, nous ne craignons pas de l'avouer, mais qui, même dans ces conditions, nous a paru présenter assez d'intérêt pour nous permettre de le porter à la connaissance des géomètres; car il n'en est pas moins, à notre connaissance, l'un des premiers pas d'exploration en des régions encore inconnues et qu'Euler n'avait pas dédaigné d'aborder. Mais, en terminant, nous donnerons, avec quelques observations qui lui viennent en aide, le principe rudimentaire énoncé par Vandermonde, principe qui s'impose et se présente de lui-même dans la pratique des tâtonnements au point que, sans le connaître et sans songer à le formuler, nous nous en étions dès le premier jour presque continuellement servi; il nous paraît néanmoins convenable de ne pas le passer sous silence.

Principe. — S'il existe (restriction oubliée par Vandermonde) un certain nombre (au moins une) de marches reliant par saut de cavalier toutes les cases de l'échiquier, on arrivera nécessairement à en obtenir une par le tâtonnement suivant :

Le cavalier partant d'une case origine quelconque, on lui fait parcourir par sauts (en la notant) une marche quelconque composée d'un certain nombre de cases et évitant de visiter deux fois la même, jusqu'au point d'arriver à une case dont il ne puisse plus sortir sans passer par une case déjà vue.

Cela fait, ou bien les soixante-quatre cases auront été parcourues, ou bien il restera des cases vides. Dans le premier cas, le problème est résolu, mais la marche n'est pas rentrante en général.

Dans le second cas, soient A la case d'arrivée et B l'une de celles déjà vues en communication avec elle. Si B est la case origine O, la marche partielle est rentrante et peut être coupée en un quelconque de ses points. On l'y coupera en un point convenable

que l'on va déterminer, et l'on agira sur elle à partir de la nouvelle origine comme il va immédiatement être expliqué.

Dans le cas général, on suivra d'abord la marche primitive de O à B; puis, passant de B à A immédiatement, on décrira en sens inverse la portion de cette marche comprise entre A et la case C qui suivait immédiatement B. De la case C on pourra généralement trouver une case libre, et l'on poursuivra la marche O,..., B,..., A,..., C jusqu'à nouvel arrêt.

Si ce nouvel arrêt fait retomber sur une case X comprise dans la marche O,..., B et suivie de la case R dans la description de cette partie de la marche, on changera l'origine et la prendra en R, décrivant à partir de R (et dans le sens déjà adopté) le circuit précédent jusqu'à la case X, à partir de laquelle on reprend en sens inverse, de X à O, la portion de la marche que l'on avait laissée de côté au début. On revient ainsi à la première origine par une marche constituée de la manière suivante :

$$R, \dots, B, \dots, A, \dots, C, \dots, X, \dots, O.$$

Ces tâtonnements amèneront nécessairement soit à une marche comprenant toutes les cases de l'échiquier, soit à une marche rentrante sur elle-même, dernière observation négligée par Vandermonde, si, ce que nous ne pouvons vérifier, nos souvenirs ne nous trompent pas. Toutefois, si la marche est rentrante, laissant des vides sur l'échiquier, en coupant la marche en une case en communication avec l'une des cases étrangères, on peut y englober celle-ci et toutes celles également étrangères qui formeraient avec celle-ci une marche continue, rentrante ou non. La marche totale résultante pourra n'être point rentrante; mais on décomposera sans la moindre difficulté l'échiquier en un certain nombre de marches rentrantes que l'on soudera ensuite deux à deux et qui serviront de base au travail définitif.

Remarque. — Lorsque l'on procède par tâtonnements à la formation d'une marche, il est commode de considérer en même temps une ou plusieurs des marches symétriques, soit au centre, soit par diagonales, soit par médianes, en évitant de les faire empiéter les unes sur les autres; on soudera ensuite entre eux les divers éléments obtenus. Cette simple remarque a été la base de

nos recherches et, avec l'application quasi inconsciente du principe de Vandermonde, nous a permis de trouver avec très peu de travail les marches types, dont nous avons par la suite donné l'explication raisonnée, à la fois rationnelle et analytique, qui constitue le corps du présent essai.

Le Souan-pan des Chinois et la Banque des argentiers ;
par M. LÉON RODET.

I.

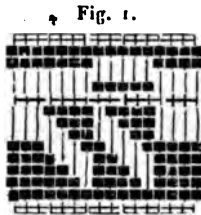
J'ai eu la bonne fortune de me trouver dernièrement en rapport avec un jeune homme, M. Arnold Vissière, diplômé de l'École des langues orientales vivantes pour le chinois, et aujourd'hui interprète de l'ambassade brésilienne à Canton. Sur ma demande, M. Vissière avait bien voulu entreprendre l'étude des Mathématiques chez les Chinois, étude qui a été à peine effleurée par Ed. Biot, et il avait déjà entrevu une ample moisson de faits curieux lorsque son départ pour la Chine est venu le forcer à interrompre ses recherches. Il m'a signalé, entre autres choses importantes, parmi les trésors de notre Bibliothèque nationale, qu'il se proposait de mettre amplement à profit, une biographie des auteurs chinois qui ont écrit sur les Mathématiques et l'Astronomie, avec appréciation du mérite de leurs Ouvrages.

M. Vissière n'avait eu le temps de me faire connaître que fort peu de choses qu'il avait découvertes dans un Ouvrage analysé jadis par Biot, et intitulé *Souan-fa-thong-tsong*, « Recueil général des règles du calcul, » qui, composé au xv^e siècle de notre ère, sert encore de Livre classique pour l'enseignement du calcul en Chine. Parmi les faits curieux qu'il m'avait signalés se trouve celui-ci. Dans ce Traité, tous les calculs sont expliqués pour être effectués sur la planchette appelée *souan-pan*, sorte d'*abacus* dont l'usage est universel en Chine ; les marchands et, paraît-il, d'après l'Ouvrage en question, les savants, ne font pas leurs calculs autrement qu'à l'aide de ce petit outil, très portatif du reste.

Il se compose d'une série de broches tenues par un cadre et partagées par une petite réglette, que les broches traversent, en deux parties d'inégale longueur. Des boules, au nombre de cinq dans la partie inférieure, de deux dans la partie supérieure, la plus courte, sont enfilées dans les broches, pouvant glisser très aisément, le tout offrant une disposition analogue à ces cadres qui servent à marquer les points des joueurs au jeu de billard; seulement le souan-pan se pose à plat sur une table, les broches placées d'arrière en avant.

Chacune de ces broches représente un ordre d'unités décimales : les cinq boules inférieures valent chacune 1 unité, les supérieures en valent 5. On marque un nombre sur sa broche en approchant les boules, en quantité convenable, de la réglette intermédiaire.

Ainsi la figure suivante représente les neuf premiers nombres.



La position du nombre, ou, si l'on veut, le choix de la broche des unités sur l'appareil, est tout à fait arbitraire; on verra même, par les exemples d'extraction de racine carrée, qu'on écrit plusieurs nombres à la fois sur le même souan-pan. Pour la facilité des commençants, on peut coller sur la réglette, en face de chaque broche, l'indication de la valeur numérique de cette broche. C'est ainsi que, dans une figure destinée à représenter la division de 123456789 *tcho* (unité de capacité) par 6, chaque broche porte sur la traverse l'indication du multiple de ladite unité qui y correspond; et, comme la division conduit à une moitié, le 5 qui correspond à cette moitié au quotient porte le signe de *cuiller*, *cochlearium*, dixième partie du *tcho*.

Comme exemple de la façon dont on effectue les calculs sur cet appareil, je vais citer celui de l'hypoténuse d'un triangle rectangle, que M. Vissière a bien voulu traduire mot à mot du Manuel chinois. J'accompagnerai cette explication de figures destinées à faire voir

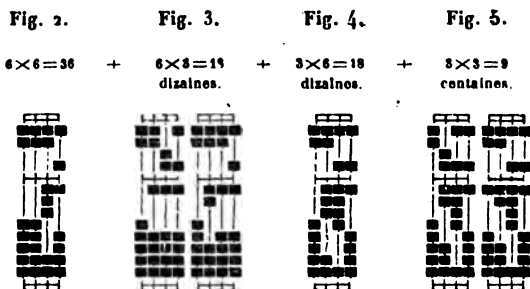
la disposition des boules sur leurs broches pendant le cours de l'opération. Je ne représente, bien entendu, que les broches utiles, en remarquant que, si rien de particulier n'est dit à ce sujet, la position de la broche des unités est absolument arbitraire sur la planchette.

« *Du crochet-et-jambe (triangle rectangle)* ⁽¹⁾. — Le côté en travers et en large (la base) se nomme le *crochet*, le côté dressé et en longueur (la hauteur) s'appelle la *jambe*, et la ligne qui part en biais entre les deux pointes s'appelle la *corde d'arc* (l'hypoténuse).
.....

» On a un crochet de 27 pieds et une jambe de 36 pieds : on demande combien a la corde en biais.

» Réponse : corde en biais, 45 pieds.

» *Méthode*. — Posez la jambe, 36 pieds, et multipliez-la par elle-même;

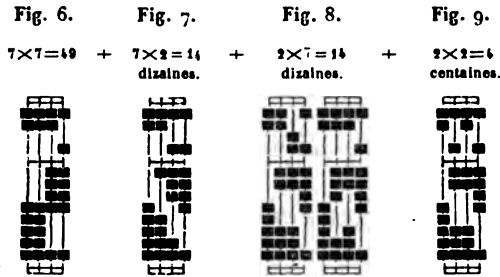


vous trouvez pour son *plein* 1296 pieds ⁽²⁾.

⁽¹⁾ L'auteur ajoute, à titre d'explication, que le « crochet-et-jambe » n'est autre chose que l'équerre des ouvriers.

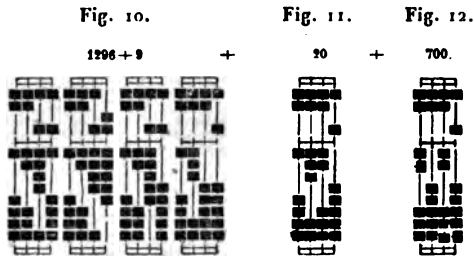
⁽²⁾ Lorsque plusieurs figures sont juxtaposées, la première ou les premières représentent un état transitoire du calcul : ainsi, dans la *fig. 3*, la première moitié fait voir le commencement de l'addition de $36 + 180$; la centaine est inscrite à sa place, ainsi que le 5 contenu dans 8 dizaines; un second 5 est formé des trois dizaines restantes et de deux des trois existant déjà sur la broche; mais, comme deux boules de 5 valent 10, la seconde partie représente ces deux boules de 5 dizaines remplacées par une boule de centaines, et donne le résultat définitif $36 + 180 = 216$.

» D'autre part, multipliez également le crochet, 27, par lui-même.



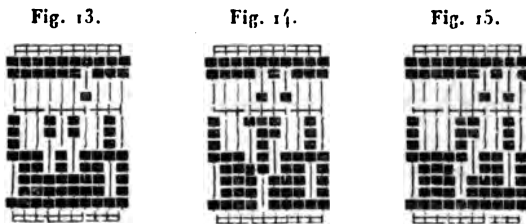
et vous obtiendrez son *plein* 729 pieds.

» Ces deux nombres, additionnés, font 2025 pieds, *nombre masse* (antécédent d'un rapport, dividende, nombre proposé dans



un problème) égal au *plein* de la corde multipliée par elle-même, que nous allons *ouvrir* par la règle de l'*ouverture du plein à plat*.

» La première estimation est 40, que vous placerez à gauche ; posez également 40 à droite, ce qui sera le *nombre type* (conséquent d'un rapport, diviseur) du carré (*fig. 13*).



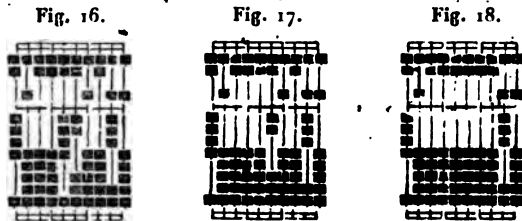
» 4 à gauche vis-à-vis de 4 à droite appellent 4 [fois] 4 ou 1600

pieds à retrancher du *nombre masse* (fig. 14) ⁽¹⁾. Le *nombre masse* restant est 425 pieds (fig. 15).

» Alors doublez le nombre type du carré 40, première estimation, à droite, ce qui fait 80, nombre type des *goussets*. La seconde estimation est 5 pieds, que vous placerez à la suite de la première estimation 40, à gauche, et également à droite, à la suite de 80, nombre type des *goussets*, ce qui fait [de ce 5] le *nombre type du coin* (fig. 16).

» 5 à gauche en face de 8 à droite appellent 5 [fois] 8, 400 pieds à retrancher du nombre masse (fig. 17).

» En outre, 5 à gauche, en face de 5 à droite, appellent 5 [fois] 5, 25 pieds, à retrancher du nombre masse.



» Le nombre masse étant épuisé exactement (fig. 18), on obtient pour la *corde* ou *ligne en biais* 45 pieds. »

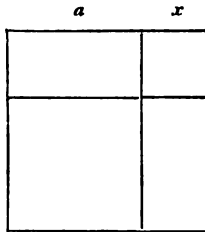
Cette opération se comprend d'elle-même; je n'ai donc besoin que d'ajouter un mot pour expliquer les expressions de *nombre types* du carré, des *goussets*, du *coin*, qui ont été employés par l'auteur.

Elles proviennent de ce que les Chinois, comme les Arabes (*voir mon Algèbre d'Al-Khârizmi*), comme les Grecs, comme probablement tous les anciens mathématiciens, avaient déduit la règle d'extraction de la racine carrée, non pas, comme nous le faisons implicitement aujourd'hui et comme pouvaient le faire les Indiens, au moins depuis Aryabhata, de la formule algébrique

$$(a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2,$$

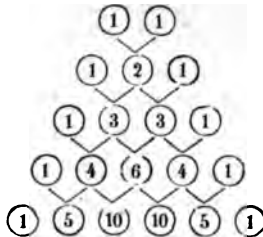
⁽¹⁾ La fig. 14 représente le nombre 2025 préparé pour permettre la soustraction de 1600.

mais bien de la figure géométrique



composée d'un *carré principal* égal à a^2 , de deux *goussets* valant ensemble $2ax$ et d'un petit carré en coin x^2 .

Telle est l'explication donnée par l'Ouvrage lui-même pour la série des opérations concernant la racine carrée. Pour la racine cubique (dont M. Vissière n'a pas eu le temps de me traduire d'exemple), la règle pratique pour son extraction se déduit du *triangle arithmétique*, que les Chinois figurent ainsi :



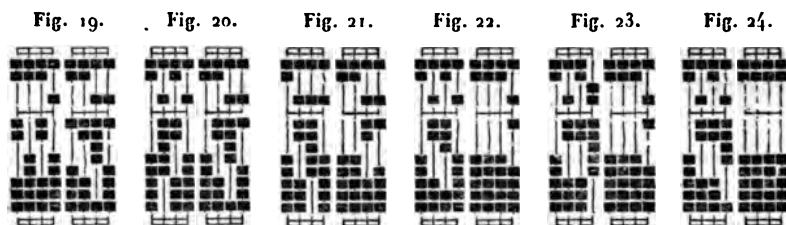
Ed. Biot, qui a déjà signalé l'existence de cette figure dans un article du *Journal des Savants*, a eu le tort, en reproduisant la figure, de supprimer les encadrements circulaires qui entourent les coefficients et les lignes qui indiquent la généalogie de ces coefficients.

Autre remarque encore : le *carré* d'une ligne s'appelle en chinois son *plein*, plus précisément encore son *plein à plat*, comme qui dirait son *carré plan*, le *cube* s'appelant le *plein dressé* ou *debout*.

Quant au terme qui sert à exprimer l'extraction de la racine carrée ou cubique, à savoir l'*ouverture du plein à plat ou debout*, il m'a fait souvenir sur-le-champ que les Anglais appellent *involution*

l'élévation aux puissances et *évolution* l'extraction des racines. Je n'ai pas encore pu trouver l'origine de ces deux expressions; je n'ai pas été peu étonné, du reste, de trouver une d'elles en chinois.

La soustraction, sur cet appareil (et tous les similaires), s'effectue plus simplement et plus naturellement en commençant l'opération par les plus hautes unités, comme on en jugera d'après l'exemple suivant, qui représente les phases successives de la soustraction $2025 - 1296 = 729$ (') :



A vrai dire, cette manière de procéder est plus rationnelle : il est tout naturel que, une fois qu'on a établi le restant en unités d'ordre supérieur, on puisse disposer librement d'une ou plusieurs de ces unités restantes pour satisfaire à la demande des unités inférieures. C'est ce qui explique pourquoi les anciens auteurs, Aben-Ezra (à Rhodes au XII^e siècle), Al-Morouzi (à Merv cent ans plus tard), prescrivent de commencer la soustraction par la *gauche*. Mais lorsqu'on a commencé à opérer à *la plume*, comme ce mode de procéder obligeait à barrer les chiffres déjà posés pour leur en substituer d'autres moindres, on a préféré commencer l'opération par les unités inférieures, ce qui donne immédiatement le reste à écrire.

Voilà tout ce que j'ai pu apprendre du maniement du souan-pan; je me suis néanmoins décidé à le publier, parce que j'ignore quand il me sera donné maintenant de compléter mes connaissances à ce sujet. Il resterait pourtant à savoir quelques détails utiles : comment

(') Ici, les deux figures accouplées représentent : la première, le nombre dont on retranche, la deuxième, celui que l'on retranche. J'ai fait disparaître à chaque fois de ce dernier les boules que je retranchais du premier. Aux *fig.* 20, 21 et 23 j'ai en plus transformé une boule supérieure en $5 + 5$ de l'ordre inférieur, afin de rendre la soustraction possible.

on effectue les calculs avec fractions non décimales (les sous-multiples des unités de mesure en Chine sont tous décimaux); comment on pose et résout une proportion, une règle de trois (et de cinq, de sept, etc., comme disent les Indiens); comment on traite les problèmes de fausse position. On connaît à ce propos la méthode arabe de double fausse position qu'on appelle (en arabe) *el-khataïn*, les deux péchés, et qu'on applique à la recherche de la valeur de l'inconnue qui satisfait à la condition $f(x) = b$, f étant d'ordinaire une fonction du premier degré, mais d'un énoncé un peu compliqué. Les arithméticiens arabes tracent ce qu'ils appellent une *balance*, ainsi faite :

$$\begin{array}{ccc} \beta - b & & \beta' - b \\ \hline \alpha & & \alpha' \\ \hline b - \beta & & b - \beta' \end{array}$$

sur le point de suspension de laquelle ils écrivent la valeur b imposée à la fonction. Ils placent dans les plateaux les deux valeurs fausses prises pour x , les *deux péchés*, lesquelles fournissent pour f les valeurs β et β' différentes de b . Les différences à b de ces valeurs β et β' s'écrivent à côté du plateau, au-dessus si elles sont par excès, au-dessous si elles sont par défaut, et l'on en déduit, au moins pour le premier degré,

$$x = \frac{\beta' - b}{\alpha(\beta' - b) - \alpha'(\beta - b)}.$$

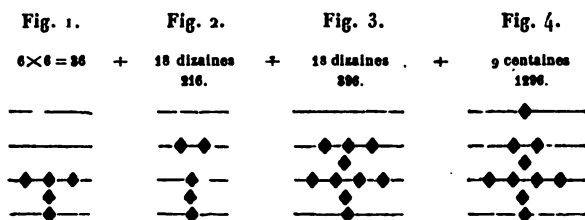
Je ne parle ici que de la disposition du calcul et non de la méthode, qui a été déjà bien des fois discutée.

II.

Dès que j'ai su faire sur le souan-pan les opérations que je viens de décrire, c'est-à-dire les *six règles* de l'Arithmétique, il m'est venu à l'idée de comparer cette manière d'effectuer les calculs à celui que les auteurs du xv^e siècle appelaient *super lineas et per projectiles* (projectiles = jetons), dont M. Treutlein a donné les éléments dans son travail intitulé *Das Rechnen im 16^{ten} Jahrhundert* (dans le premier fascicule des *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*).

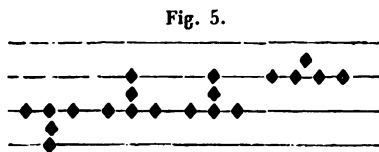
C'était le procédé dont se servaient au moyen âge les *argentiers*; les calculs s'effectuaient sur une petite table, une *banque* (*die Bank*, le banc, est encore du féminin en allemand), d'où est venue l'expression de *faire la banque*, et d'où aussi les *argentiers* se sont appelés plus tard des *banquiers*. Sur cette table étaient tracées des lignes horizontales représentant les différents ordres d'unités décimales; des jetons, *projectiles*, posés sur les lignes, représentaient les unités de l'ordre de la ligne; d'autres jetons, posés sur l'interligne, valaient 5.

Voici, d'après ces conventions, les figures successives que prenait la *banque* dans le calcul du carré de 36, en effectuant sur-le-champ, à l'exemple du calcul chinois, la réduction des produits partiels avec le nombre déjà obtenu :



Mais, en opérant sur ce dernier appareil, j'ai aperçu la particularité suivante.

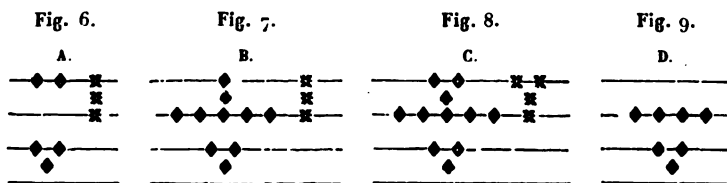
Tandis que sur le souan-pan on est obligé, vu le nombre restreint des boules sur chaque broche, de toujours effectuer immédiatement la réduction des produits partiels, ce qui fait disparaître toute trace des calculs intermédiaires, ne laissant subsister que le résultat définitif, il est possible, sur la banque des argentiers, de poser, sans les réduire, les produits partiels comme ceci :



pour ne compter qu'après tous les jetons posés sur chaque ligne et interligne, et le résultat définitif peut encore s'écrire sur la table à côté des résultats partiels, que l'on n'a pas besoin de

supprimer avant que la *preuve* de l'opération ait démontré l'exactitude du résultat final; et, si cette preuve fait voir que l'on s'est trompé, on peut reprendre chaque opération partielle, reconnaître où git l'erreur, et par conséquent la corriger. Il en résulte que le souan-pan ne peut utilement servir qu'à soulager la mémoire d'un calculateur déjà bien exercé, tandis que la banque peut être un instrument et d'études individuelles et de démonstration.

Cette observation n'est peut-être pas sans utilité pratique. On ne peut nier que le besoin ne se fasse impérieusement sentir d'avoir, pour l'enseignement élémentaire, un instrument qui permette d'initier les intelligences inexpérimentées aux principes du calcul : les innombrables inventions en ce sens qui figurent à nos expositions en témoignent surabondamment. Or la banque des argentiers, ou quelque chose d'analogue (on pourrait, par exemple, disposer les lignes verticalement), qu'il est on ne peut plus facile de réaliser économiquement avec une planche de bois tendre et des punaises, voire même avec une pelotte et des épingles, me paraît réaliser complètement les conditions requises pour un appareil de ce genre. Exposer, par exemple, et faire bien saisir la règle de la soustraction; ce qui est, je me le rappelle par expérience, une première pierre d'achoppement pour les débutants, deviendrait extrêmement facile. Il suffirait, pour éviter toute confusion, d'avoir, pour écrire le nombre soustractif, des fiches ou punaises soit d'une forme, soit d'une couleur différente de celles représentant les nombres additifs; dès lors, si l'on a, comme dans l'extraction de la racine carrée figurée plus haut, à retrancher 1600 de 2025, ce qui s'écrirait comme en A, il suffirait de transformer



la figure A en celle B, évidemment équivalente, pour justifier du coup la soustraction avec *emprunt*, ou en celle marquée C, pour faire comprendre la soustraction avec *addition arbitraire*, telle qu'on est obligé de la pratiquer dans la division. Dans l'un comme

dans l'autre cas, en enlevant autant de losanges que de croix, on tombe toujours sur le reste D : identité du résultat final, qui est bien certainement la meilleure démonstration aux yeux des débutants.

Je n'ai plus qu'une observation à faire : elle est relative à l'emploi d'un signe valant 5 dans les appareils que je viens de décrire. Si cet usage ne s'était rencontré que dans la banque des argentiers d'Occident, on eût pu croire que c'était un souvenir des chiffres romains, et qu'on avait cherché à reproduire vi, vii, ..., lx, lxx, ..., dc, dcc, ...; mais l'existence d'un pareil signe dans le souan-pan des Chinois, qui remonte à une très haute antiquité, prouve que ce signe a été inventé uniquement pour simplifier l'écriture, et mieux encore la lecture des nombres : il n'est pas commode de lire

Huit points.		Neuf points.
.	ou	

du premier coup d'œil, tandis que les figures qui précèdent se lisent très aisément.

P. S. — Dans la séance de l'Académie des Sciences du 16 juillet 1860, M. Chasles a communiqué une lettre de M. d'Escayrac de Lauture décrivant l'instrument dont il vient d'être question. M. Chasles exprime le regret de n'avoir pu reproduire, dans les *Comptes rendus* imprimés, les figures des calculs que contenait la lettre citée. Le présent article se trouve répondre aux regrets de notre honoré doyen. J'ajouterai, pour les personnes qui auraient le désir de reproduire des figures de ce genre, que je les ai exécutées au moyen des caractères de plain-chant de l'imprimerie J. Le Clère.

Sur les nouvelles formules de MM. Seidel et Stern, concernant les nombres de Bernoulli; par M. ÉDOUARD LUCAS.

(Séance du 16 avril 1880.)

M. Seidel a donné, le premier, des nouvelles formules fort remarquables sur les nombres de Bernoulli ⁽¹⁾. Ces relations se distinguent de celles que l'on connaissait jusqu'à présent en ce qu'elles ne contiennent qu'un certain nombre de coefficients au lieu de les contenir tous. M. Stern a généralisé les résultats de M. Seidel en donnant des relations qui ne renferment que les nombres B_{2r} , B_{2r-2} , ... jusqu'à B_{r-s} ou B_{r-s+1} , s étant un nombre positif ou nul, inférieur à r ; on retrouve les formules de M. Seidel pour $s = 0$.

En s'appuyant sur le calcul symbolique et sur les formules que j'en ai déduites, M. Radicke, professeur à Bromberg, a trouvé une démonstration très simple, qu'il vient de m'adresser, des formules de M. Stern. Considérons la série des quantités

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots;$$

formons une seconde série de quantités

$$S^1 u_0, S^1 u_1, S^1 u_2, S^1 u_3, \dots, S^1 u_n, \dots$$

au moyen de la relation

$$S^1 u_n = u_n + u_{n+1};$$

formons ensuite la série

$$S^2 u_0, S^2 u_1, S^2 u_2, S^2 u_3, \dots, S^2 u_n, \dots$$

au moyen de la relation

$$S^2 u_n = S^1 u_n + S^1 u_{n+1} = u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n,$$

et ainsi de suite, de telle sorte que l'on a, en général,

$$S^p u_n = S^{p-1} u_n + S^{p-1} u_{n+1},$$

⁽¹⁾ *Sitzungsberichte der math.-phys. Classe der könig. böhm. Academie der Wissenschaften*. Prag, 1877.

et aussi la relation

$$S^p u_n = u_{n+p} + p_1 u_{n+p-1} + p_2 u_{n+p-2} + \dots + p_p u_n,$$

dans laquelle $p_1, p_2, \dots, p_p$ désignent les coefficients de la puissance p du binôme. On peut donc écrire la formule précédente sous la forme symbolique

$$(1) \quad S^p u_n = u^n (u+1)^p,$$

dans laquelle on remplacera les exposants de u par des indices.

D'autre part, on tire successivement

$$\begin{aligned} S^p u_n &= S^{p+1} u_{n-1} - S^p u_{n-1}, \\ S^p u_n &= S^{p+1} u_{n-2} - 2S^{p+1} u_{n-2} + S^p u_{n-2}, \\ &\dots\dots\dots, \\ S^p u_n &= S^{p+n} u_0 - n_1 S^{p+n+1} u_0 + \dots + (-1)^n n_n S^p u_0 \end{aligned}$$

ou, symboliquement,

$$(2) \quad S^p u_n = S^p (S+1)^n u_0,$$

dans laquelle on remplacera les exposants de p par des indices. Mais on tire de la formule (1)

$$S^p u_0 = (u+1)^p,$$

et, en transportant dans l'équation (2),

$$(3) \quad S^p u_n = (u+1)^p (\overline{u+1-1})^n;$$

on tire encore de la formule (1)

$$(4) \quad S^n u_p = u^p (u+1)^n.$$

Les formules (3) et (4) subsistent pour des valeurs quelconques des quantités $u_0, u_1, u_2, \dots$. Posons, en général, $u_n = B_n$, en désignant par B_n le nombre de Bernoulli défini par la relation

$$\frac{z}{e^z - 1} = e^{Bz} = B_0 + B_1 \frac{z}{1} + B_2 \frac{z^2}{1.2} + \dots + B_n \frac{z^n}{1.2.\dots.n} + \dots;$$

on sait que l'on a, symboliquement,

$$B_{2p+1} = 0, \quad (B+1)^{2p+1} = 0,$$

et, pour $p \geq 2$,

$$(B + 1)^p - B^p = 0.$$

Cela posé, nous distinguerons deux cas suivant que $p + n$ sera pair ou impair; dans le premier cas, on tire de (3) et (4)

$$S^p B_n - S^n B_p = 0,$$

et dans le second cas

$$S^p B_n + S^n B_p = 0.$$

Par conséquent, en se servant de la formule (1), on obtient

$$(5) \quad B^p (B + 1)^n = (-1)^{p+n} B^n (B + 1)^p.$$

Cette relation importante contient toute la première classe des formules données par M. Stern; en supposant, plus particulièrement, $p = n + 1$, on a

$$(6) \quad B^{n+1} (B + 1)^n + B^n (B + 1)^{n+1} = 0;$$

on retrouve, pour les diverses valeurs de n , les formules de M. Seidel. Ainsi, pour $n = 6$ et pour $n = 7$, on a

$$13B_{12} + 55B_{10} + 27B_8 + B_6 = 0,$$

$$15B_{14} + 91B_{12} + 77B_{10} + 9B_8 = 0.$$

Posons maintenant

$$u_p = (2^p - 1) B_p;$$

on a, symboliquement,

$$S^p u_0 = (2B + 1)^p - (B + 1)^p;$$

l'équation (3) devient alors

$$S^p u_n = (2B + 1)^p (\overline{2B + 1} - 1)^n - (B + 1)^p (\overline{B + 1} - 1)^n.$$

D'autre part, on tire de l'équation (4)

$$S^n u_p = 2^p B^p (2B + 1)^n - B^p (B + 1)^n,$$

et l'on a la relation

$$(2B + 1)^p + (2^p - 2) B^p = 0.$$

On a donc, pour $p + n$ pair, la formule

$$S^p u_n + S^n u_p = 0,$$

et, pour $p + n$ impair,

$$S^p u_n - S^n u_p = 0;$$

par conséquent, il en résulte

$$(7) \quad \begin{cases} 2^p B^p (2B + 1)^n - B^p (B + 1)^n \\ + (-1)^{p+n} [2^n B^n (2B + 1)^p - B^n (B + 1)^p] = 0. \end{cases}$$

Cette relation correspond au second groupe de formules données par M. Stern, et, pour $p = n + 1$, on retrouve les formules de M. Seidel. Au moyen de l'identité

$$(n + 1)_q - n_q = n_{q-1},$$

on déduit la formule

$$(8) \quad (2^{2n} - 1)B_{2n} + n_1(2^{2n-2} - 1)B_{2n-2} + n_3(2^{2n-4} - 1)B_{2n-4} + \dots = 0,$$

et, pour $n = 6$ et $n = 7$,

$$\begin{aligned} 455B_{12} + 1705B_{10} + 425B_8 + 7B_6 &= 0, \\ 5461B_{14} + 28665B_{12} + 11935B_{10} + 595B_8 &= 0. \end{aligned}$$

Posons encore

$$P_n = 2(2^n - 1)B_n;$$

la formule (7) peut s'écrire

$$(9) \quad P^p(P + 1)^n + (-1)^{p+n} P^n(P + 1)^p = 0,$$

et, pour $p = n + 1$, la formule devient, pour $n > 1$,

$$(10) \quad P^n(P + 1)^n = 0.$$

Les nombres P sont donnés, comme on sait, par le développement

$$\frac{-2z}{1+e^z} = P_0 + P_1 \frac{z}{1} + P_2 \frac{z^2}{1.2} + \dots + P_n \frac{z^n}{1.2 \dots n} + \dots;$$

il résulte immédiatement de la formule (10) que ces nombres sont entiers et impairs. Ce résultat important est dû à M. Genocchi ⁽¹⁾.

(1) *Annales de Tortolini*, t. III, p. 395-405. Rome, 1852.

Théorèmes généraux sur l'impossibilité des équations cubiques indéterminées; par M. ÉDOUARD LUCAS.

(Séance du 16 avril 1880.)

Les trois théorèmes suivants ont été énoncés par M. Sylvester. Nous en donnons des démonstrations élémentaires, et nous ajoutons quelques autres développements sur le même sujet.

THÉORÈME I. — Si p, p_1 désignent des nombres premiers de la forme $18n + 5$, et q, q_1 des nombres premiers de la forme $18n + 11$, il est impossible de décomposer en deux cubes entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs, aucun des nombres

$$p, q, p^3, q^3, pq, p^3q^3, pp_1^3, qq_1^3.$$

Considérons l'équation

$$(1) \quad x^3 + y^3 = Az^3;$$

on peut supposer x, y, z premiers entre eux, deux à deux, le nombre A ne contenant aucun facteur cubique, et x, y, z différents de zéro. Si l'on pose

$$M = x + y, \quad N = x^2 - xy + y^2,$$

le binôme $x^3 + y^3$ égale le produit MN , dans lequel N est impair. De plus, il résulte de la formule

$$4N = (x + y)^2 + 3(x - y)^2$$

que le plus grand commun diviseur de M et de N est 3 ou 1, suivant que $x^3 + y^3$ est ou n'est pas divisible par 3; de plus, N ne peut être divisible par une puissance de 3 autre que la première, puisque x et y seraient divisibles par 3. Ce théorème est un cas particulier d'un théorème plus général, démontré par Malebranche, sur les deux facteurs de $x^p + y^p$, ainsi que l'a fait remarquer récemment M. C. Henry (1).

(1) *Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat, suivies de fragments inédits de Bachet et de Malebranche*, Rome, 1880, in-4°, p. 87-92. Le manuscrit dans lequel se

De plus, les diviseurs de N sont, en exceptant le nombre 3, de la forme quadratique $f^2 + 3g^2$ et de la forme linéaire correspondante $6h + 1$.

Enfin, on sait que le reste de la division d'un cube par le nombre 9 est toujours égal à 0 ou à ± 1 .

Cela posé, nous considérerons quatre cas :

1° *Le nombre z est impair et divisible par 3.*

Si A prend l'une des valeurs indiquées dans l'énoncé, aucun des nombres p ou q ne divise N ; on doit donc poser

$$x + y = 3^2 A a^3, \quad N = 3 b^3, \quad z = 3 a b,$$

et par suite

$$4 b^3 = (x - y)^3 + 3 \left(\frac{x + y}{3} \right)^3.$$

Mais, puisque b divise N , on a

$$b = f^2 + 3g^2, \quad b^3 = F^2 + 3G^2, \quad 4b^3 = (F - 3G)^2 + 3(F + G)^2,$$

et, en même temps

$$F = f(f^2 - 9g^2), \quad G = 3g(f^2 - g^2),$$

ainsi qu'on le voit, en faisant le cube de $f + g\sqrt{-3}$. En identifiant les deux valeurs de $4b^3$, on trouve

$$F + G = \frac{x + y}{3} = 3 A a^3,$$

ou bien

$$f(f^2 - 9g^2) \pm 3g(f^2 - g^2) = 3 A a^3.$$

Donc f serait divisible par 3, et par suite b , et aussi x et y , que nous avons supposés premiers entre eux. Donc z ne peut être impair et divisible par 3.

2° *Le nombre z est pair et divisible par 3.*

On doit poser

$$x + y = 3^2 \cdot 2^3 A a^3, \quad N = 3 b^3, \quad z = 6 a b,$$

trouve copiée la démonstration en question est expressément attribué, par un Catalogue inédit des manuscrits de l'Oratoire, à Malebranche, qui d'ailleurs a laissé de nombreux autographes sur les Sections coniques, le Calcul différentiel et intégral, la Mécanique, l'Optique, etc.

et, par suite

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x+y}{6}\right)^2 = b^2 = F^2 + 3G^2;$$

on en tire

$$G = \frac{x+y}{6} \quad \text{ou} \quad g(f^2 - g^2) = 4Aa^3.$$

D'ailleurs, $f^2 + 3g^2$ et $f^2 - g^2$ sont *impairs*; donc g est pair, et, en désignant par α, β, γ trois nombres premiers entre eux, on doit poser, avec $a = \alpha\beta\gamma$,

$$g = 4A\alpha^3, \quad f + g = \beta^3, \quad f - g = \gamma^3$$

ou

$$g = 4\alpha^3, \quad f + g = A\beta^3, \quad f - g = \gamma^3.$$

Il semble qu'il peut y avoir d'autre décomposition lorsque A contient plusieurs facteurs; mais il est facile de voir que ces décompositions conduiraient à la congruence impossible

$$\alpha^3 \pm 2\beta^3 \pm 4\gamma^3 \equiv 0 \pmod{9}.$$

Quant aux deux décompositions précédentes, elles donnent

$$\beta^3 - \gamma^3 = A(2\alpha)^3, \quad \text{ou} \quad \gamma^3 + (2\alpha)^3 = A\beta^3.$$

On ramène donc l'équation proposée, dans laquelle l'inconnue z contient le facteur 3^1 , à une autre semblable dans laquelle l'inconnue z ne contient plus que le facteur 3^{1-1} , et ainsi de suite, de sorte que l'on peut supposer que z n'est pas divisible par 3.

3° *Le nombre z est impair et non divisible par 3.*

On doit poser

$$x + y = Aa^3, \quad (x + y)^2 + 3(x - y)^2 = 4b^2,$$

et par suite

$$F \pm 3G = Aa^3,$$

équation impossible suivant le module 9, puisque f n'est pas divisible par 3.

4° *Le nombre z est pair et non divisible par 3.*

On doit poser

$$x + y = 2^3 Aa^3, \quad \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = b^2,$$

et, par l'identification,

$$f(f^2 - 9g^2) = 4Aa^3;$$

cette équation conduit aux décompositions suivantes, en laissant de côté celles qui donnent des congruences impossibles suivant le module 9 :

$$f = 4a^3, \quad f + 3g = A\beta^3, \quad f - 3g = \gamma^3$$

ou

$$f = 4Aa^3, \quad f + 3g = \beta^3, \quad f - 3g = \gamma^3.$$

On en déduit l'équation

$$A\beta^3 + \gamma^3 = (2a)^3,$$

reconnue impossible, puisque z est impair et non divisible par 3, ou l'équation en moindres nombres

$$\beta^3 + \gamma^3 = A(2a)^3.$$

Donc l'équation proposée est impossible.

THÉORÈME II. — *Si p et q désignent des nombres premiers respectivement des formes $18n + 5$ et $18n + 11$, il est impossible de décomposer en deux cubes, soit entiers, soit fractionnaires, aucun des nombres suivants :*

$$2p, \quad 2q^2, \quad 4p^2, \quad 4q.$$

Considérons l'équation

$$x^3 + y^3 = 2^n A z^3,$$

dans laquelle, A étant impair, le coefficient $2^n A$ représente l'un des quatre nombres $2p, 2q^2, 4p^2, 4q$. On doit supposer x, y, z entiers et premiers entre eux, x et y étant impairs; il y a lieu d'étudier deux cas différents, suivant que z est ou n'est pas divisible par 3.

1° *Le nombre z n'est pas divisible par 3.*

On arrive, comme ci-dessus, à l'équation

$$f(f^2 - 9g^2) = 2^{n-1} A a^3.$$

Mais $f^2 - 9g^2$ est impair avec b ; on a donc

$$f = 2^{n-1} A a^3, \quad f + 3g = \beta^3, \quad f - 3g = \gamma^3$$

ou bien

$$f = 2^{n-1} \alpha^3, \quad f + 3g = A\beta^3, \quad f - 3g = \gamma^3.$$

Ces deux décompositions conduisent aux deux équations

$$\beta^3 + \gamma^3 = 2^n A \alpha^3 \quad \text{ou} \quad A\beta^3 + \gamma^3 = 2^n \alpha^3;$$

celles-ci sont impossibles suivant le module 9 ; pour la première, les indéterminées α, β, γ ne sont pas divisibles par 3.

2° *Le nombre z est divisible par 3.*

En posant $z = 3ab$, on arrive, comme ci-dessus, à l'équation

$$g(f^3 - g^3) = 2^{n-1} A \alpha^3,$$

et, puisque $f^2 - g^2$ est impair, à l'une des décompositions

$$g = 2^{n-1} A \alpha^3, \quad f + g = \beta^3, \quad f - g = \gamma^3,$$

ou bien

$$g = 2^{n-1} \alpha^3, \quad f + g = A\beta^3, \quad f - g = \gamma^3.$$

La seconde décomposition conduit à une équation déjà reconnue impossible ; la première conduit à l'équation

$$\beta^3 - \gamma^3 = 2^n A \alpha^3,$$

de même forme que la proposée, mais contenant un facteur 3 en moins. On conclura, comme précédemment, que l'équation proposée est impossible à résoudre en nombres entiers.

THÉORÈME III. — *Si p et q désignent des nombres premiers des formes $18n + 5$ et $18n + 11$, il est impossible de décomposer en deux cubes soit entiers, soit fractionnaires, l'un des nombres suivants :*

$$9p, 9q, 9p^3, 9q^3.$$

Nous considérerons deux cas suivant que z est impair ou pair dans l'équation (1).

1° *Le nombre z est impair.*

On a, dans ce cas,

$$x + y = 3A \alpha^3, \quad (x + y)^2 + 3(x - y)^2 = 12b^3,$$

et par suite

$$(x-y)^2 + 3\left(\frac{x+y}{3}\right)^2 = 4b^2 = (F-3G)^2 + 3(F+G)^2;$$

il résulte de l'identification

$$F+G = Aa^2,$$

ou bien

$$f(f^2 - 9g^2) + 3g(f^2 - g^2) = Aa^2.$$

Cette équation est impossible suivant le module q , puisque le produit $g(f^2 - g^2)$ est toujours divisible par 3.

2° *Le nombre z est pair.*

On doit poser

$$x+y = 3 \cdot 2^3 Aa^2, \quad \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x+y}{6}\right)^2 = b^2, \quad z = 6ab,$$

par suite

$$G = \frac{x+y}{6}, \quad \text{ou} \quad 4Aa^2 = 3g(f^2 - g^2).$$

On en déduit, en laissant de côté les congruences impossibles suivant le module 9, les décompositions

$$g = 4 \cdot 9Aa^2, \quad f+g = \beta^2, \quad f-g = \gamma^2,$$

et

$$g = 4Aa^2, \quad f+g = 9\beta^2, \quad f-g = \gamma^2.$$

La première décomposition conduit à la même équation en moindres nombres; la seconde donne

$$9\beta^2 - \gamma^2 = A(2z)^2,$$

impossible suivant le module 9.

C. Q. F. D.

M. Sylvester a indiqué de plus quatre autres formes (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 16 février 1880).

$$9pq, 9p^2q^2, 9pp_1^2, 9qq_1^2,$$

pour lesquelles l'équation (1) serait impossible. Cet énoncé est trop général. Ainsi, en particulier, pour $p = 5$, $q = 11$, on a

$$9 \cdot 5 \cdot 11 = \left(\frac{342361}{10803}\right)^2 - \left(\frac{57241}{10803}\right)^2.$$

Cependant on peut modifier l'énoncé précédent, en tenant compte de la théorie des résidus cubiques; mais il semble que l'on ne peut obtenir d'énoncé général que lorsque l'on donne à l'un des nombres p ou q une valeur particulière. On peut alors déterminer, par les lois de réciprocité étendues aux résidus cubiques, des valeurs de q en nombre indéfini, en supposant donnée la valeur de p , ou inversement.

Nous ajouterons les deux théorèmes suivants :

THÉOREME IV. — *Pour que l'équation*

$$X^3 + Y^3 = AZ^3$$

soit vérifiée par des valeurs entières de X, Y, Z, A, il faut et il suffit que A appartienne à la forme

$$xy(x+y),$$

préalablement débarrassée des facteurs cubiques qu'elle peut contenir.

En effet, on a l'identité

$$\begin{aligned} (x^3 - y^3 + 6x^2y + 3xy^2)^3 + (y^3 - x^3 + 6y^2x + 3yx^2)^3 \\ = xy(x+y)3^3(x^2 + xy + y^2)^3, \end{aligned}$$

et l'on résout l'équation proposée par les valeurs

$$\begin{aligned} X &= x^3 - y^3 + 6x^2y + 3xy^2, \\ Y &= y^3 - x^3 + 6y^2x + 3yx^2, \\ Z &= 3(x^2 + xy + y^2), \\ A &= xy(x+y). \end{aligned}$$

Réciproquement, si l'équation est vérifiée pour les valeurs x_0, y_0, z_0 des variables, et si l'on pose $x = x_0^3, y = y_0^3$, on a

$$xy(x+y) = A(x_0, y_0, z_0)^3.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. Il résulte encore de l'identité précédente que toute solution de l'équation proposée conduit à une série indéfinie d'autres solutions, en supposant A constant; il faut excepter le cas de $x = \pm y$.

Ainsi, pour $x = 1$, $y = 2$, on a la solution

$$17^3 + 37^3 = 6.21^3,$$

qui donne ensuite une série indéfinie d'autres solutions de l'équation

$$x^3 + y^3 = 6z^3,$$

bien que Legendre ait affirmé son irrésolubilité. De même, pour $x = 9$, $y = 55$, on retrouve l'exemple donné plus haut.

THÉOREME V. — Si x , y , z vérifient l'équation

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = 3Az^3,$$

on peut décomposer le nombre A en deux cubes, ou résoudre l'équation

$$X^3 + Y^3 = AZ^3$$

par les formules

$$X = 2x^3 - 3x^2y - 3xy^2 + 2y^3,$$

$$Y = x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + y^3,$$

$$Z = 3z(x^2 - xy + y^2).$$

Il suffit de vérifier l'identité correspondante; les valeurs de A sont telles, que les diviseurs sont de la forme $18n \pm 1$, ainsi que cela résulte de la théorie des fonctions cyclotomiques. M. Sylvester arrive au même résultat par des formules du neuvième degré, tandis que les nôtres ne sont que du troisième.

THÉOREME VI. — Un nombre positif quelconque entier ou fractionnaire est, d'une infinité de manières, le produit ou le quotient de deux nombres formés de la somme de deux cubes positifs.

Euler a démontré qu'un nombre positif quelconque, entier ou fractionnaire, est égal à la somme de quatre cubes positifs, entiers ou fractionnaires. On trouve la formule correspondante dans une Note qui termine les *Exercices d'Analyse numérique* de Lebesgue. Nous ferons d'abord observer que Lebesgue ne paraît pas avoir deviné la méthode qui a dû servir à Euler pour obtenir cette formule. En effet, il nous paraît évident que celle-ci provient des recherches entreprises par Euler pour obtenir la décomposition

d'un nombre A en deux cubes. L'identité d'Euler est la suivante,

$$n = \left(\frac{n}{6m^2} \right)^3 [(2-a)^3 + a^3(b-1)^3 + b^3(c-1)^3 + c^3],$$

dans laquelle on suppose m tel que l'on ait

$$\frac{n}{12} < m^3 < \frac{n}{6},$$

et, de plus,

$$a = 1 + \frac{6m^3}{n}, \quad b = \frac{2a^3 - 1}{a^3 + 1}, \quad c = \frac{2b^3 - 1}{b^3 + 1}.$$

Il est fort probable que cette identité provient de l'Arithmétique, et non de l'Algèbre, contrairement à la supposition de Lebesgue.

Le théorème proposé revient à dire que l'on peut résoudre en nombres rationnels et *positifs*, et d'une infinité de manières, les équations

$$(1) \quad N = \frac{x^3 + y^3}{z^3 + u^3},$$

et

$$(2) \quad N = (x^3 + y^3)(z^3 + u^3).$$

Pour l'équation (1), on pose $N = 2^\lambda 3^\mu \frac{A}{B}$; on choisit $\frac{a}{b}$ par les conditions d'inégalité

$$\frac{B}{2^\lambda 3^{\mu-2} A} > \frac{a^3}{b^3} > \frac{B}{2^\lambda 3^{\mu-1} A},$$

et l'on a

$$\begin{aligned} x &= \frac{B b^3}{a}, & y &= \frac{2^\lambda 3^{\mu-1} A a^3 - B b^3}{a}, \\ u &= \frac{2^\lambda 3^{\mu-2} A a^3}{b}, & z &= \frac{B b^3 - 2^\lambda 3^{\mu-2} A a^3}{b}. \end{aligned}$$

Pour l'équation (2), nous observerons que l'on a les deux identités

$$\begin{aligned} (6LM + L^3 - 3M^2)^3 + (6LM - L^3 + 3M^2)^3 &= 2^3 3^2 LM (L^3 + 3M^2)^2, \\ (L + M)^3 + (L - M)^3 &= 2L(L^2 + 3M^2). \end{aligned}$$

Donc, en multipliant membre à membre, et divisant les deux membres de l'égalité obtenue par $(L^2 + 3M^2)^3$, on aura décom-

posé $2^3 3^2 L^2 M$ en un produit de deux facteurs égaux à une somme de deux cubes; en supposant, de plus,

$$L = B b^3, \quad M = 2^{\lambda-3} 3^{\mu-2} A a^3,$$

on décomposera ainsi en ce produit le nombre

$$N = 2^{\lambda} 3^{\mu} A B^2;$$

on détermine d'ailleurs $\frac{a^3}{b^3}$ de telle sorte que les cubes x, y, z, u soient tous positifs.

Sur la réduction en fractions continues d'une classe de fonctions ;
par M. G. HUMBERT.

(Séance du 16 avril 1880.)

Soit l'équation différentielle

$$(1) \quad (x^2 - 1)y'' + 2 \left[x \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) - \omega \right] y' - n(n + \alpha + 1)y = 0,$$

où n et α sont deux nombres entiers tels que $n > 0$ et $n + \alpha + 1 > 0$.

En posant

$$\frac{K'(x)}{K(x)} = \frac{x(2 + \alpha) - 2\omega}{x^2 - 1}$$

ou

$$\frac{K'(x)}{K(x)} = \frac{1 + \frac{\alpha}{2} - \omega}{x - 1} + \frac{1 + \frac{\alpha}{2} + \omega}{x + 1},$$

ce qui donne

$$K(x) = (x^2 - 1)^{1 + \frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x + 1}{x - 1} \right)^{\omega},$$

on sait qu'une solution de l'équation (1) est le polynôme de degré n

$$\Theta(x) = \frac{x^2 - 1}{K(x)} D^n (x^2 - 1)^{n-1} K(x)$$

ou

$$\Theta(x) = (x^2 - 1)^{-\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x - 1}{x + 1} \right)^{\omega} D^n (x^2 - 1)^{n + \frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x + 1}{x - 1} \right)^{\omega}.$$

Transformons maintenant l'équation (1) par la substitution

$$y = \frac{x^2 - 1}{K(x)} u;$$

nous trouvons

$$(2) \quad (x^2 - 1)u'' + 2 \left[x \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) + \omega \right] u' - (n + \alpha)(n + 1)u = 0.$$

Cette équation admet comme solution le polynôme de degré $n + \alpha$

$$P(x) = \frac{K(x)}{x^2 - 1} D^{n+\alpha} \frac{(x^2 - 1)^{n+\alpha+1}}{K(x)}$$

ou

$$P(x) = (x^2 - 1)^{\alpha} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{\omega} D^{n+\alpha} (x^2 - 1)^{n+\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{\omega}.$$

Par conséquent, $P(x)$ et $\frac{K(x)}{x^2 - 1} \Theta(x)$ sont deux solutions de l'équation (2).

Sans chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elles soient distinctes, je remarque qu'elles le seront nécessairement si $\frac{K(x)}{x^2 - 1}$ n'est pas une fonction rationnelle, car $P(x)$ est un polynôme entier et $\frac{K(x)}{x^2 - 1} \Theta(x)$ n'est pas un polynôme, dans le cas supposé.

Or

$$\frac{K(x)}{x^2 - 1} = (x^2 - 1)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{\omega}.$$

Cherchons les conditions pour que cette fonction soit irrationnelle. Deux cas sont à distinguer :

1° α pair; il faut et il suffit que ω ne soit pas entier.

2° α impair; il faut et il suffit que ω ne soit pas de la forme $\frac{2p+1}{2}$.

Supposons l'une de ces conditions remplie.

Une solution quelconque de l'équation (2) sera de la forme

$$y_1 = \lambda P(x) + \lambda' \frac{K(x)}{x^2 - 1} \Theta(x).$$

Mais cette équation admet comme solution la fonction

$$P(x) \int \frac{K(x)}{(x^2-1)^2 P^2(x)},$$

qui est de degré $-(n+1)$, c'est-à-dire qui, ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de x , commence par un terme en

$$\frac{1}{x^{n+1}}.$$

On a donc

$$\lambda P(x) - \lambda' \frac{K(x)}{x^2-1} \Theta(x) = \frac{1}{x^{n+1}} + \dots,$$

d'où

$$\frac{K(x)}{x^2-1} = \mu \frac{P(x)}{\Theta(x)} + \frac{1}{x^{n+1}} + \dots,$$

équation qui montre que les polynômes $\Theta(x)$ sont les dénominateurs, les polynômes $P(x)$ les numérateurs des réduites de la fonction

$$\frac{K(x)}{x^2-1} = (x^2-1)^\alpha \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^\alpha,$$

dans le cas où cette fonction est irrationnelle.

En posant $\frac{K(x)}{x^2-1} = F(x)$, on aura pour les réduites successives

$$\frac{F^2(x) D^{n+\alpha} \frac{(x^2-1)^{n+\alpha}}{F(x)}}{D^n (x^2-1)^\alpha F(x)}.$$

Ce résultat comprend comme cas particulier le cas de $\alpha = 0$; on a alors les réduites de la fonction $\left(\frac{x+1}{x-1} \right)^\alpha$, étudiées par M. Laguerre par une méthode toute différente.

Laissant de côté l'étude des polynômes $\Theta(x)$ et $P(x)$, je fais la remarque suivante, qui va conduire à un théorème intéressant.

On sait que, si l'on pose

$$y = \int_{\gamma}^{\delta} \frac{K(z) (z^2-1)^{n-1}}{(x-z)^{n+1}} dz,$$

on a

$$(x^2 - 1)y'' + 2 \left[x \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) + \omega \right] y' - (n+1)(n+\alpha)y \\ = - (n+1) [K(z)(z^2 - 1)^n (x-z)^{-n-2}]_1^2.$$

Le second membre devient, en remplaçant K par sa valeur,

$$- (n+1) \left[(z^2 - 1)^{n+1+\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^n (x-z)^{-n-2} \right]_1^2.$$

La quantité entre parenthèses s'annule pour -1 et $+1$ si l'on a

$$n+1+\frac{\alpha}{2}+\omega > 0, \quad n+1+\frac{\alpha}{2}-\omega > 0.$$

Dans ce cas, la fonction

$$y = \int_{-1}^{+1} \frac{K(z)(z^2-1)^{n-1}}{(x-z)^{n+1}} dz$$

est une solution de l'équation (2), et elle commence par un terme en $\frac{1}{x^{n+1}}$.

Si $K(z)$ s'annule pour -1 et pour $+1$, c'est-à-dire si

$$1+\frac{\alpha}{2}+\omega > 0, \quad 1+\frac{\alpha}{2}-\omega > 0,$$

conditions qui comprennent les précédentes, on aura évidemment

$$y = \int_{-1}^{+1} \frac{D^n K(z)(z^2-1)^{n-1}}{x-z} dz,$$

ou

$$y = \int_{-1}^{+1} \frac{K(z)\Theta(z)dz}{(z^2-1)(x-z)} = \Theta(x) \int_{-1}^{+1} \frac{K(z)}{(z^2-1)(x-z)} dz \\ + \int_{-1}^{+1} \frac{K(z)}{z^2-1} \left[\frac{\Theta(z) - \Theta(x)}{x-z} \right] dz,$$

ou

$$y = \Theta(x) \int_{-1}^{+1} \frac{K(z)}{(z^2-1)(x-z)} dz + \Pi(x),$$

$\Pi(x)$ étant un polynôme au plus de degré $n-1$.

On a donc

$$\Theta(x) \int_{-1}^{+1} \frac{K(z)}{(z^2-1)(x-z)} dz + \Pi(x) = \lambda P(x) + \mu \frac{K(x)}{x^2-1} \Theta(x)$$

ou

$$\int_{-1}^{+1} \frac{K(z)}{(z^2-1)(x-z)} dz - \mu \frac{K(x)}{x^2-1} = \frac{P(x)}{\Theta(x)};$$

$P(x)$ est un polynôme de degré $n + \alpha$.

Si, sans changer α et ω , on change n en $n + p$, on aura deux autres polynômes $P_1(x)$ et $\Theta_1(x)$, et

$$(3) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{K(z)}{(z^2-1)(x-z)} dz - \mu_1 \frac{K(x)}{x^2-1} = \frac{P_1(x)}{\Theta_1(x)}.$$

Retranchant ces deux relations membre à membre, on aura

$$(\mu_1 - \mu) \frac{K(x)}{x^2-1} = \frac{P(x)}{\Theta(x)} - \frac{P_1(x)}{\Theta_1(x)},$$

et $\frac{K(x)}{x^2-1}$ serait une fonction rationnelle, ce qui est contraire à l'hypothèse; on a donc

$$\mu = \mu_1 \quad \text{et} \quad \frac{P(x)}{\Theta(x)} = \frac{P_1(x)}{\Theta_1(x)}.$$

Prenant $n = 0$ (on peut le faire si $\alpha > 0$), le polynôme Θ correspondant est une constante; par suite, on a

$$(4) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{K(z)}{(z^2-1)(x-z)} dz - \mu \frac{K(x)}{x^2-1} = P_*,$$

P_* étant un polynôme de degré α .

Si α est négatif, comme on doit avoir

$$\omega > -\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right), \quad \omega < \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right),$$

il faut que

$$1 + \frac{\alpha}{2} > 0.$$

Par suite, α ne peut prendre que la valeur -1 ; la valeur $\alpha = -2$ donnerait $\omega = 0$, et $\frac{K}{x^2-1}$ serait rationnel.

Dans ce cas, pour que $\frac{P(x)}{\Theta(x)} = \frac{P_1(x)}{\Theta_1(x)}$, il faudrait que Θ et Θ_1 eussent au moins une racine commune, puisque les numérateurs sont d'un degré inférieur d'une unité au degré des dénominateurs; alors tous les polynômes $\Theta(x)$ auraient au moins une racine commune, ce qu'on sait être impossible. Donc

$$P(x) = P_1(x) = 0,$$

et l'on a, pour $\alpha = -1$,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{K(z)}{(z^2-1)(x-z)} dz - \mu \frac{K(x)}{x^2-1} = 0.$$

En résumé : 1° α étant entier et plus grand que 0, si la fonction

$$F(z) = (z^2-1)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^{\mu}$$

est irrationnelle et si, pour -1 et $+1$, elle ne devient pas infinie d'un ordre supérieur ou égal à 1, on a

$$\int_{-1}^{+1} \frac{F(z)}{x-z} dz = \mu F(x) + (Ax^{\alpha} + Bx^{\alpha-1} + \dots + L);$$

2° α étant égal à -1 , et les mêmes conditions étant réalisées, on a

$$\int_{-1}^{+1} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^{\mu} \frac{1}{\sqrt{z^2-1}} \frac{dz}{x-z} = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{\mu} \frac{\mu}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Sur l'extension du théorème de Descartes; par M. ÉD. LUCAS.

(Séance du 2 avril 1880.)

M. Laguerre a donné, dernièrement, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* et dans les *Nouvelles Annales*, quelques considérations nouvelles et fort importantes, au point de vue pratique, pour la séparation des racines des équations algébriques; notre but est de présenter une démonstration élémen-

l'identité

$$\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)} - \frac{f(x)}{(x-a)(x-c)} = \frac{(b-c)f(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)},$$

et ainsi de suite.

3. Lemme de Segner généralisé. — Le lemme de Segner sert de base à la démonstration du théorème de Descartes; on le généralise de la façon suivante. Si $f(x)$ désigne l'expression

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + Kx + L + \frac{M}{x-a},$$

dans laquelle M désigne une constante positive ou négative, le nombre des variations contenues dans le produit $(x-b)f(x)$, mis sous la forme

$$Ax^{m+1} + B'x^m + C'x^{m-1} + \dots + K'x^2 + L'x + M' + \frac{N'}{x-a},$$

surpasse d'une unité au moins et toujours d'un nombre impair le nombre des variations de la suite

$$A, B, C, \dots, K, L, M$$

si l'on suppose $b > a$ et b positif.

En effet, la suite des coefficients de $f(x)$

$$A, B, C, \dots, K, L, M$$

devient, après la multiplication,

$$A, B - bA, C - bB, \dots, L - bK, M - bL, (a-b)M.$$

Le dernier terme a le même signe que $-bM$, puisque l'on suppose $a < b$, de sorte que la démonstration du lemme généralisé est absolument semblable à la démonstration ordinaire donnée dans les Cours.

4. THÉORÈME DE M. LAGUERRE. — Dans une équation algébrique $f_m(x) = 0$, le nombre des racines positives plus grandes que a

ne peut surpasser le nombre des variations de la suite

$$(3) \quad f_0(a), f_1(a), f_2(a), \dots, f_m(a),$$

et, quand il est moindre, la différence est un nombre pair.

On démontre ce théorème de la même manière que le théorème de Descartes, en mettant préalablement $f_m(x)$ sous la forme (2). En particulier, pour $a = 0$, on retrouve le théorème de Descartes.

Remarque I. — Si la suite des fonctions (3) ne présente que des permanences, le nombre a est une limite supérieure des racines positives.

Remarque II. — Si dans l'équation $f_m(x) = 0$ on remplace x par $\frac{1}{x}$, on obtiendra une limite supérieure du nombre des racines de l'équation $f_m(x) = 0$ comprises entre 0 et a en appliquant le théorème de M. Laguerre à l'équation $f_m\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, pour la valeur $x = \frac{1}{a}$.

EXEMPLE I. — Soit l'équation

$$f_m(x) = x^5 - 5x^4 - 16x^3 + 12x^2 - 9x - 5 = 0,$$

considérée par M. Petersen et par M. Laguerre.

Pour $x = 1$, on a la suite

$$1, -4, -20, -8, -17, -22;$$

donc l'équation a une seule racine réelle plus grande que l'unité. En appliquant le procédé à la transformée en $\frac{1}{x}$, on n'a que des permanences; ainsi l'équation proposée n'a qu'une seule racine positive.

EXEMPLE II. — Soit l'équation

$$x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0,$$

considérée dans le *Traité d'Algèbre supérieure* de M. Serret (p. 313). La substitution $x = 1$, par le commencement ou par la fin, dans le premier membre, fait voir qu'il n'y a pas de racines

réelles supérieures à l'unité et qu'il y en a deux au plus entre 0 et 1; mais l'équation en $\frac{1}{x}$ s'écrit

$$[x^3 + x(x+1)(x-1)](x-1) + 1 = 0,$$

et ne peut avoir de racine plus grande que 1; donc la proposée n'a pas de racines positives. Dans la transformée en $-x$,

$$x^6 - x^5 - x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0,$$

la substitution de $x = 1$ par le commencement ou par la fin montre qu'il n'y a pas de racines plus petites que 1 et qu'il y en a deux au plus plus grandes que 1; mais, en l'écrivant sous la forme

$$(x^5 - x^3)(x-1) + x^2 + x + 1 = 0,$$

on voit qu'il n'y a pas de racines plus grandes que 1; donc la proposée a toutes ses racines imaginaires.

Sur une généralisation de la théorie des fractions continues algébriques; par M. G. Humbert.

(Séance du 21 mai 1880.)

I. Dans une lettre à M. Fuchs, publiée dans le *Journal de Crelle*, M. Hermite a donné les résultats suivants :

Soient $n+1$ quantités $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ et n polynômes entiers en x , de degré m , $P_0, P_1, \dots, P_n$.

Considérons l'expression

$$E(x) = P_1 \log \frac{x-x_1}{x-x_0} + P_2 \log \frac{x-x_2}{x-x_0} + \dots + P_n \log \frac{x-x_n}{x-x_0}.$$

Cette expression est égale à un polynôme entier de degré $m-1$, plus une fonction, qui, ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de x , commence par un terme en $\frac{1}{x}$:

$$E(x) = \Pi_{n-1}(x) + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \dots$$

Les polynômes $P_1, P_2, \dots, P_n$ renferment $(m+1)n$ coefficients : on pourra, en disposant de ces coefficients, faire disparaître dans $E(x)$ les termes en

$$\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \dots, \frac{1}{x^{(m+1)n-1}}.$$

On aura ainsi $(m+1)n-1$ équations homogènes entre les $(m+1)n$ inconnues.

Ce problème est une généralisation de celui qui conduit à la théorie des fractions continues algébriques.

M. Hermite, dans le cas cité, a montré que les polynômes $P_1(x), \dots, P_n(x)$ satisfont à une équation différentielle linéaire de degré $(n+1)$, dans laquelle le coefficient d'une dérivée, y^r , est un polynôme de degré μ ; de plus, une $(n+1)^{\text{ème}}$ solution de cette équation est la fonction

$$P_1 \log \frac{x-x_1}{x-x_0} + \dots + P_n \log \frac{x-x_n}{x-x_0} - \Pi_{n-1}(x).$$

II. On peut donner des résultats analogues pour des fonctions plus générales que les logarithmes qu'a considérés M. Hermite.

Je définirai ces fonctions de la manière suivante.

Soient $n+1$ quantités $x_0, x_1, \dots, x_n$, rangées, si elles sont réelles, par ordre de grandeur croissante, et $\Delta(x)$ le polynôme

$$\Delta(x) = (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n).$$

Soient $G(x)$ un polynôme quelconque de degré $(n-1)$ et $K(x)$ une fonction définie par l'équation

$$\frac{K'(x)}{K(x)} = \frac{G(x)}{\Delta(x)}.$$

Cela posé, les fonctions introduites au lieu des logarithmes de M. Hermite sont les suivantes :

$$\begin{aligned} z_1 &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z)}{\Delta(z)} \frac{dz}{x-z}, \\ &\dots\dots\dots, \\ z_n &= \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{K(z)}{\Delta(z)} \frac{dz}{x-z}. \end{aligned}$$

IV. De la définition des polynômes $P_i(x)$, ... on déduit, comme on le fait dans la théorie des fractions continues algébriques, les relations fondamentales,

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_1} \frac{\mathbf{K}(z)}{\Delta(z)} P_1(z) z dz + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{\mathbf{K}(z)}{\Delta(z)} P_n(z) z dz = 0, \\ & \int_{x_0}^{x_1} \frac{\mathbf{K}(z)}{\Delta(z)} P_1(z) z dz + \dots + \int_{x_{n-1}}^x \frac{\mathbf{K}(z)}{\Delta(z)} P_n(z) z dz = 0, \\ & \dots\dots\dots \\ & \int_{x_0}^{x_1} \frac{\mathbf{K}(z)}{\Delta(z)} P_1(z) z^{(m+1)n-2} dz + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{\mathbf{K}(z)}{\Delta(z)} P_n(z) z^{(m+1)n-2} dz = 0. \end{aligned}$$

On peut résumer ces formules en une seule,

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z)}{\Delta(z)} P_1(z) \Pi_{(m+1)n-1}(z) dz + \dots + \int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z)}{\Delta(z)} P_n(z) \Pi_{(m+1)n-1}(z) dz = 0,$$

en désignant par $\Pi_{(m+1)n-2}(z)$ un polynôme quelconque en z , au plus de degré $(m+1)n-2$.

Cette propriété des polynômes $P_1(z), P_2(z), \dots$ suffit pour démontrer le théorème énoncé.

Je remarque d'abord que la fonction $\frac{K(x)}{\Delta(x)}$ ne peut changer de signe entre x_0 et x_1 , entre x_1 et $x_2, \dots, x_{n-1}$ et x_n .

Soient maintenant

$\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1$	les racines de $P_1(x)$	comprises entre x_0 et x_1 ,
$\alpha_2, \beta_2, \dots, \lambda_2$	"	$P_2(x)$ " x_1 et x_2 ,
.....		
$\alpha_n, \beta_n, \dots, \lambda_n$	"	$P_n(x)$ " x_{n-1} et x_n .

Chacun de ces groupes se compose d'un nombre quelconque de racines, nombre inférieur à m cependant.

Posons

$$P_1(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \lambda_1) Z_1(x),$$

$$\dots$$

$$P_n(x) = (x - \alpha_n) \dots (x - \lambda_n) Z_n(x).$$

Si les fonctions $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ se réduisent à des constantes, le

théorème est démontré; sinon, il y aura au moins une de ces fonctions qui sera du premier degré ou d'un degré supérieur.

Par suite, le degré du produit

$$(z - \alpha_1)(z - \beta_1) \dots (z - \lambda_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \lambda_2) \dots (z - \alpha_n) \dots (z - \lambda_n)$$

ne pourra pas surpasser $mn - 1$.

Or on a

$$\sum \int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z)}{\Delta(z)} P_1(z) \Pi_{(m+1)n-2}(z) dz = 0.$$

Nous pouvons prendre

$$\Pi_{(m+1)n-2}(z) = (z - \alpha_1)(z - \beta_1) \dots (z - \lambda_1) \dots (z - \lambda_n) \Theta(z);$$

$\Theta(z)$ sera au moins de degré

$$(m+1)n - 2 - mn + 1 = n - 1.$$

Le produit $P_1(z) \Pi_{(m+1)n-2}(z)$ sera alors de la forme

$$f_1(z) \Theta(z),$$

$f_1(z)$ ne changeant pas de signe entre x_0 et x_1 ; de même •

$$P_n(z) \Pi_{(m+1)n-2}(z) = f_n(z) \Theta(z),$$

$f_n(z)$ ne changeant pas de signe entre x_{n-1} et x_n .

Prenons maintenant

$$\Theta(z) = (x_1 - z)^{\epsilon_1} (x_2 - z)^{\epsilon_2} \dots (x_{n-1} - z)^{\epsilon_{n-1}},$$

$\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n-1}$ étant égaux à 0 ou à +1.

On peut évidemment les supposer tous égaux à 1, puisque $\Theta(z)$ est au moins de degré $n - 1$.

L'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} f_1(z) \Theta(z) dz$ a un signe indépendant des valeurs des quantités ϵ .

La seconde intégrale $\int_{x_1}^{x_2} f_2(z) \Theta(z) dz$ aura pour $\epsilon_1 = 0$ un certain signe et pour $\epsilon_1 = 1$ le signe contraire, quelles que soient, d'ailleurs, les valeurs des autres quantités $\epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_{n-1}$.

Donc, en choisissant la valeur de ϵ_1 , cette intégrale aura même signe que la première.

La troisième intégrale $\int_{x_1}^{x_2} f_3(z) \Theta(z) dz$ aura de même pour $\epsilon_1 = 0$ un certain signe, pour $\epsilon_2 = 1$ le signe contraire, quelles que soient les valeurs des ϵ qui suivent.

On pourra donc encore choisir ϵ_2 de manière à lui donner même signe qu'à la première.

En continuant ce raisonnement, on voit qu'on pourra donner aux $n - 1$ intégrales qui suivent la première le même signe qu'à cette première.

Il est donc impossible que la somme de ces intégrales soit nulle.

Ainsi, en supposant que les polynômes $P_1(z) \dots P_n(x)$ n'ont pas toutes leurs racines réelles et comprises respectivement entre x_0 et $x_1, \dots, x_{n-1}$ et x_n , on arrive à une absurdité; il faut donc conclure que cette proposition est vraie et que, par suite :

THÉORÈME.— *L'un quelconque des polynômes $P, P_k(x)$, a toutes ses racines réelles et comprises entre x_{k-1} et x_k .*

•

Sur la Géométrie de direction; par M. LAGUERRE.

(Séances du 4 et du 18 juin 1880.)

I.

Définition des directions et des cycles.

1. Considérons une droite quelconque située dans un plan; on peut supposer qu'elle soit décrite dans un sens déterminé par un point mobile. J'appellerai *direction* une droite définie ainsi par sa position et par le sens dans lequel elle est supposée décrite.

L'angle que fait une direction avec une autre direction arbitraire est évidemment défini à un multiple près de 2π .

A chaque droite Δ du plan correspondent deux *directions opposées*, que je désignerai par les notations $+\Delta$ et $-\Delta$; D étant une direction arbitraire donnée, je désignerai par $-D$ la direction opposée.

2. Les deux directions correspondant à une droite isotrope doivent être considérées comme confondues entre elles; en d'autres termes, une direction isotrope se confond avec son opposée.

3. J'appellerai *cycle* un cercle défini non seulement par sa position, mais encore par le sens dans lequel on peut le supposer décrit par un point mobile.

A un cercle quelconque C du plan correspondent deux *cycles opposés*, que je désignerai par les notations $+C$ et $-C$; K étant un cycle arbitraire donné, je désignerai par $-K$ le cycle opposé.

4. Une direction est tangente à un cycle si la droite correspondant à la direction est tangente au cercle correspondant au cycle et si, en outre, sur l'élément commun au cercle et à la droite, le sens de la direction est le même pour le cycle et pour la direction.

Si les sens sont inverses, je dirai que la direction est une *tangente apparente* du cycle.

Un cycle doit être considéré comme l'enveloppe des directions qui lui sont tangentes. En particulier, le cycle peut se réduire à un point P , qui est l'enveloppe des directions menées par ce point; si une direction quelconque passe par le point P , il est clair qu'il en est de même de la direction opposée.

Réciproquement, si deux directions opposées $+\Delta$ et $-\Delta$ sont tangentes à un cycle, ce cycle se réduit à un point situé sur la droite Δ .

5. Des définitions qui précèdent il résulte immédiatement qu'on ne peut mener à un cycle qu'une tangente parallèle à une direction donnée et que deux cycles n'ont que deux tangentes communes, par conséquent n'ont qu'un seul centre de similitude.

Trois cycles, pris deux à deux, ont trois centres de similitude qui sont en ligne droite.

On ne peut mener qu'un seul cycle tangent à trois directions données; l'expression de *cycle inscrit dans un triangle donné* aura donc une signification parfaitement déterminée.

II.

Rapport anharmonique de quatre directions. — Faisceaux et réseaux de directions. — Faisceaux en involution. — Réseaux en involution.

6. Étant données quatre directions arbitraires A, B, C, D et étant tracé un cycle arbitraire dans le plan, menons à ce cycle des tangentes parallèles à ces directions, et soient respectivement a, b, c, d leurs points de contact. J'appellerai *rapport anharmonique* de ces quatre directions, et je désignerai par la notation $R(A, B, C, D)$, le rapport anharmonique des quatre points a, b, c, d , lesquels sont situés sur un même cercle.

7. J'appelle *faisceau de directions* un système de directions passant par un point fixe O .

Un faisceau de directions conjuguées deux à deux est en *involution*, si le rapport anharmonique de quatre quelconques d'entre elles est égal au rapport anharmonique des directions conjuguées.

Dans un faisceau en involution, il y a deux directions qui coïncident avec leurs conjuguées : ce sont les directions doubles du faisceau. En les désignant par P et P' , et par A et A' deux directions conjuguées quelconques, on voit que les directions P, P' et A, A' sont harmoniques.

Les centres des cycles tangents aux directions P et P' décrivent une droite qui est la bissectrice de ces deux directions et que j'appellerai *l'axe* du faisceau ; l'involution est déterminée quand on se donne les deux directions doubles P et P' , ou encore quand on se donne le sommet O du faisceau et un cycle tangent aux directions doubles. On peut ainsi facilement déterminer une involution, même quand les directions doubles sont imaginaires.

Soit R la droite menée par le point O perpendiculairement à l'axe du faisceau ; il est aisé de voir que les deux directions $+R$ et $-R$ sont conjuguées : je dirai que c'est la *droite double* du faisceau.

8. Considérons un faisceau en involution ayant pour sommet le point O , P et P' pour directions doubles, et R pour droite double. Menons par O une droite quelconque Δ , et soient D et D' les con-

juguées des directions opposées $+\Delta$ et $-\Delta$: je dirai que D et D' sont deux directions *associées* du faisceau.

Les directions associées du faisceau forment une involution ayant même axe et même droite double que l'involution donnée; ses directions doubles sont les conjuguées harmoniques des directions isotropes relativement à P et P'.

9. *Étant donnée une suite de cycles tangents à deux directions fixes quelconques Q et Q', si, par un point O pris arbitrairement dans le plan, on mène des tangentes à ces cycles, ces tangentes forment un faisceau en involution.*

Les directions doubles de ce faisceau sont évidemment les tangentes menées par le point O aux deux cycles qui, passant par ce point, touchent les deux directions fixes. La droite double est la droite qui joint le point O au point de rencontre des directions Q et Q'.

10. J'appellerai *réseau de directions* un système de directions tangentes à un même cycle.

Un réseau est en involution si les points de contact des directions avec le cycle forment une involution; dans tout réseau en involution, il y a deux directions doubles. Deux directions conjuguées quelconques et les deux directions doubles sont conjuguées harmoniques.

Quatre directions forment un système harmonique lorsque, étant tangentes à un même cycle, leurs points de contact forment un système harmonique. Par suite, pour obtenir la conjuguée harmonique d'une direction B relativement à deux directions données A et A', il suffit d'inscrire un cycle dans le triangle déterminé par les directions A, A' et B. Joignons le point de rencontre de A et A' avec le point de contact de B : la droite ainsi obtenue rencontre le cycle en un second point, et la direction menée tangemment en ce point est la conjuguée cherchée.

11. *Étant donnés une suite de cycles tangents à deux directions fixes quelconques et un cycle fixe K, si l'on mène les tangentes communes au cycle fixe et aux cycles variables, ces tangentes communes forment un réseau en involution.*

Les directions doubles de cette involution se détermineront en construisant les deux cycles tangents à K et aux directions fixes.

III.

Longitude de quatre directions. — Systèmes projectifs.

12. Étant données quatre directions A, B, C et D, désignons respectivement par α , β , γ et δ les intersections de A avec B, de B avec C, de C avec D et de D avec A. Cela posé, la longueur

$$\alpha\beta - \beta\gamma + \gamma\delta - \delta\alpha$$

est complètement définie en valeur absolue et en signe; le segment $\alpha\beta$, étant compté en effet sur la direction B, dont le sens est déterminé, a une valeur bien déterminée, et il en est de même des autres segments.

J'appellerai *longitude* des quatre directions A, B, C, D la longueur dont je viens de parler, et je la désignerai par la notation

$$L(A, B, C, D).$$

13. *Lorsque quatre directions sont tangentes à un même cycle, leur longitude est nulle.*

Réciproquement :

Si la longitude de quatre directions est nulle, elles sont tangentes à un même cycle.

14. Deux groupes de quatre directions sont dits *projectifs* si leurs rapports anharmoniques sont égaux, ainsi que leur longitude.

Deux systèmes de directions sont dits *projectifs* si, étant prises quatre directions quelconques du premier système et les directions correspondantes du second système, les deux groupes ainsi obtenus sont projectifs.

Tous les théorèmes qui ont lieu relativement à deux systèmes de points homographiques situés sur une même ligne droite s'appliquent également à deux systèmes projectifs de directions.

15. De ce que j'ai dit plus haut (n° 13) il résulte immédiate-

ment que, si quatre directions d'un des systèmes sont tangentes à un même cycle, les directions correspondantes dans l'autre système sont également tangentes à un même cycle.

A un cycle (ou un point) du premier système correspond donc un cycle (ou un point) dans le second système.

16. Étant donnés deux cycles C et K, on peut leur mener deux tangentes communes : j'appellerai *distance tangentielle* des deux cycles la longueur comprise entre les deux points de contact sur l'une des tangentes communes ; cette distance n'est déterminée qu'en valeur absolue.

Considérons deux figures projectives ; soient C et K deux cycles appartenant à la première figure, A une de leurs tangentes communes touchant respectivement ces cycles aux points α et δ . Désignons par B une tangente à C infiniment voisine de A et passant par le point α , par D une tangente à K infiniment voisine de A et passant par le point δ , enfin par C une direction arbitraire, par β le point d'intersection de B et de C, et par γ le point d'intersection de D et de C.

La longitude des quatre directions A, B, C et D a pour expression

$$L(A, B, C, D) = \alpha\beta - \beta\gamma + \gamma\delta - \delta\alpha;$$

on peut remarquer que $\beta\gamma$ est infiniment petit et qu'en négligeant les infiniment petits on a

$$\alpha\beta = \alpha s; \quad \gamma\delta = s\delta;$$

on a donc, en négligeant les infiniment petits,

$$L(A, B, C, D) = \alpha s + s\delta - \delta\alpha = s\alpha\delta.$$

Si maintenant on remarque que, dans deux figures projectives, la longitude de quatre directions quelconques est égale à la longitude des quatre directions correspondantes, on pourra énoncer le théorème fondamental suivant :

Étant donnés, dans deux figures projectives, deux cycles C et K appartenant à la première figure, soient T une tangente

commune à ces deux cycles, c et k les points où cette tangente touche respectivement les cycles. Désignons par C' et K' les cycles correspondants dans la seconde figure, par T' la tangente commune qui correspond à T , et par c' et k' les points où elle touche C' et K' .

Cela posé, la longueur ck est égale en grandeur et en signe à $c'k'$. C'est ce que j'exprimerai d'une façon plus concise (mais moins nette) en disant que la distance tangentielle de deux cycles est égale à la distance tangentielle des deux cycles correspondants.

IV.

Involution.

17. Étant donnés trois couples de directions conjuguées (A, A') , (B, B') et (C, C') , je dirai qu'elles forment une involution si quatre quelconques de ces directions et les quatre directions conjuguées sont projectives. On peut toujours déterminer deux directions P et P' telles que ces directions forment avec les trois couples donnés un système harmonique.

Ces directions sont les directions doubles de l'involution, et il est facile de les déterminer quand on se donne deux couples tels que (A, A') et (B, B') (¹).

18. Un système de droites conjuguées est dit *en involution* si, étant prises quatre quelconques de ces directions, ces directions et les directions conjuguées forment un système projectif.

Il y existe alors deux directions P et P' , telles que P, P' , et deux directions conjuguées quelconques forment un système harmonique.

Une involution peut se définir au moyen des deux directions doubles P et P' , ou encore (ce qui sera préférable si ces directions sont imaginaires conjuguées) au moyen du point de rencontre

(¹) Je laisse de côté la solution de ce problème et des problèmes analogues; elle ne présente aucune difficulté, mais exigerait, pour être claire, d'assez nombreuses figures. Le lecteur y suppléera facilement.

de ces directions et d'un quelconque des cycles qui leur sont tangents.

En appelant O le point de rencontre des deux directions doubles P et P' , la droite passant par ce point, et qui est le lieu des centres des cycles tangents à P et P' , sera dite *l'axe de l'involution*, la droite passant par ce même point perpendiculairement à l'axe la *droite double de l'involution*.

19. *Tous les théorèmes relatifs à un système de points en involution sur une même droite ont lieu relativement à un système de directions en involution.*

V.

Transformation par directions réciproques.

20. Soient O un point fixe et K un cycle pris arbitrairement dans le plan, P et P' les tangentes (réelles ou imaginaires) que du point O on peut mener au cycle K ; à chaque direction D du plan on peut faire correspondre une direction D' telle que les directions D , D' et P , P' fassent un système harmonique.

Je désignerai cette transformation sous le nom de *transformation par directions réciproques*; il est clair, en effet, qu'à la direction D' correspond la direction D .

Les deux droites P et P' seront les deux directions doubles de la transformation, la droite qui joint le point O au centre de K l'axe de la transformation, et la droite R , menée par O perpendiculairement à l'axe, la droite double de la transformation.

Si une direction mobile Δ enveloppe une courbe M , la direction conjuguée (ou réciproque) Δ' enveloppera une courbe M' qui sera dite la *transformée* ou la *réciproque* de M .

21. Il est clair, d'après ce que j'ai dit plus haut sur l'involution, qu'un système de directions et le système transformé sont projectifs; on voit donc immédiatement que *Tout cycle a pour réciproque un cycle (ou un point)*.

Si deux cycles C et K ont pour réciproques les cycles C' et K' ,

la distance tangentielle des deux cycles C et K est égale à la distance tangentielle des cycles C' et K' ⁽¹⁾.

22. *Deux directions réciproques rencontrent la droite double R en deux points équidistants du centre O de la transformation.*

23. *Étant donnée une droite quelconque Δ , à cette droite correspondent les deux directions opposées $+\Delta$ et $-\Delta$, auxquelles correspondent, après la transformation, deux directions D et D' : je dirai que ces deux directions sont associées. Ainsi :*

Deux directions sont associées si leurs réciproques sont opposées.

Un cycle se transforme généralement en un autre cycle ; il peut, dans certains cas, se transformer en un point, et je dirai alors que c'est un *cycle singulier*.

24. *Les tangentes communes à deux cycles singuliers ont pour réciproques deux directions opposées et, par suite, sont deux droites associées.*

Réciproquement :

Tout cycle tangent à deux directions associées est un cycle singulier ; un cycle est singulier, si les tangentes qu'il a en commun avec un autre cycle singulier quelconque sont des directions associées.

En particulier, le point O, centre de la transformation, est un cycle singulier ; pour qu'un cycle soit singulier, il faut donc et il suffit que les tangentes qu'on peut lui mener par le point O soient des directions associées.

25. Soient Q et Q' les conjuguées harmoniques des directions isotropes, relativement aux droites P et P' ; il résulte de ce qui précède que :

⁽¹⁾ Cette proposition, des plus importantes dans la théorie de la transformation par directions réciproques, est analogue à la propriété suivante : *L'angle sous lequel se coupent deux cercles se conserve après une transformation par rayons vecteurs réciproques.*

Pour qu'un cycle soit singulier, il faut et il suffit que les tangentes qu'on peut lui mener du point O constituent avec les directions Q et Q' un système harmonique.

26. *Étant donné un cycle singulier quelconque, pour qu'un autre cycle soit singulier, il faut et il suffit que leur centre de similitude soit sur la droite R.*

Deux droites associées quelconques se coupent sur la droite R.

Chaque point de la droite R doit être regardé comme un cycle singulier, le point correspondant étant le symétrique du point donné relativement au point O.

27. *Soient C et C' deux cycles réciproques quelconques; désignons par C'' le symétrique de C' relativement à l'axe de la transformation: les deux cycles C et C'' ont pour axe radical la droite double R.*

28. *Étant donné un cercle quelconque K, à ce cercle correspondent deux cycles opposés $+K$ et $-K$; en désignant par C et C' leurs transformés, je dirai que C et C' sont deux cycles associés.*

29. La transformation par directions réciproques me paraît, dans l'étude de la Géométrie plane, devoir être employée avec avantage à côté de la transformation par rayons vecteurs réciproques (il est évident que cette dernière transforme un cycle en un autre cycle ou une direction).

On peut toujours effectuer la transformation de telle sorte qu'à deux directions données D et D' correspondent deux directions opposées $+\Delta$ et $-\Delta$; on voit qu'alors aux cycles tangents à D et à D' correspondent des points de la droite Δ .

Comme application, proposons-nous le problème suivant : *Mener un cycle tangent à trois cycles donnés.*

Construisons les tangentes communes à deux des cycles, et effectuons une transformation telle que ces deux tangentes se transforment en deux directions opposées : les deux cycles dont je viens de parler se transformeront alors en deux points, et le problème sera ramené immédiatement au suivant, qui a deux solutions :

Mener par deux points un cycle tangent à un cycle donné:

Plus généralement, on peut toujours effectuer une transformation, de telle sorte que trois cycles donnés se transforment en trois points (1).

VI.

Cas particuliers importants de la transformation par directions réciproques.

30. Deux cas particuliers sont particulièrement à remarquer.

En premier lieu, les deux directions doubles P et P' peuvent être opposées; il est facile de voir alors que la réciproque d'une direction donnée est sa symétrique par rapport à la droite commune qui contient les deux directions.

Deux figures réciproques sont alors symétriques par rapport à l'axe de la transformation.

En second lieu, les deux directions doubles peuvent être des directions isotropes. En désignant, comme plus haut, par O le point de rencontre de ces directions, on voit aisément que la réciproque d'une direction donnée est sa symétrique par rapport au point O .

Deux figures réciproques sont alors symétriques par rapport au point O .

VII.

Courbes en involution. — Hypercycles.

31. Considérons une transformation par directions réciproques définie par ses deux directions doubles P et P' , et une courbe M (j'entends ici par courbe une suite de points se suivant dans un sens déterminé, en sorte qu'en chaque point de cette courbe la tangente ait une *direction déterminée*).

La courbe M sera dite en involution si, D désignant une direction quelconque tangente à cette courbe et D' la réciproque de D , la direction D' est elle-même tangente à M .

Les tangentes à M sont ainsi conjuguées deux à deux, de telle

(1) Depuis que cette Note a été communiquée à la Société, j'ai reconnu qu'il était utile de modifier légèrement la définition précédente de la transformation par directions réciproques; je développerai ce point dans une prochaine Communication.

sorte que chaque couple de tangentes conjuguées et les deux directions fondamentales P et P' constituent un système harmonique.

32. Étant donnée une courbe en involution, considérons une direction A prise arbitrairement dans le plan et ses conjuguées harmoniques relativement aux couples de tangentes conjuguées de la courbe : ces conjuguées enveloppent une courbe A' .

En considérant une autre direction B , on aurait une autre courbe B' , enveloppe des conjuguées harmoniques de B relativement aux couples de tangentes conjuguées de la courbe. Cela posé, si A' est un cycle, je dis que B' est également un cycle.

On peut, en effet, énoncer cette proposition :

Étant donné un système de directions en involution, les conjuguées harmoniques de deux directions quelconques relativement aux couples de directions conjuguées de l'involution forment deux systèmes projectifs (1).

Il résulte de là que B' et A' sont deux courbes projectives, ce qui démontre la proposition.

33. J'appellerai *hypercycle* une courbe en involution M jouissant de la propriété énoncée. Une telle courbe sera donc définie par les deux directions fondamentales P et P' , par une direction A et par le cycle K , qui est l'enveloppe des conjuguées harmoniques de A relativement aux tangentes conjuguées de M ; je dirai que le cycle K est le *cycle polaire* de la direction A .

On voit qu'à chaque direction du plan correspond un cycle polaire, et l'on démontrera facilement les propositions suivantes :

Si K est le cycle polaire d'une direction donnée A relative-

(1) Comme je l'ai dit plus haut; tous les théorèmes relatifs aux systèmes de points situés en ligne droite ont leurs analogues relativement aux systèmes de directions dans un même plan; la proposition sur laquelle je m'appuie ici découle immédiatement de la proposition bien connue qui suit :

Si quatre couples de points sont en involution, les conjugués harmoniques d'un point de la droite, pris à volonté, relatifs aux quatre couples de points, ont toujours le même rapport anharmonique, quel que soit ce point. (CHASLES, *Traité des sections coniques*, p. 99).

ment à un hypercycle M , le cycle polaire de toute tangente à K est tangent à la direction A .

Les tangentes communes aux cycles polaires de deux directions opposées $+D$ et $-D$ ont pour cycles polaires deux points de la droite D .

On conclut de là qu'il y existe une infinité de directions dont les cycles polaires se réduisent à des points.

34. Il est clair qu'un hypercycle M se transforme en un hypercycle M' par une transformation par directions réciproques; si P et P' sont les deux directions fondamentales de M , les réciproques de P et de P' sont les directions fondamentales de M' .

De là résulte que, si P et P' sont réelles, on peut toujours effectuer une transformation réelle de telle sorte que les réciproques de P et P' soient opposées, et par suite que la transformée ait un axe de symétrie.

Si, au contraire, P et P' sont imaginaires conjugués, on peut effectuer une transformation réelle de telle sorte que les réciproques de P et P' soient deux directions isotropes, et alors la transformée a un centre de symétrie.

Sur les transformations linéaires successives dans le même espace à r dimensions; par M. S. KANTOR.

(Séance du 7 mai 1880.)

Étant donnée une variété (un espace) V_r à r dimensions, on peut établir entre ses éléments une relation linéaire, c'est-à-dire telle, qu'à une variété linéaire à $r-1$ dimensions, contenue dans V_r , corresponde une autre variété linéaire à $r-1$ dimensions de V_r . Soit p un élément de V_r et supposons que l'élément correspondant soit p_1 . Alors à p_1 correspond par notre transformation un autre élément p_2 , et à celui-ci également un autre p_3 , etc. Nous appellerons p_n le $n^{\text{ième}}$ transformé de p . La transformation linéaire sera fixée, si l'on connaît $r+2$ couples d'éléments correspondants.

Prenons donc $r+1$ couples $a_1, a'_1, a_2, a'_2, \dots, a_{r+1}, a'_{r+1}$ et un

élément fixe p . La transformation ne sera déterminée que si nous faisons correspondre à p un certain élément p_1 , lequel nous voulons faire varier dans toute la variété. Par ce mouvement, nous obtiendrons ∞^r diverses transformations linéaires. Selon chacune d'elles le p aura un $n^{\text{ième}}$ transformé p_n . Voici le théorème qui se rapporte au lien entre p et p_n .

THÉOREME. — *Les éléments p et p_n sont liés entre eux par une relation telle qu'à un élément p_1 correspond un seul p_n , à un p_n , n^r éléments p_1 . Si le p_n se meut dans une variété linéaire à $n-1$ dimensions, le p se mouvra dans une variété à $n-1$ dimensions et du $n^{\text{ième}}$ degré.*

Toutes ces variétés forment un système linéaire, dans lequel se trouvent $r+1$ variétés spéciales (dégénérées), qui se composent d'une variété linéaire formée par r des éléments d_i , et de la variété du $(n-1)^{\text{ième}}$ degré à laquelle elle correspond par la transformation $p_{n-1} - p_1$.

Nous emploierons, dans ce qui suit, les dénominations indiquées ci-après. n étant un nombre entier et composé des facteurs simples $f_1, f_2, \dots, f_n$, c'est-à-dire, de la forme $f_1^{m_1} f_2^{m_2} \dots f_n^{m_n}$, soit

$$n - \sum \frac{n}{f_i} + \sum \frac{n}{f_i f_j} - \dots + (-1)^v \frac{n}{f_1 f_2 \dots f_v} = Z_1 \quad (1),$$

où les sommes s'étendent sur tous les facteurs f et $i \geq j$.

Alors nous désignerons par Z_k cette fonction

$$n^k - \sum \frac{n^k}{f_i^k} + \sum \frac{n^k}{f_i^k f_j^k} - \dots + (-1)^v \frac{n^k}{f_1^k f_2^k \dots f_v^k} = Z_k,$$

laquelle n'est plus de la même nature que Z_1 , parce qu'à ce bout il faudrait mettre $f_i^k \dots$ au lieu de $f_i^k \dots$.

Remarquons de plus que, si la transformation linéaire est périodique pour un seul élément de la variété, sans que tous les éléments d'un cycle puissent constituer une variété à $r-1$ dimensions,

(1) Cette fonction offre un très grand intérêt aussi au point de vue de la théorie des nombres. Voir la Note de l'auteur : *Wie viele cyclische Gruppen gibt es in einer quadratischen Transformation der Ebene* (*Annali di Matematica*, t. X).

elle l'est de même pour tous les éléments. Il y a $r + 1$ éléments doubles. Si la transformation est périodique pour V_r , elle est périodique pour toutes les variétés à $r - 1, r - 2, \dots$ dimensions, qui sont déterminées respectivement par $r, r - 1, \dots$ des points doubles. Cela posé, je dis :

Parmi toutes les transformations, il y en a Z_r qui ne réduisent l'élément p à lui-même qu'après n applications successives.

Mais ce n'est pas que toutes ces transformations soient périodiques pour tous les éléments; il n'y en a que

$$\begin{aligned} & (n-1)(n-2)\dots(n-r) - \sum \left(\frac{n}{f_i} - 1 \right) \left(\frac{n}{f_i} - 2 \right) \dots \left(\frac{n}{f_i} - r \right) \\ & + \sum \left(\frac{n}{f_i f_j} - 1 \right) \left(\frac{n}{f_i f_j} - 2 \right) \dots \left(\frac{n}{f_i f_j} - r \right) \\ & + (-1)^r \sum \left(\frac{n}{f_1 \dots f_r} - 1 \right) \dots \left(\frac{n}{f_1 \dots f_r} - r \right). \end{aligned}$$

La manière dont tous ces résultats géométriques s'appliquent à l'analyse me paraît remarquable.

Soient $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r+1}$ les paramètres arbitraires dont dépend linéairement la variété V_r , et supposons que pour l'élément a'_i tous les ξ s'annulent, sauf ξ_i .

L'équation d'une variété à $r - 1$ dimensions et du premier degré qui fait partie de V_r est

$$(1) \quad a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_{r+1} \xi_{r+1}.$$

Appelons

$$A_i \equiv \alpha_i^{(1)} \xi_1 + \alpha_i^{(2)} \xi_2 + \dots + \alpha_i^{(r+1)} \xi_{r+1}$$

l'équation de la variété à $r - 1$ dimensions qui est déterminée par les éléments $a_1, \dots, a_2, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{r+1}$, et $X_1, X_2, \dots, X_{r+1}$ les paramètres de p .

Alors, si la variété (1) est constituée par des éléments p_n , la variété correspondante constituée par p_i a pour équation

$$(2) \quad \frac{a_1}{L_1} \xi_1 \Omega_1^{n-2} + \frac{a_2}{L_2} \xi_2 \Omega_2^{n-2} + \dots + \frac{a_{r+1}}{L_{r+1}} \xi_{r+1} \Omega_{r+1}^{n-2}.$$

Dans l'équation (2), L_i désigne le résultat de la substitution des

$X_1, X_2, \dots, X_{r+1}$ à la place des $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r+1}$ dans le polynôme A_i .

$\Omega_i^{(n-2)}$ désigne une fonction du $(n-2)^{\text{ième}}$ degré qui s'obtient par le procédé suivant :

On fait

$$\Omega_i^{(1)} = \frac{\alpha_i^{(1)}}{L_1} \xi_1 A_1 + \frac{\alpha_i^{(2)}}{L_2} \xi_2 A_2 + \dots + \frac{\alpha_i^{(r+1)}}{L_{r+1}} \xi_{r+1} A_{r+1},$$

puis

$$\Omega_i^{(2)} = \frac{\alpha_i^{(1)}}{L_1} \xi_1 \Omega_1^{(1)} + \frac{\alpha_i^{(2)}}{L_2} \xi_2 \Omega_2^{(1)} + \dots + \frac{\alpha_i^{(r+1)}}{L_{r+1}} \xi_{r+1} \Omega_{r+1}^{(1)},$$

et l'on continue jusqu'à ce que l'on trouve

$$\Omega_i^{(n-2)} = \frac{\alpha_i^{(1)}}{L_1} \xi_1 \Omega_1^{(n-2)} + \frac{\alpha_i^{(2)}}{L_2} \xi_2 \Omega_2^{(n-2)} + \dots + \frac{\alpha_i^{(r+1)}}{L_{r+1}} \xi_{r+1} \Omega_{r+1}^{(n-2)}.$$

C'est donc l'opération successive exprimée par le symbole Ω qu'il faut appliquer.

Pour avoir les paramètres appartenant aux éléments p_1 , qui reproduisent le p comme p_n , il faut résoudre le système des équations

$$\frac{\xi_1 \Omega_1^{(n-2)}}{L_1 X_1} = \frac{\xi_2 \Omega_2^{(n-2)}}{L_2 X_2} = \dots = \frac{\xi_{r+1} \Omega_{r+1}^{(n-2)}}{L_{r+1} X_{r+1}}.$$

Les racines de ce système doivent jouir de relations singulières, parce qu'il est satisfait par le groupe des racines des équations

$$\frac{\xi_1 \Omega_1^{(f-2)}}{L_1 X_1} = \frac{\xi_2 \Omega_2^{(f-2)}}{L_2 X_2} = \dots = \frac{\xi_{r+1} \Omega_{r+1}^{(f-2)}}{L_{r+1} X_{r+1}},$$

si f est facteur de n .

Il ne sera pas sans intérêt, je l'espère, d'indiquer les énoncés de ces théorèmes et de quelques autres pour l'espace à trois dimensions ⁽¹⁾ :

Si quatre couples de points correspondants $a_1, a'_1, \dots, a_4, a'_4$ sont donnés et si p est un point fixe, il y a n^3 transformations linéaires qui contiennent ces couples et par lesquelles le $n^{\text{ième}}$ transformé du point p devient un point donné p_n .

⁽¹⁾ Voir un Mémoire de l'auteur : *Ueber successive lineare Transformationen* (Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Wien, 1880).

p restant fixe et p_n décrivant un plan, p_1 (c'est-à-dire le premier transformé de p) décrira une surface du $n^{\text{ième}}$ degré. Toutes ces surfaces forment un système linéaire, dont font partie les quatre surfaces composées par un plan $a'_1, a'_2, a'_3, \dots$ et la surface du $(n-1)^{\text{ième}}$ degré lui correspondant dans la transformation $p_{n-1} \rightarrow p_1$.

Il y a Z_3 transformations, qui ne reproduisent p que comme p_n .

Il y a $7Z_1$ transformations qui contiennent un tétraèdre double, dont une arête seulement porte une série cyclique de points et l'arête opposée porte une série cyclique de plans avec des cycles de n éléments.

Il y a $6Z_2 - 18Z_1$ transformations qui contiennent un tétraèdre double, dont une face porte une transformation plane cyclique avec des cycles de n points, et dont le sommet opposé porte etc.

Il y a $Z_3 - 6Z_2 + 11Z_1$ transformations qui sont périodiques pour tout l'espace.

Les points p_i et les points doubles des transformations ont une relation telle qu'un point p_i détermine quatre points doubles et un point double détermine un seul point p_i . Si p_i décrit un plan, les points doubles décrivent une surface du quatrième ordre, dont a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 sont des points doubles.

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

SÉANCE DU 2 AVRIL 1880.

PRÉSIDENCE DE M. JORDAN.

M. Gomes Teixeira adresse une Note *Sur le reste des séries ordonnées suivant les puissances fractionnaires d'une quantité.*

Élections : MM. Walckenaër et Lorin, présentés dans la dernière séance par MM. Jordan et Humbert, sont élus Membres de la Société.

Communications :

M. Luroth : *Sur les fonctions qui prennent des valeurs irrationnelles pour toutes les valeurs de la variable.*

M. Stephanos : *Sur la théorie des homozygies (Würfe).*

M. Brill : *Sur la théorie des points singuliers des courbes planes.*

M. Lucas : *Sur un théorème de M. Laguerre relatif à la théorie des équations.*

M. Rodet : *Sur le calcul par approximations successives des racines carrées.*

M. Laguerre : *Sur les équations obtenues en égalant à zéro un polynôme satisfaisant à une équation différentielle du second ordre.*

SÉANCE DU 16 AVRIL 1880.

PRÉSIDENCE DE M. JORDAN.

Élection : M. Kœnigs, présenté dans la dernière séance, par MM. Morel et Fouret, est élu Membre de la Société.

Communications :

M. Lucas : *Sur les nombres de Bernoulli.*

Sur des théorèmes relatifs à l'impossibilité des équations cubiques indéterminées.

M. Humbert : *Sur la réduction en fractions continues d'une classe de fonctions.*

SÉANCE DU 7 MAI 1880.

PRÉSIDENCE DE M. JORDAN.

Communications :

M. S. Kantor : *Sur les transformations linéaires successives dans le même espace.*

M. Mannheim : *Sur la généralisation d'un mode de génération de la surface de l'onde.*

M. Stephanos : *Sur un groupe de transformations linéaires dans l'espace à trois dimensions.*

SÉANCE DU 21 MAI 1880.

PRÉSIDENCE DE M. JORDAN.

Élection : M. S. Kantor, présenté dans la dernière séance, par MM. Mannheim et Brisse, est élu Membre de la Société.

Communications :

M. Humbert : *Sur une généralisation de la théorie des fractions continues algébriques.*

M. Stephanos : *Sur la représentation des homographies binaires par les points de l'espace, et sur la théorie des quaternions.*

M. Halphen : *Sur la surface de l'onde.*

M. Perrin : *Sur une propriété du quadrilatère articulé.*

M. Laquière adresse deux Notes intitulées, l'une *Construction géométrique des caustiques par réflexion*; l'autre *Construction géométrique de la tangente et du rayon de courbure des sections planes du tore.*

SÉANCE DU 4 JUIN 1880.

PRÉSIDENCE DE M. JORDAN.

Élection : M. Lefèvre, présenté dans la dernière séance par MM. Fouret et Morel, est élu Membre de la Société.

Communications :

M. Laguerre : *Sur une généralisation du rapport anharmonique au cas de quatre droites non concourantes.*

M. Halphen : *Sur des triangles à la fois inscrits dans une cubique et circonscrits à une courbe de troisième classe.*

M. Laquière adresse une *Nouvelle construction des cercles coupant trois cercles donnés sous des angles donnés* et un théorème *Sur l'enveloppe des sphères coupant trois sphères sous des angles donnés.*

SÉANCE DU 17 JUIN 1880.

PRÉSIDENCE DE M. JORDAN.

Communications :

M. S. Kantor : *Sur les réseaux de transformations linéaires dans le plan.*

M. Laguerre : *Sur la transformation par directions réciproques.*

M. Halphen complète sa communication de la séance précédente.

SÉANCE DU 2 JUILLET 1880.

PRÉSIDENCE DE M. LAGUERRE.

Communications :

M. Laguerre : *Sur la Géométrie de direction.*

M. Halphen : *Sur le jeu du taquin.*

M. Stephanos : *Sur la relation qui existe entre les points d'intersection de deux droites avec une surface du second degré, et les plans tangents menés par ces droites à la surface.*

M. de Polignac : *Sur la théorie des ramifications.*

M. Humbert : *Sur une généralisation de la théorie des fractions continues algébriques.*

SÉANCE DU 16 JUILLET 1880.

PRÉSIDENCE DE M. LEMONNIER.

Communication :

M. Stephanos : *Sur quelques systèmes remarquables de surfaces du second degré.*

FIN DU TOME HUITIÈME.



TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
État de la Société mathématique de France au mois de janvier 1880.....	5
Sur la fonction exponentielle; par M. LAGUERRE.....	11
Sur certains cas singuliers du déplacement d'un corps solide; par M. HALPHEN..	18
Sur la réduction en fractions continues d'une fonction qui satisfait à une équation linéaire du premier ordre à coefficients rationnels; par M. LAGUERRE...	21
Observations sur la théorie des caractéristiques; par M. HALPHEN.....	31
Remarques sur les équations différentielles linéaires du second ordre; par M. LAGUERRE.....	35
Sur la fonction $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^u$; par M. LAGUERRE.....	36
Sur l'application d'un principe de la théorie des fonctions à des recherches purement géométriques; par M. ELLING HOLST.....	52
Réponse aux observations de M. Halphen sur la théorie des caractéristiques; par M. SCHUBERT.....	60
Note sur l'évaluation du nombre des coniques faisant partie d'un système et satisfaisant à une condition simple; par M. SCHUBERT.....	61
Sur une formule d'Analyse; par M. HALPHEN.....	62
Note sur certaines équations différentielles obtenues par l'élimination de deux fonctions arbitraires; par M. WORMS DE ROMILLY.....	64
Sur l'épure des vingt-sept droites d'une surface du troisième degré, dans le cas où ces droites sont réelles; par M. CARON.....	73
Rectification d'une formule de probabilité; par M. LAQUIÈRE.....	74
Note sur un problème de probabilité; par M. LAQUIÈRE.....	79
Note sur une classe d'équations différentielles; par M. HAAC.....	80
Solutions régulières du problème d'Euler sur la marche du cavalier; par M. LAQUIÈRE.....	82
Extraits des procès-verbaux (séances du 7 novembre 1879 au 19 mars 1880)....	103
Note sur le calcul approché par la méthode de Poncelet des radicaux de la forme $\sqrt{x^2 - y^2}$; par M. LÉAUTÉ.....	106
Sur les fonctions 1^x et $(-1)^x$; par M. LAISANT.....	109
Sur l'équation hypergéométrique; par M. HUMBERT.....	112
Formules et considérations diverses se rapportant à la théorie des ramifications; par M. DE POLIGNAC.....	120
Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynôme; par M. HUMBERT.....	124
Note sur les déterminants bordés; par M. C. LE PAIGE.....	128

	Pages
Solutions régulières du problème d'Euler sur la marche du cavalier; par M. LAQUIÈRE (fin).....	132
Le souan-pan des Chinois et la banque des argentiers; par M. LÉON RODET.....	158
→ Sur les nouvelles formules de MM. Seidel et Stern, concernant les nombres de Bernoulli; par M. Éd. LUCAS.....	169
→ Théorèmes généraux sur l'impossibilité des équations cubiques indéterminées; par M. Éd. LUCAS.....	173
Sur la réduction en fractions continues d'une classe de fonctions; par M. HUMBERT.....	182
→ Sur l'extension du théorème de Descartes; par M. Éd. LUCAS.....	187
Sur une généralisation de la théorie des fractions continues algébriques; par M. HUMBERT.....	191
Sur la Géométrie de direction; par M. LACOMME.....	196
Sur les transformations linéaires successives dans le même espace à r dimensions; par M. S. KANTOR.....	208
Extraits des procès-verbaux (séances du 2 avril au 16 juillet 1880).....	215

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME VIII.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE.

COMMISSION D'IMPRESSION.

(ART. 2 DU RÈGLEMENT ADMINISTRATIF.)

MM. FOURET,	}	Secrétaires de la Société.
PICQUET,		
COLLIGNON,	}	Membres du Conseil.
HATON DE LA GOUPILLIÈRE,		
JORDAN,		
MANNHEIM,		

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE,

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME NEUVIÈME. — ANNÉE 1880-81.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1881



ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU MOIS DE JANVIER 1881 (').

Les initiales S. P. désignent les Sociétaires perpétuels.

Président.....	M. LAGUERRE.
Vice-Présidents	{ M. ANDRÉ (Desiré). M. COLLIGNON. M. LAISANT. M. LEMONNIER.
Secrétaires	{ M. FOURET. M. PICQUET.
Vice-Secrétaires.....	{ M. HUMBERT. M. PERRIN.
Archiviste	M. STEPHANOS.
Trésorier	M. CLAUDE-LAFONTAINE.
Membres du Conseil	{ M. OSSIAN BONNET. M. BRISSE. M. DARBOUX. M. FABRE. M. DE LA GOURNERIE. M. HALPHEN. M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. M. JORDAN. M. LUCAS. M. MANNHEIM. M. DE POLIGNAC. M. ROUCHÉ.
Membres du Conseil non résidents..	{ M. AOUST (l'abbé). M. CLAYEUX. M. CREMONA. M. WEYR (Émile).

') MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

ACHARD, directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie *la Foncière*, place Ventadour, à Paris.

ANDRÉ (Désiré), docteur ès Sciences, rue Gay-Lussac, 25, à Paris.

ANTOINE (Charles), ingénieur de la Marine, à Brest.

Aoust (l'abbé), professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille.

APPELL, professeur à la Faculté des Sciences, à Dijon.

ARON (Henri), banquier, rue de Grammont, 14, à Paris.

BACH, doyen de la Faculté des Sciences, place Stanislas, 2, à Nancy.

BENOIST (Adolphe), docteur en droit, place du Châtelet, à Chalon.

BERDELLÉ, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).

BERTRAND (Joseph), secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, rue de Seine, 6, à Paris.

BISCHOFFSHEIM, banquier, rue Taitbout, 3, à Paris, S. P.

BIENAYMÉ (Alexis), chef d'État-Major du Génie, à Alger.

BIENAYMÉ (Arthur), directeur de l'École d'application du Génie maritime, à Cherbourg.

BIENAYMÉ, membre de l'Institut (décédé), S. P.

BONNET (Ossian), membre de l'Institut, boulevard Saint-Michel, 80, à Paris.

BORCHARDT, membre de l'Académie des Sciences de Berlin (décédé), S. P.

BOUCHER, directeur de l'École préparatoire des Sciences et Lettres, rue du Pin, 9, à Angers.

BOUFFET, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Carcassonne (Aude).

BOULANGES, professeur de Mathématiques, boulevard Saint-Michel, 103, à Paris.

BOURGET, recteur de l'Académie d'Aix.

BREHARD, architecte, boulevard Malesherbes, 16, à Paris.

BRIOSCHI, directeur de l'École Polytechnique, à Milan (Italie).

BRISE (A.), ingénieur du dessèchement du lac Fucino, Abruzzes (Italie).

BRISSÉ (Ch.), répétiteur à l'École Polytechnique, rue Denfert-Rochereau, 22, à Paris.

BROCARD, capitaine du Génie, à Alger, S. P.

CABART (Maurice), boulevard Saint-Michel, 145, à Paris.

CARON, professeur de Géométrie descriptive, rue des Feuillantines, 52, à Paris.

CATALAN, professeur à l'Université, à Liège (Belgique).

CHARLES, membre de l'Institut (décédé), S. P.

CIVIALE, rue de la Tour-des-Dames, 2, à Paris.

CLAYEUX, intendant divisionnaire, à Oran (Algérie).

CLAUDE-LAFONTAINE, banquier, rue de Trévise, 32, à Paris, S. P.

COLLET, professeur à la Faculté des Sciences, à Grenoble.

COLLIGNON, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, rue des Saints-Pères, 28, à Paris.

DE COMBEROUSSE, professeur à l'École Centrale, rue Blanche, 63, à Paris.

COURCELLES, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, rue de Rennes, 68, à Paris.

CREMONA, directeur de l'École des Ingénieurs, à Rome.

CRETIN, professeur au lycée Saint-Louis, rue de Seine, 63, à Paris.

DARBOUX, maître de Conférences à l'École Normale, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.

DESQ, capitaine d'Artillerie, à Besançon.

DEWULF, lieutenant-colonel, chef du Génie, à Bayonne.

DOSTON, docteur ès sciences, rue de Rennes, 105, à Paris.

DURRANDE, professeur à la Faculté des Sciences, à Poitiers.

FABRE, ancien élève de l'École Polytechnique, rue Saint-Martin, 4, à Paris.

FLYE SAINTE-MARIE, répétiteur à l'École Polytechnique, rue du Sommerard, 12, à Paris.

FONTÈS, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Villefranche (Haute-Garonne).

FOURET, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Washington, 16, à Paris.

GABRIEL, ingénieur des Ponts et Chaussées, agrégé de la Faculté de Médecine, rue Joffroy, 39, à Paris-Batignolles.

GAUTHIER-VILLARS, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris, S. P.

GENTY, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Oran.

GERONO, rue Hallé, 40 et 42, à Paris.

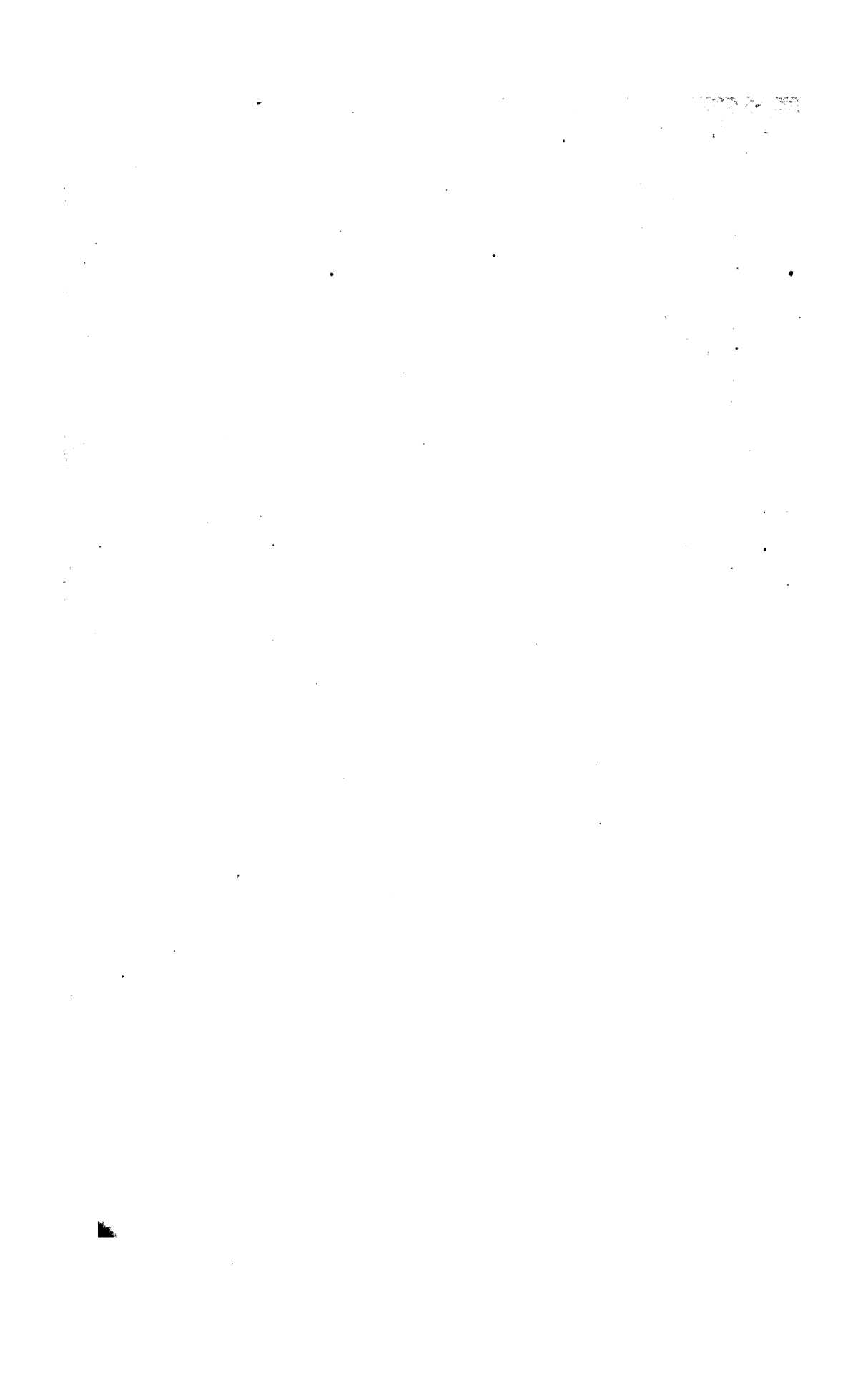
- GIROD (A.)**, ingénieur des Manufactures de l'État, rue de Vaugirard, 23, à Paris.
COFFART, boulevard des Batignolles, 84, à Paris.
COURNERIE (de la), membre de l'Institut, boulevard Saint-Michel, 75, à Paris.
GRAINDORGE, professeur à l'Université, rue Paradis, 92, à Liège (Belgique).
GUCCIA (Jean), via Ruggiero Settimo, 28, à Palerme.
GUÉLOT, chef de bataillon, commandant le 10^e bataillon de chasseurs à pied, à Saint-Dié (Vosges).
HAAC, répétiteur à l'École Polytechnique, avenue de Villars, 15, à Paris.
HALPHEN, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Sainte-Anne, 51, à Paris, S. P.
HATON DE LA GOUPILLIÈRE, ingénieur en chef des Mines, rue Garancière, 8, à Paris, S. P.
HATT, ingénieur hydrographe, rue de l'Université, 13, à Paris.
HENRY, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Privas (Ardèche).
HERMARY, capitaine d'Artillerie, Dépôt central, place Saint-Thomas-d'Aquin, 1, à Paris.
HERMITE, membre de l'Institut, rue de la Sorbonne, 2, à Paris, S. P.
HILAIRE, professeur de Mathématiques, rue d'Arras, 4, à Douai (Nord).
HIRST, directeur des études de l'École navale, à Greenwich (Angleterre), S. P.
HOLST (Elling), stipendiat de l'Université, à Christiania (Norvège).
HOUBICANT, chef de bataillon du Génie en retraite, rue Lecourbe, 88, à Paris.
HUGO (Comte L.), traducteur au Ministère des Travaux publics, rue des Saints-Pères, 14, à Paris.
HUMBERT, élève-ingénieur des Mines, rue Notre-Dame-des-Champs, 83, à Paris.
HUYOT, ingénieur des Mines, rue du Cirque, 10, à Paris.
JACQUIER, ingénieur des Ponts et Chaussées, cours Saint-Jean, 170, à Bordeaux.
JANIN, capitaine au 32^e régiment d'Artillerie, à Orléans.
JAVARY, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, rue du Cardinal-Le-moine, 28, à Paris.
JORDAN, professeur à l'École Polytechnique, rue de Varennes, 48, à Paris, S. P.
JOUFFRET, chef d'escadron d'Artillerie, à Palaiseau (Seine-et-Oise).
JUNG, professeur à l'Institut technique supérieur, à Milan.
KANTOR (S.), privat-docent, Schulplatz, 3, à Teplitz (Bohême).
KCHLER, directeur de l'École préparatoire de Sainte-Barbe, rue de Reims, 6, à Paris.
KENIGS, élève à l'École Normale supérieure, rue d'Ulm, 45, à Paris.
LAFFON DE LADÉBAT, amiral (décédé), S. P.
LACUERRE, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Michel, 61, à Paris.
LAISANT, député, rue de l'Aqueduc, 5, à Paris.
LAQUIÈRE, administrateur de la commune mixte de la Mekerra, à Sidi-bou-Abbès (Algérie).
LAUTH, manufacturier, à Thann (Alsace).
LÉAUTÉ, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Guy-de-la-Brosse, 6, à Paris.
LEBON (Ernest), professeur au lycée Charlemagne, rue des Feuillantines, 11, à Paris.
LEFEBURE DE FOURCY, rue Monsieur-le-Prince, 58, à Paris.
LEFEVRE, élève à l'École Normale supérieure, rue d'Ulm, 45, à Paris.
LEMOINE, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Cherche-Midi, 55, à Paris.
LEMONNIER, maître de conférences à la Sorbonne, boulevard Saint-Michel, 145, à Paris.
LE PAIGE, professeur à l'Université, rue des Anges, 31, à Liège (Belgique).
LESPIAULT, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux.
LÉVY (Maurice), professeur à l'École Centrale, boul. Saint-Germain, 258, à Paris.
LEZ (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
LIGUINE, professeur à l'Université, à Odessa (Russie).
LINDEMANN, professeur à l'Université, Albertstrasse, 12, à Fribourg-en-Brisgau (Allemagne).
LORIN, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du faubourg Saint-Honoré, 185, à Paris.
LUCAS, professeur au lycée Saint-Louis, rue du Bellay, 2, à Paris.
MALEYX, professeur au collège Stanislas, avenue de Montsouris, 2, à Paris.
MALLOIZEL, rue de la Vieille-Estrapade, 11, à Paris.

MANNHEIM, professeur à l'École Polytechnique, rue de la Pompe, 11, à Paris-Passy, S. P.
MARSILLY (le général de), rue Chante-Pinot, à Auxerre.
MATHIEU (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, rue du Faubourg-Saint-Jean, 22, à Nancy.
MIGNON, capitaine au 6^e régiment d'Artillerie, à Grenoble.
MITTAG-LEFFLER, professeur à l'Université, à Helsinki (Finlande).
MONTIGNY (DE), capitaine du génie, à Villeneuve-Saint-Georges (Seine).
MOUTARD, examinateur à l'École Polytechnique, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
NICOLAÏDES, professeur à l'Université, à Athènes.
OVIDIO (Enrico D'), professeur à l'Université, piazza Statuto, 17, à Turin.
PARMENTIER (le général), membre du Comité des fortifications, rue du Cirque, 5, à Paris.
PARRAN, ingénieur des Mines, rue de la Victoire, 59, à Paris.
PERCIN, capitaine d'Artillerie, à l'École spéciale militaire, à Saint-Cyr.
PERRIN, ingénieur des Mines, rue de Verneuil, 21, à Paris.
PHILIPPON, secrétaire de la Faculté des Sciences, à la Sorbonne, à Paris.
PICARD (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, à Toulouse.
PICQUET, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Michel, 103, à Paris.
PISTOYE (DE), capitaine d'Artillerie, à Nancy.
POLIGNAC (prince C. DE), rue Miroménil, 44, à Paris, S. P.
POUSSET, professeur au lycée, à Poitiers.
PRESLES (DE), sous-intendant militaire, à Évreux.
PUISSEUX, membre de l'Institut, boulevard Saint-Michel, 81, à Paris.
PUTZ, colonel commandant le 32^e régiment d'Artillerie, à Orléans.
RADAU, rue de Tournon, 12, à Paris.
RANCY (DE), sous-directeur de la Compagnie d'assurances contre l'incendie *l'Aigle*, rue de Châteaudun, 44, à Paris.
REINACH (baron DE), banquier, rue de la Bourse, 4, à Paris.
REY (Casimir), professeur à l'École régimentaire du Génie, à Versailles.
RIBAUCOUR, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Aix (Bouches-du-Rhône).
RODET, ingénieur à la Manufacture des tabacs, quai d'Orsay, à Paris.
ROLLAND, membre de l'Institut, au Ministère des Finances, à Paris.
ROUART, ingénieur civil, rue Oberkampf, 151, à Paris.
ROUCHE (Eugène), professeur à l'École Centrale, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 62, à Paris.
ROUSSELIN, professeur au lycée Fontanes, rue de la Ferme-des-Mathurins, 5, à Paris.
ROUX, architecte, rue de l'Arcade, 25, à Paris.
SAINTE-CLAIRE DEVILLE (Henri), membre de l'Institut, boulevard Saint-Germain, 155, à Paris.
SALTEL (Louis), professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux.
SARRAU, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Bondy, 24, à Paris.
SARTIAUX, ingénieur des Ponts et Chaussées, à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
SCHUBERT, professeur, Steindam, 89, à Hambourg (Allemagne).
SÉGUY, rue Pascal, 2, à Paris.
SIVERING (Jos.), ingénieur en chef des Travaux publics, place du Saint-Esprit, 9, à Luxembourg.
STEPHAN, directeur de l'Observatoire, à Marseille.
STEPHANOS (Dr Cyparissos), rue de l'Arbalète, 28, à Paris.
STUHNICKA, professeur à l'Université, à Prague (Bohême).
SVILOKOSSITSCH, ingénieur, à Paris.
TANNERY (Paul), ingénieur des Manufactures de l'État, au Havre, S. P.
TANNERY, professeur suppléant à la Faculté des Sciences, boulevard Saint-Michel, 141, à Paris.
TERRIER, professeur de Mathématiques, quai d'Orléans, 26, à Paris.
THÉRY, professeur au lycée, rue des Récollets anglais, à Douai (Nord).

TISSOT, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, boulevard de Bonne, 1, à Grenoble.
TISSERAND, membre de l'Institut, avenue de l'Observatoire, 5, à Paris.
TRESCA, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Vendôme (Loir-et-Cher).
TURQUAN, docteur ès sciences, boulevard de la Reine, 25, à Versailles.
VACQUANT, inspecteur général de l'Université, boulevard Saint-Michel, 12, à Paris.
VANECEK, professeur au lycée, à Jicin (Bohême).
VAZEILLE, ancien élève de l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 26, à Paris.
VICAIRE, ingénieur des Mines, rue d'Assas, 76, à Paris.
VOLLOT (Jules), professeur de Mathématiques au lycée, à Alger.
WALCKENAEER, élève-ingénieur des Mines, boulevard Haussmann, 135, à Paris.
WEILL, professeur de Mathématiques, rue Roquépine, 20, à Paris.
WELSCH, capitaine au 29^e régiment d'Artillerie, à Laon (Aisne).
WEYR (Dr Édouard), professeur à l'École Polytechnique, à Prague (Bohême).
WEYR (Dr Émile), professeur à l'Université, Marokkanergasse, 1, à Vienne (Autriche).
WORMS DE ROMILLY, ingénieur des Mines, boulevard Haussmann, 45, à Paris.

**Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son *Bulletin*.**

Académie des Sciences de Paris.
Académie Impériale des Sciences de Vienne.
Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.
Académie Impériale des Sciences de Saint-Petersbourg.
Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, à Bruxelles.
Académie des Sciences de Prague.
Académie des Sciences de Berlin.
Académie des Sciences de l'Institut de Bologne.
American Journal of Mathematics (rédacteur M. Sylvester, à Baltimore).
École Royale Normale supérieure de Pise.
Institut Royal de Luxembourg.
Institut Royal lombard des Sciences et Lettres de Milan.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (rédacteur M. Carl Ohrtmann, à Berlin).
Journal für die reine und angewandte Mathematik, à Berlin.
Mathematische Annalen (rédacteur M. Felix Klein, à Leipzig).
Réunion des officiers, à Lille.
Société des Sciences de Finlande, à Helsingfors.
Société mathématique de Moscou.
Société mathématique de Kharkoff (Russie).
Société mathématique de Prague.
Société Royale d'Édimbourg.
Société Royale astronomique de Londres.
Société mathématique de Londres.
Société des Sciences naturelles de Zurich.
Société mathématique d'Amsterdam.
Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.
Société philomathique de Paris.
Société Royale des Sciences de Goettingue.
Université Royale de Pise.
Tidskrift for Mathematik (rédacteur M. Zeuthen, à Copenhague).



BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

GÉOMÉTRIE DE L'ÉCHIQUIER.

Note sur le nombre des marches rentrantes que l'on peut obtenir en remplissant successivement les deux demi-échiquiers rectangulaires ayant pour frontière commune l'une des médianes de l'échiquier total; par M. E. LAQUIÈRE.

(Séance du 19 mars 1880.)

Dans le travail que nous avons eu l'honneur d'adresser à la Société il y a peu de temps, nous avons eu le regret de ne pouvoir citer les études déjà insérées au *Bulletin* par M. Flye Sainte-Marie, sur le nombre des marches parcourant successivement les trente-deux cases d'un demi-échiquier. Faute de pouvoir jeter les yeux sur cet article intéressant, qui compléterait fort savamment l'une des solutions logiques du problème d'Euler à laquelle nous avons été conduit nous-même, nous n'avons pu rendre à notre éminent collègue l'hommage mérité; nous sommes heureux de réparer aujourd'hui l'oubli involontaire que des souvenirs trop vagues nous avaient obligé de commettre, et nous en profitons pour utiliser cet article en dénombrant toutes les solutions, marches rentrantes sur l'échiquier total, qui en dérivent comme composées

de deux courses indépendantes l'une de l'autre, mais raccordées entre elles en tête et en queue, décrites successivement sur l'une et l'autre moitié de l'échiquier carré.

M. Flye Sainte-Marie démontre, d'une manière aussi simple qu'ingénieuse, que les trente-deux cases du demi-échiquier doivent être classées en deux groupes de seize, qu'il distingue en employant pour désigner les cases similaires un numéro simple dans le premier groupe, le même numéro accentué dans le second. Les deux groupes ainsi notés sont d'ailleurs, abstraction faite de l'accent, symétriques par rapport à la grande médiane du demi-échiquier et se composent, le premier des cases comprises dans notre travail parmi les éléments A et C, le second des cases des éléments D et B. Les cases impaires sont extérieures (ou frontières); les cases paires, intérieures. L'auteur démontre que : 1° pour remplir les trente-deux cases à la file, il est indispensable que les seize cases d'un même système soient parcourues tout d'une venue; 2° le point de départ et celui d'arrivée sont sur deux cases extérieures de systèmes différents (point que nous avons remarqué, mais dont la démonstration si simple nous avait échappé); 3° dans un même groupe (seize cases à numéros simples ou seize accentuées) la case de départ et la case d'arrivée sont l'une intérieure et l'autre extérieure.

M. Flye fait ensuite connaître le nombre de parcours qui unissent deux cases extrêmes possibles d'un même système, ainsi que le nombre de manières distinctes de faire parcourir au cavalier le demi-échiquier.

Pour en déduire le nombre des marches rentrantes sur l'échiquier total formées de deux parcours successifs comblant successivement les deux demi-échiquiers, nous formerons, avec les nombres donnés par l'auteur, un tableau M à double entrée donnant le nombre de parcours entre les deux cases extrêmes désignées d'un même groupe de seize cases du demi-échiquier. Ce nombre sera inscrit au point de croisement de la colonne et de la ligne aboutissant, sur la ligne et la colonne du cadre, aux deux cases d'entrée et de sortie du groupe. On aura soin de combiner les cases d'entrée et de sortie entre les côtés du cadre aboutissant ensemble à l'angle supérieur gauche ou à l'angle inférieur droit du Tableau.

TABLEAU M.

Nombre de parcours (d'après M. Flyc Sainte-Marie) entre les deux cases extrêmes désignées d'un même groupe (accentué ou non) du demi-échiquier.

○..... ⋮	1	5	9	13	
2	22	8	13	10	16
4	8	3	3	6	14
6	8	2	3	3	12
8	16	2	6	3	10
10	13	3	6	5	8
12	8	3	2	3	6
14	10	3	5	4	4
16	33	8	16	8	2
	13	11	7	3	⋮○

Ce Tableau nous servira à former, avec une facilité et une rapidité extrêmes, un second Tableau N indiquant le nombre des parcours de trente-deux cases d'un demi-échiquier unissant deux cases extrêmes désignées (sauf l'accentuation) comprises dans la même bande frontière. Ces deux cases, non accentuées sur le cadre du Tableau qui les indique comme ci-dessus, appartenant à l'un et l'autre des deux groupes différents, devront être considérées l'une comme sans accent, l'autre comme accentuée.

La frontière supérieure est composée des cases dont le numérotage est de l'une des deux formes $(4n + 1)$ ou $(4p - 1)'$.

La frontière inférieure des cases de la forme $(4n - 1)$ ou $(4p + 1)'$.

TABLEAU N.

Nombre de parcours de trente-deux cases entre deux extrêmes situées sur la même bande frontière (suivant les besoins, accentuer soit le chiffre de la colonne, soit celui de la bande désignant les cases extrêmes du parcours.)

	3	7	11	15
1	672	772	502	1872
5	180	208	136	502
9	276	304	208	772
13	240	276	180	672

On remarquera que les nombres de ce Tableau sont symétriques par rapport à la diagonale supérieure droite, les nombres complémentaires à seize correspondant à des groupes de marches symétriques les unes des autres par rapport à la petite médiane.

La disposition du Tableau M se prête au calcul rapide des nombres du Tableau N en raison des remarques suivantes.

Les marches de trente-deux cases entre deux cases extrêmes données se composent de douze groupes distincts d'après les douze sauts de passage d'un groupe à l'autre, qui se font entre les cases intérieures de l'un et l'autre groupe différant en plus ou en moins de quatre unités, l'une accentuée et l'autre sans accent. Les marches de seize cases à combiner deux à deux ayant ces cases pour extrêmes ont leurs nombres inscrits dans le Tableau M sur les lignes horizontales distantes de deux rangs et se correspondront, par suite, d'une manière commode pour donner à la fois tous les facteurs des combinaisons en faisant glisser l'une par rapport à l'autre, de deux lignes de bas en haut, puis de deux lignes de haut en bas, les colonnes ayant pour entête l'une des deux cases extrêmes des marches de trente-deux cases à énumérer. Comme exemple, nous donnerons le calcul du nombre de marches dont les cases extrêmes sont 7 et 1 :

Sauts de passage.	Nombre de marches combinées.
2,6'.....	16.8 = 128
4,8'.....	5.16 = 80
6,10'.....	2.13 = 26
8,12'.....	6.8 = 48
10,14'.....	6.10 = 60
12,16'.....	3.33 = 99
6,2'.....	2.22 = 44
8,4'.....	6.8 = 48
10,6'.....	6.8 = 48
12,8'.....	3.16 = 48
14,10'.....	3.13 = 39
16,12'.....	13.8 = 104
Total entre 7 et 1'.....	772

Le Tableau N ainsi établi servira d'une manière pareille à déterminer le nombre des marches rentrantes de soixante-quatre sauts

sur l'échiquier total. On les décomptera entre les deux cases extrêmes comprenant le saut de fermeture, par l'énumération des groupes que distinguent les six sauts de passage d'un demi-échiquier à l'autre restés possibles après le choix de la case de départ, et par suite du groupe auquel appartient la case initiale du saut de passage. On remarquera que le passage d'un demi-échiquier à l'autre s'opère sur les deux frontières contiguës entre deux cases dont le numéro diffère de quatre unités, avec modification d'accent, en faisant correspondre par superposition parallèle (coulisses) les deux demi-échiquiers. Les sauts de fermeture, qui ne sont autres que des sauts de passage, sont soumis à la même observation.

Cela posé, on pourra considérer comme cases de départ de la marche rentrante (choisie dans le demi-échiquier supérieur) avec les cases d'arrivée correspondantes dans le demi-échiquier inférieur les six couples :

Type $(\{n-1\}$; cases de départ (demi-échiquier sup.). $\frac{3}{7}$ $\frac{7}{11 \text{ ou } 3'}$ $\frac{11}{15 \text{ ou } 7'}$ $\frac{15}{11}$
 Type $(\{n_1-1\}'$; cas. d'arriv. corresp. (demi-éch. inf.).

ou les six symétriques :

Type $(\{p+1\}'$; départ (demi-échiquier supér.)..... $\frac{13'}{9}$ $\frac{9'}{5 \text{ ou } 13}$ $\frac{5'}{1 \text{ ou } 9}$ $\frac{1'}{5}$
 Type $(\{p_1+1\}$; arrivée (demi-échiquier infér.).....

Étant donnée une case de départ, la trente-deuxième case visitée arrivée dans le même demi-échiquier sera l'une quelconque des quatre frontières du groupe différent et donneront lieu à six sauts de passage possibles à chacun desquels correspond un groupe combiné de deux marches de trente-deux cases, dont l'importance est donnée par le produit des deux nombres du Tableau N convenablement choisis. Le calcul, sans explications du nombre de marches rentrantes entre la case centrale 7 du demi-échiquier supérieur et l'une des cases battues 11' du demi-échiquier inférieur, suffira à l'intelligence du résultat.

Cases extrêmes (sup. 7, inf. 11').

Sauts de passage.

1', 5	772.136 = 104 992
5', 9	208.208 = 43 264
9', 13	304.180 = 54 720
5', 1	208.502 = 104 416
9', 5	304.136 = 41 344
13', 9	276.208 = 57 408

Nombre de marches rentrantes entre les cases extrêmes 7. 11'. 406 144

On arrive ainsi aux résultats suivants :

TABLÉAU P

Nombre de marches rentrantes de soixante-quatre cases entre deux cases extrêmes désignées, à cheval sur la médiane frontière commune aux deux demi-échiquiers superposés, dont les trente-deux cases doivent être décrites sans interruption.

Entre chaque couple de cases extrêmes.				Nombre de marches.
3, 7'	13', 9	7, 3'	9', 13	540 000
7, 11'	9', 5	11, 7'	5', 9	406 144
11, 15'	5', 1	15, 11'	1', 5	994 740

La somme des trois nombres ci-dessus, 1940884, donne le nombre des marches rentrantes de la nature indiquée essentiellement distinctes. Ce nombre se quadruple par la distinction des marches symétriques entre elles et devient 7763536.

Si l'on tient compte, en outre, des marches en sens inverse, ainsi que de la double manière de diviser l'échiquier en deux rectangles égaux, ce nombre se quadruplera encore et donnera 31054144, comme le nombre total des marches rentrantes appartenant à la famille indiquée.

Parmi ces marches, un certain nombre sont composées de deux marches par demi-échiquier symétriques l'une de l'autre par rapport au centre de l'échiquier. Ce sont celles dont la trente-deuxième case (dernière du parcours dans le premier demi-échiquier) est en

communication avec la symétrie au centre de la case de départ ;
on les énumère dans le Tableau ci-dessous :

Case de départ.....	1	5	5	9	9	13
Case d'arrivée (même demi-échiquier).	11'	7'	15'	3'	11'	7'
Nombre de marches.....	502	208	502	258	208	258

Soit en tout 1936, nombre qu'il faudra doubler et porter à 3872, en intervertissant les accents, ou, au contraire, diminuer de moitié et réduire à 968, selon qu'on désirera distinguer ou confondre les marches, qui sont identiques à un axe de symétrie près.

Toutes ces marches se compléteront par une marche symétrique au centre à trente-deux sauts de distance.

En terminant cette Note, nous prions ceux de nos collègues qu'un tel sujet intéresse de rechercher si une méthode de groupement analogue à celle qui précède ne pourrait être appliquée aux modes naturels de description de l'échiquier signalés dans notre article précédent. Nous nous proposons de l'essayer un jour si nos loisirs nous le permettent ; mais, ne nous dissimulant point les difficultés autrement compliquées qui nous attendent dans cette étude, nous ne croyons pas inutile de faire appel à la bonne volonté de ceux de nos confrères à même de mener à bien une tâche qui sera peut-être au-dessus de nos propres forces.

Note sur la marche du cavalier dans un échiquier ;

par M. DE POLIGNAC.

(Séance du 21 mai 1880.)

1. Dans les développements intéressants que M. Laquière a récemment adressés à la Société sur le problème du cavalier, se trouve une méthode qui avait déjà été indiquée par moi. Elle consiste à chercher des solutions rentrantes dont les deux moitiés soient symétriques l'une de l'autre par rapport au centre de l'échiquier et à remplacer la marche irrégulière du cavalier par une suite de circuits partiels, déterminés à l'avance et qui servent à la décomposition et à la notation de l'échiquier. Ce procédé a fait de ma part l'objet d'une Note insérée dans les *Comptes rendus des*

séances de l'Académie des Sciences (avril 1861). Appliqué aux échiquiers de trente-six et de soixante-quatre cases, il conduit, par des transformations convenables, à des solutions rentrantes pour un échiquier quelconque (d'un nombre pair de cases).

Voici comment on peut noter la solution type dans l'échiquier ordinaire.

Prenons pour origine des coordonnées le coin inférieur gauche de l'échiquier et pour axes les deux côtés qui y aboutissent. Soient $x = 1, y = 1$ les coordonnées de la case du coin; on formera un circuit partiel rentrant avec les quatre cases

$$\begin{aligned} x = 1, \quad x = 3, \quad x = 4, \quad x = 2, \\ y = 1, \quad y = 2, \quad y = 4, \quad y = 3. \end{aligned}$$

Notons de la même lettre a chacune des cases de ce circuit : ce sera le circuit a .

On obtiendra également un circuit b de quatre cases en partant de la case b , dont les coordonnées sont $\begin{smallmatrix} x = 2 \\ y = 1 \end{smallmatrix}$.

De même la case c , $\begin{smallmatrix} x = 2 \\ y = 2 \end{smallmatrix}$, et la case d , $\begin{smallmatrix} x = 1 \\ y = 2 \end{smallmatrix}$, fourniront deux nouveaux circuits rentrants de quatre cases chacun.

Les quatre circuits a, b, c, d remplissent un carré de seize cases, un des quatre carrés élémentaires dans lesquels se décompose l'échiquier au moyen de deux lignes rectangulaires tracées par son centre.

Les trois autres carrés élémentaires se noteront de même, savoir :

Le carré élémentaire opposé par le sommet à celui qu'on vient d'achever, par les mêmes lettres a, b, c, d placées respectivement sur les mêmes cases que dans celui-ci.

Les deux carrés restants se noteront d'après la même règle, en remplaçant les lettres a, b, c, d par A, B, C, D ; ainsi, par exemple, une des lettres A du carré élémentaire inférieur sera sur la case, $x = 5, y = 1$.

L'échiquier étant ainsi préparé, partons de la case $\begin{smallmatrix} x = 2 \\ y = 3 \end{smallmatrix}$ qui appartient au circuit a , et parcourons-le dans le sens suivant :

$$\begin{aligned} x = 2, \quad x = 1, \quad x = 3, \quad x = 4, \\ y = 3, \quad y = 1, \quad y = 2, \quad y = 4, \end{aligned}$$

que nous conviendrons de conserver dans tous les autres circuits. La première moitié de la solution s'écrira

$$aAbBCcDd;$$

on peut encore l'écrire

$$\begin{array}{cccc} a & b & C & D \\ A & B & b & c, \end{array}$$

en convenant de lire les lettres par colonne : l'une ou l'autre forme suggère des règles mnémoniques faciles à formuler.

Comme on a noté des mêmes lettres, afin d'éviter l'emploi des accents, les cases appartenant aux carrés élémentaires opposés, la formule précédente devient ambiguë au dernier circuit d , qui pourrait appartenir à l'un quelconque des deux carrés supérieur ou inférieur. C'est dans le carré supérieur qu'il faudra prendre d . On serait, du reste, conduit fatalement à ce résultat en portant sur l'échiquier le parcours qui vient d'être écrit, car, si l'on prenait d dans le carré inférieur, on obtiendrait un circuit rentrant de trente-deux cases seulement, et la marche totale ne pourrait plus être rentrante. Dans tout le reste du parcours, la marche annotée sera *unique*, pourvu qu'on ait soin de rejeter les circuits symétriques de ceux déjà parcourus.

La seconde moitié de la solution s'écrira par la même formule, en commençant à la case $a \begin{smallmatrix} x=7 \\ y=6 \end{smallmatrix}$ du carré élémentaire supérieur, symétrique par rapport au centre de la case initiale $\begin{smallmatrix} x=2 \\ y=3 \end{smallmatrix}$.

Pour justifier cette assertion, il suffit d'observer les deux points suivants :

1° Dans l'échiquier annoté, il y a deux circuits marqués a , deux marqués A et C , situés dans des carrés élémentaires opposés par le sommet et composés de cases symétriques par rapport au centre. Or, dans le parcours $aAbBCcD$, chaque lettre n'entre qu'une fois. Donc toutes les cases symétriques de celles dont ce parcours se compose sont libres.

2° On vérifiera en traçant la figure (ou en faisant le calcul par coordonnées, ce qui serait possible, quoique long), que la trente-deuxième case du parcours annoté, c'est-à-dire la dernière du cir-

cuit d supérieur, est la case $\begin{smallmatrix} x=6 \\ y=8 \end{smallmatrix}$, de laquelle on peut passer à la case $\begin{smallmatrix} x=7 \\ y=6 \end{smallmatrix}$, symétrique de la case initiale. Donc les deux demi-solutions symétriques se *raccordent* et la seconde aboutira à la case $x=5, y=1$, ce qui donne une marche rentrante.

Pour faciliter l'intelligence de ce qui précède, je donne ici l'échiquier figuré par les lettres qui le composent :

C	D	B	A	c	d	b	a
B	A	C	D	b	a	c	d
D	C	A	B	d	c	a	b
A	B	D	C	a	b	d	c
c	d	b	a	C	D	B	A
b	a	c	d	B	A	C	D
d	c	a	b	D	C	A	B
a	b	d	c	A	B	D	C

En lui appliquant la solution

$aAbBCcDd$,

on verra qu'on peut encore l'énoncer ainsi :

Prendre les lettres par couples dans l'ordre alphabétique et commençant dans le carré élémentaire gauche inférieur; continuer à tourner dans les trois autres toujours dans le même sens ⁽¹⁾.

Sans la restriction imposée ici, on arriverait, en tournant toujours dans le même sens, à placer le cycle d de la demi-solution dans le carré initial, comme il a été dit plus haut. En continuant, on obtiendra une solution non rentrante, qui s'écrira

$aAbBCcDd; DdaAbBCc$

L'échiquier de trente-six cases se note d'une façon analogue, indiquée ci-dessous; les cases symétriques par rapport au centre sont toujours marquées des mêmes lettres, ainsi que les circuits

⁽¹⁾ *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, loc. cit.*

partiels, qui sont de trois lettres, mais ils ne sont plus rentrants; d'ailleurs, la décomposition en carrés élémentaires ne s'applique plus :

A	.	.	C	.	.
.	C	A	.	.	.
c	A	.	.	.	.
C	a	b	B	.	.
b	c	a	.	.	B
a	b	.	c	B	.

La demi-solution s'écrit très symétriquement ainsi :

$$aBcAbC.$$

La case initiale est ($x = 1, y = 3$) et la solution est *rentrante*, car la case finale C du demi-parcours est *conjuguée* de la symétrique de la case initiale.

Revenons à l'échiquier de soixante-quatre cases. On obtiendra d'autres solutions symétriques en modifiant les conditions du parcours, par exemple en s'interdisant d'écrire à côté l'une de l'autre deux mêmes lettres (majuscule et minuscule), à l'inverse de ce qui avait été fait d'abord, etc. Parmi les solutions de ce type, je citerai la suivante, rentrante et à deux parties symétriques, dans la notation de laquelle on a, pour éviter toute confusion, distingué par des accents les cycles symétriques; les lettres non accentuées s'appliquent aux deux carrés élémentaires inférieurs :

$$(1) \quad ad'CBcDA b', \quad a'dC'B'c'D'A'b.$$

On peut prendre pour case initiale *ad libitum* $\begin{matrix} x=2 \\ y=3 \end{matrix}$ ou $\begin{matrix} x=3 \\ y=2 \end{matrix}$; seulement tous les cycles n'y sont plus parcourus dans le même sens, ce qu'indique suffisamment la succession des lettres.

Le procédé d'Euler appliqué à cette solution permettra de la transformer en une autre, commençant à un coin et finissant à un autre coin. Je n'ai pas à revenir ici sur ce procédé, dont il est fait mention dans la *Théorie des nombres* de Legendre. Les transformations ci-dessous le mettront d'elles-mêmes en lumière. Comme ces transformations conduisent à séparer les cases d'un même cycle, on a employé des indices indiquant le rang de ces mêmes cases dans la solution dont on est parti et dans leurs cycles res-

pectifs; les lignes verticales indiquent les interversions dans la marche au moment où l'on passe d'une case intérieure à la dernière:

$$(2) \quad a_1 a_2 a_3 d' \dots A' \mid a_1 b_1 b_2 b_3 b_4,$$

$$(3) \quad a_1 \dots C' B' \mid b a_1 A' D' c',$$

$$(4) \quad a_1 \dots C_1 C_2 \mid c' \dots a_1 b B' C_1 C_2.$$

Cette dernière solution commence à l'angle inférieur gauche et finit à l'angle supérieur du même côté.

2. Extension à un échiquier quelconque; solutions rentrantes.

— Tous les échiquiers d'un nombre pair de cases peuvent se diviser en deux classes, ceux de la forme $(6 + 4n)^2$ et ceux de la forme $(8 + 4n)^2$.

Occupons-nous de ces derniers. On les formera successivement en ajoutant deux bandes à tous les côtés de l'échiquier précédent. Ils se déduiront donc tous de proche en proche de l'échiquier de soixante-quatre cases.

Les deux bandes extérieures sur chaque côté de l'échiquier $(8 + 4n)^2$ forment une zone quadrangulaire. Détachons-la par la pensée du reste de l'échiquier. On peut avec le cavalier parcourir la moitié de cette zone en partant d'un coin, soit le coin inférieur gauche, et tournant toujours dans le même sens, et la dernière case de ce circuit partiel sera *conjuguée* du coin inférieur gauche de l'échiquier $[8 + 4(n - 1)]^2$. En détachant de même une zone quadrangulaire de ce dernier, on en parcourra la moitié, et, en répétant ce procédé, on arrivera au coin inférieur gauche de l'échiquier de soixante-quatre cases. A celui-ci on appliquera la solution (4) donnée ci-dessus, qui finit à l'angle supérieur gauche, et l'on verra qu'on peut parcourir dans l'ordre inverse les moitiés des zones restées libres; on aura ainsi une solution non rentrante pour l'échiquier $(8 + 4n)^2$.

Ci-joint le Tableau de ce procédé appliqué à l'échiquier de cent quarante-quatre cases:

144	35	.	15	.	33	.	13	.	31	.	11
105	16	.	34	.	14	.	32	.	12	.	30
36	125	104	.	.	.	.	.	.	.	10	.
17	106	.	.	.	.	.	.	.	.	29	.
126	37	.	.	.	.	.	.	.	.	.	9
.	18	93	.	.	.	.	.	.	.	.	28
38	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	.
19	.	.	.	94	.	.	.	.	.	27	.
.	39	78	.	.	.	.	.	.	.	.	7
.	20	41	.	77	.	.	.	.	.	.	26
40	.	2	.	22	.	4	.	24	.	6	.
1	.	21	.	3	.	23	.	5	.	25	.

Les cases marquées 41 et 104 sont les cases initiale et finale de la solution (4) de l'échiquier ordinaire.

On rendra cette solution rentrante dans le cas général au moyen de la remarque suivante.

Remarque. — Si dans une solution quelconque

$$1 \ 2 \ 3 \ \dots \ l \ l+1 \ \dots \ m \ m+1 \ \dots \ n \ n+1 \ \dots \ z,$$

la dernière case z étant conjuguée de n , on a en même temps

$$n+1 \text{ conjuguée de } m,$$

$$m+1 \text{ conjuguée de } l$$

ou enfin

$$l+1 \text{ conjuguée de } 1,$$

on pourra rendre le parcours rentrant par des transformations successives, et cela quel que soit le nombre des cases l , m , n , pourvu que leurs rangs aillent en croissant.

Cette remarque, dont la démonstration est facile, s'appliquera à toutes les solutions dont le type vient d'être donné, et les cases l , m , n , ... occuperont des places déterminées qui se déduiront très simplement les unes des autres en passant d'un échiquier au suivant. Pour mettre ce fait complètement en évidence, il faudrait tracer des figures et entrer dans de plus grands développements que n'en comporte cette courte Note; mais le lecteur curieux de vérifier l'assertion trouvera dans la remarque qui vient d'être faite les éléments de la vérification.

Dans l'échiquier de cent quarante-quatre cases, les lettres l , m , ... sont

$$l = 19, \quad m = 77, \quad n = 93, \quad p = 125.$$

On peut vérifier sur le Tableau précédent que les cases marquées de ces numéros satisfont à la loi énoncée dans la remarque.

Tout ce qui précède s'étendra aux échiquiers de la forme $(6 + 4n)^2$ qui se déduisent de l'échiquier de trente-six cases par la juxtaposition de bandes. Les zones formées par ces bandes se rempliront de même par moitié jusqu'à ce qu'on arrive à l'échiquier de trente-six cases, dont on aura dû, au préalable, transformer la solution rentrante par le procédé d'Euler. En commençant cette solution rentrante à l'angle inférieur gauche, l'intervention se fera sur la trente et unième case du circuit et la case finale sera située à la gauche de celle qui occupe l'angle supérieur de droite.

L'échiquier de seize cases n'admet aucune solution. D'ailleurs, les échiquiers impairs n'en admettent pas de rentrantes. Les formules précédentes fournissent tous les autres échiquiers.

Sur une généralisation de la théorie des fractions continues algébriques; par M. G. HUMBERT.

[Suite (1)].

(Séance du 2 juillet 1880.)

Remarque. — On démontrerait de la même manière que, si des polynômes $R_1(x), R_2(x), \dots, R_n(x)$, de degrés quelconques, satisfont à la même relation que les polynômes $P(x)$, à savoir

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z)}{\Delta(z)} R_1(z) \Pi_{(m+1)n-2}(z) dz + \dots \\ + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{K(z)}{\Delta(z)} R_n(z) \Pi_{(m+1)n-2}(z) dz = 0,$$

la somme du nombre des racines de $R_1(z)$ comprises entre x_0

(1) Voir le t. VIII de ce *Bulletin*, p. 191.

et x_1 , du nombre des racines de $R_1(z)$ comprises entre x_1 et x_2 , etc., du nombre des racines de $R_n(z)$ comprises entre x_{n-1} et x_n , est au moins égale à mn .

Plus généralement, en désignant par $f(z)$ une fonction qui ne change pas de signe entre x_0 et x_1 , entre x_1 et x_2 , etc., entre x_{n-1} et x_n , si on a la relation

$$\int_{x_0}^{x_1} f(z) R_1(z) P_\mu(z) dz + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(z) R_n(z) P_\mu(z) dz,$$

où $P_\mu(z)$ désigne un polynôme quelconque, au plus de degré μ , on en conclut que la somme du nombre des racines de $R_1(z)$ comprises entre x_0 et x_1 , etc., du nombre des racines de $R_n(z)$ comprises entre x_{n-1} et x_n , est au moins $\mu - n + 2$. Ce théorème ne cesse d'être vrai que si tous les polynômes $R(z)$ sont nuls.

Dans le cas de $n = 2$, par exemple, si l'on a

$$\int_{x_0}^{x_1} f(z) R_1(z) P_\mu(z) dz + \int_{x_1}^{x_2} f(z) R_2(z) P_\mu(z) dz = 0,$$

la somme du nombre des racines de $R_1(z)$ comprises entre x_0 et x_1 et du nombre des racines de $R_2(z)$ comprises entre x_1 et x_2 est au moins égale à μ .

Si la somme des degrés de $R_1(z)$ et de $R_2(z)$ était inférieure à μ , il est clair que le théorème précédent donnerait un résultat absurde; on en conclut alors que

$$R_1(z) = 0,$$

$$R_2(z) = 0.$$

Même conclusion dans le cas général si la somme des degrés des polynômes $R(z)$ était inférieure à $\mu - n + 2$.

THÉORÈME II. — *Les polynômes $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$ satisfont à une équation différentielle d'ordre $n + 1$, dans laquelle le coefficient d'une dérivée quelconque $\frac{d^k y}{dx^k}$ est un polynôme entier en x , de degré μ .*

On a en effet

$$\sum \int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z)}{\Delta(z)} P_1(z) \Pi_{(m+1)n-2}(z) dz = 0;$$

on en conclut

$$\sum \int_{x_0}^{x_1} K(z) P_1'(z) \Pi_{mn-2}(z) dz = 0,$$

en désignant par $P_1'(z)$ la dérivée de $P_1(z)$ et par $\Pi_{mn-2}(z)$ un polynôme entier en z quelconque, de degré inférieur ou égal à $mn - 2$.

On a en effet, après une intégration par parties,

$$\begin{aligned} \sum \int_{x_0}^{x_1} K(z) P_1'(z) \Pi_{mn-2}(z) dz \\ = \sum [K(z) P_1(z) \Pi_{mn-2}(z)]_{x_0}^{x_1} - \sum \int_{x_0}^{x_1} P_1(z) d[K(z) \Pi_{mn-2}(z)]. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} P_1(z) d[K(z) \Pi_{mn-2}(z)] \\ = \int_{x_0}^{x_1} P_1(z) \frac{K(z)}{\Delta(z)} [\Pi'_{mn-2} \Delta(z) + \Pi_{mn-2}(z) G(z)] dz. \end{aligned}$$

Mais le polynôme entre crochets

$$\Pi'_{mn-2}(z) \Delta(z) + \Pi_{mn-2}(z) G(z) = Z(z)$$

est au plus de degré $(m+1)n - 2$; donc la somme

$$\sum \int_{x_0}^{x_1} P_1(z) \frac{K(z)}{\Delta(z)} Z(z) dz$$

sera nulle, en vertu de la relation fondamentale.

D'ailleurs, la fonction

$$K(z) P_1(z) \Pi_{mn-2}(z)$$

s'annule avec $K(z)$ pour les valeurs

$$z = x_0, \quad z = x_1, \quad \dots, \quad z = x_n;$$

il reste donc

$$\sum \int_{x_0}^{x_1} K(z) P_1'(z) \Pi_{mn-2}(z) dz = 0.$$

On aura de même

$$\sum \int_{x_0}^{x_1} K(z) \Delta(z) P_1''(z) \Pi_{(m-1)n-2}(z) dz = 0,$$

.....

et en général

$$\sum \int_{x_0}^{x_1} K(z) \Delta^p(z) P_1^{p+1}(z) \Pi_{(m-p)n-2}(z) dz = 0.$$

Ce sont ces relations qui vont nous donner la démonstration du théorème énoncé.

Pour simplifier les calculs, je donnerai cette démonstration dans le cas de $n = 2$; on verra aisément que la démonstration est générale.

Je remarque d'abord que de la relation

$$\sum \int_{x_0}^{x_1} K(z) \Delta^p(z) P_1^{p+1}(z) \Pi_{(m-p)n-2}(z) dz = 0$$

je puis déduire, puisque $K(z)$ s'annule pour $z = x_0, x_1, \dots, x_n$,

$$\sum \int_{x_0}^{x_1} d[K(z) \Delta^p(z) P_1^{p+1}(z)] \Pi_{(m-p)n-2}(z) = 0.$$

Les Π désignent toujours des polynômes quelconques de degré égal ou inférieur à l'indice.

Dans le cas de $n = 2$, considérons les trois équations

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \frac{K(z)}{\Delta(z)} P_1(z) \Pi_{2m}(z) dz + \int_{x_1}^{x_2} \frac{K(z)}{\Delta(z)} P_2(z) \Pi_{2m}(z) dz &= 0, \\ \int_{x_0}^{x_1} K(z) P_1'(z) \Pi_{2m-2}(z) dz + \int_{x_1}^{x_2} K(z) P_2'(z) \Pi_{2m-2}(z) dz &= 0, \\ \int_{x_0}^{x_1} d[K(z) \Delta(z) P_1''(z)] \Pi_{2m-2}(z) dz \\ + \int_{x_1}^{x_2} d[K(z) \Delta(z) P_2''(z)] \Pi_{2m-2}(z) dz &= 0. \end{aligned}$$

Dans la première de ces équations, posons

$$\Pi_{2m}(z) = C\Delta(z)\Pi_{2m-2}(z),$$

ce qui est possible, puisque $\Delta(z)$ est du troisième degré (C désigne une constante arbitraire); dans la seconde, posons

$$\Pi_{2m-2}(z) = (Az + B)(z)\Pi_{2m-4}(z),$$

et ajoutons les trois équations : il vient

$$\sum \int_{\dots}^{x_1} K(z) \{ \Delta(z) P_1''(z) + [G(z) + \Delta'(z)] P_1'(z) + (Az + B) P_1'(z) + CP_1(z) \} \Pi_{2m-2}(z) = 0.$$

La fonction entre accolades est un polynôme de degré m au plus; il en est de même de la fonction analogue en $P_2(z)$, qui ne diffère de celle qui est écrite que par la substitution de $P_2(z)$ à $P_1(z)$.

Soient

$$P_1(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \dots,$$

$$P_2(z) = B_0 z^m + B_1 z^{m-1} + B_2 z^{m-2} + \dots,$$

$$\Delta(z) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

et

$$G(z) = Dx^2 + Ex + F.$$

Le coefficient du terme en z^m dans la première fonction sera

$$A_0[m(m-1)(m-2) + (D+3)m(m-1) + Am + C].$$

Dans la seconde, ce sera B_0 , multiplié par le même facteur.

De même, le coefficient du terme en z^{m-1} sera, dans la première fonction, de la forme

$$A_0(\alpha A + bB + cC + d) + A_1(\alpha' A + b' B + c' C + d'),$$

$\alpha, b, c, d, \alpha', b', c', d'$ étant des constantes faciles à former et dont quelques-unes peuvent être nulles.

Dans la seconde fonction, ce coefficient aura la même forme; il suffira de remplacer A_0 par B_0 et A_1 par B_1 .

Or nous pouvons disposer des coefficients A, B, C de manière à

satisfaire aux trois équations

$$\begin{aligned} m(m-1)(m-2) + (D+3)m(m-1) + Am + C &= 0, \\ aA + bB + cC + d &= 0, \\ a'A + b'B + c'C + d' &= 0. \end{aligned}$$

Dans ce cas, la fonction

$$\Delta(z)P_1'''(z) + [G(z) + \Delta'(z)]P_1''(z) + (Az + B)P_1'(z) + CP_1(z)$$

sera au plus de degré $m-2$.

Il en sera de même de la fonction analogue en $P_2(z)$.

Désignons pour un instant ces fonctions par $R_1(z)$ et $R_2(z)$; on a trouvé

$$\int_{x_0}^{x_1} K(z)R_1(z)\Pi_{2m-3}(z)dz + \int_{x_1}^{x_2} K(z)R_2(z)\Pi_{2m-3}(z)dz = 0.$$

Or, d'après une remarque faite plus haut, la somme du nombre des racines de $R_1(z)$ comprises entre x_0 et x_1 et du nombre des racines de $R_2(z)$ comprises entre x_1 et x_2 est au moins égale à $2m-3$. Mais, ces deux polynômes étant au plus de degré $m-2$, cette proposition est absurde; il faut donc conclure que l'on a

$$R_1(z) = 0, \quad R_2(z) = 0$$

ou

$$\Delta(z)Y'''(z) + [G(z) + \Delta'(z)]Y''(z) + (Az + B)Y'(z) + CY(z) = 0,$$

Y désignant l'un des polynômes $P_1(z)$, $P_2(z)$. Cette relation démontre le théorème énoncé.

Dans le cas général, on donnerait du théorème II une démonstration tout à fait analogue et on arriverait à une équation de la forme indiquée.

Détermination de A, B, C. — Les équations qui déterminent ces constantes sont, en posant

$$\Delta = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta,$$

$$G = Dx^2 + Ex + F,$$

$$zm(m-1)(m-2) + (D+3\alpha)m(m-1) + Am + C = 0,$$

$$a(m-1)(m-2)(m-3)$$

$$+ (D+3\alpha)(m-1)(m-2) + A(m-1) + C = 0,$$

$$\beta m(m-1)(m-2) + (E+2\beta)m(m-1) + Bm = 0.$$

On suppose $m \geq 2$.

Le déterminant des inconnues, étant

$$\begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ m-1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \end{vmatrix} = m,$$

n'est nul que si $m = 0$, c'est-à-dire si les polynômes $P_1(x)$ et $P_2(x)$ sont des constantes; mais alors les équations précédentes ne s'appliquent pas. On aurait dans ce cas $C = 0$, quels que soient A et B, ce qui est évident *a priori*.

(A suivre.)

Formules et considérations diverses se rapportant à la théorie des ramifications; par M. DE POLIGNAC.

[Suite (1)].

(Séance du 2 juillet 1880.)

III.

Représentation d'une ramification au moyen d'un Tableau numérique.

1. Les éléments essentiels d'une ramification sont les suivants .

- 1° Le nombre de ses nœuds et l'ordre de chacun d'eux (2);
- 2° Leur ordre de succession sur les branches (indéfinies) qui les joignent, ce qu'on peut appeler la *loi de connexité* de ces mêmes nœuds.

Soient 1, 2, 3, 4, 5, ... les nœuds numérotés au hasard. On pourra indiquer leur loi de connexité par des colonnes formées de chiffres juxtaposés, par exemple

1	2	3	4	3	7	...
1	3	2	5			
			3	6		

(1) Voir le t. VIII de ce *Bulletin*, p. 120.

(2) L'ordre d'un nœud est, par définition, le nombre des branches qui s'y réunissent (Ch. I).

En réunissant des groupes appartenant à des colonnes différentes, on formera des branches indéfinies ou des portions de branches. Ainsi, avec 1, 2 et 2, 4, on fera 1 2 4 et de même 1 3 7, ... Par ce moyen, on pourra, et généralement de plusieurs manières, remplacer l'ensemble des groupes de deux chiffres par un Tableau unique, formé d'un certain nombre de lignes horizontales. Dans le cas actuel, un de ces Tableaux sera

$$\begin{array}{c} 1 \ 2 \ 4 \\ 7 \ 3 \ 1 \\ 5 \ 2 \ 6 \end{array}$$

et un autre,

$$\begin{array}{c} 1 \ 2 \ 6 \\ 1 \ 3 \ 7 \\ 5 \ 2 \ 4 \end{array}$$

Remarquons que le critérium de l'équivalence des deux Tableaux est que chaque chiffre se trouve, dans l'un et dans l'autre, associé aux mêmes chiffres. Au moyen de l'un ou de l'autre, on peut évidemment tracer les branches de jonction de l'arbre, c'est-à-dire celles qui joignent les nœuds entre eux. Quant aux branches libres, on les indiquera sur chaque Tableau par des indices dont on affectera chaque lettre et dont il sera question plus loin. Pour le moment, nous allons nous occuper de la réduction d'un Tableau au nombre minimum de lignes horizontales. Nous l'appellerons alors *irréductible*, et nous verrons qu'il y en a plusieurs, mais équivalents, dans le sens donné ci-dessus à ce mot.

Appelons *lettres libres* celles qui commencent ou terminent une ligne; nous aurons la règle suivante :

Si une lettre a est libre dans deux lignes, le Tableau sera réductible; irréductible dans le cas contraire.

La première partie de cette règle est évidente; ainsi le premier Tableau précédent peut s'écrire

$$\begin{array}{c} 7 \ 3 \ 1 \ 2 \ 4 \\ 5 \ 2 \ 6 \end{array}$$

Pour démontrer la seconde, il suffit d'observer que, lorsque

deux lignes se combinent, auquel cas le passage de l'une à l'autre s'effectue sur un chiffre commun aux deux, si ce chiffre commun n'est pas un chiffre libre *dans les deux lignes*, les chiffres négligés à droite et à gauche, dans chaque ligne, devront être écrits de nouveau, pour conserver la loi de connexité. Ces deux tronçons se combinent d'ailleurs aussi en une seule ligne horizontale. On retrouvera donc deux lignes, et il n'y aura ni perte ni gain. Exemple : le Tableau précédent peut être modifié sur le chiffre 2, et s'écrira d'abord, en décomposant,

$$\begin{array}{r} 5 \ 2 \ 1 \ 3 \ 7 \\ 6 \ 2 \\ 4 \ 2 \end{array}$$

puis, en recomposant,

$$\begin{array}{r} 5 \ 2 \ 1 \ 3 \ 7 \\ 6 \ 2 \ 4 \end{array}$$

nouveau Tableau irréductible et équivalent au précédent.

Comme complément de ce qui précède, je mentionnerai une règle pour former *a priori* avec un nombre de chiffres donnés des Tableaux irréductibles ou non, mais susceptibles de représenter une ramification (moins les branches libres) :

Écrire les chiffres donnés sur des lignes horizontales, avec la condition que chaque ligne contienne un chiffre déjà écrit et n'en contienne qu'un.

Cette condition a pour but d'éviter les contours fermés, et il faut observer qu'elle n'est obligatoire que pour le procédé de formation du Tableau. En intervertissant ensuite les lignes, elle pourra se trouver en défaut, sans nuire à la représentation de la ramification considérée.

2. J'aborde maintenant la notation d'un Tableau au moyen d'indices. Prenons, pour fixer les idées, le Tableau irréductible annoté ainsi qu'il suit :

$$\begin{array}{r} 1_3 \ 2_0 \ 5_1 \ 8_2 \ 7_2 \\ 4_2 \ 3_3 \ 2_0 \\ 6_1 \ 5_1 \ 9_2 \ 10_3 \end{array}$$

il indiquera à la fois l'ordre de chaque nœud et sa *connexité*; ainsi :

Le nœud 1 est contigu à 2 et possède trois branches libres. Le nœud 2 est relié par trois branches de jonction aux nœuds 1, 5 et 3, et ne possède aucune branche libre, etc.

Sous cette forme, chaque ligne du Tableau ne représente encore qu'un parcours partiel commençant et aboutissant à un nœud. Pour que chacune d'elles indique clairement un tracé partiel complet, c'est-à-dire *un trait partant d'une extrémité libre et aboutissant à une autre extrémité libre, ou à une ligne déjà tracée*, nous conviendrons d'ajouter le signe ∞ au commencement et à la fin de chaque ligne du Tableau pour y représenter une branche libre, et de retrancher une unité aux indices de la lettre initiale et de la lettre finale de chaque ligne. A la vérité, nous pourrions parfois être conduits à l'indice négatif -1 ; mais la considération en sera utile pour la généralité des formules. Le Tableau précédent devient ainsi

$$\begin{array}{ccccccc} \infty & 1_2 & 2 & 5_1 & 8_2 & 7_1 & \infty \\ \infty & 4_1 & 3_1 & 2_{-1} & \infty & & \\ \infty & 6_3 & 5_1 & 9_2 & 10_2 & \infty & \end{array}$$

et l'on voit immédiatement que l'indice négatif dont est affecté le chiffre 2 indique que ce nœud n'a pas de branche libre, et que le *trait* représenté par la deuxième ligne du Tableau aboutit en réalité à celui que représente la première.

En résumé, en appelant ε le nombre de branches libres d'un nœud, α son indice, la règle de notation d'un Tableau irréductible sera

$$\begin{array}{ll} \alpha = \varepsilon - 1 & \text{pour toute lettre libre,} \\ \alpha = \varepsilon & \text{pour toute autre.} \end{array}$$

Un Tableau réductible se notera de même. Si une lettre se trouve k fois lettre initiale ou finale, on retranchera k unités à son indice; on aura donc

$$\begin{array}{ll} \alpha = \varepsilon - k & \text{pour une lettre libre } (k \text{ fois}), \\ \alpha = \varepsilon & \text{pour toute autre.} \end{array}$$

IV.

Énumération, au moyen d'un Tableau, du nombre de traits qui composent une ramification.

1. Tout Tableau, irréductible ou non, représente un tracé particulier d'un certain nombre N de traits. Chaque ligne du Tableau donne explicitement un trait proprement dit; on en obtiendra ainsi un nombre R égal au nombre des lignes du Tableau. Quant aux autres, ils ne sont pas donnés explicitement; ce sont les *chemins* qui restent à parcourir autour de chaque nœud. Soit r le nombre de ces chemins pour un nœud quelconque; on aura

$$N = R + \Sigma r;$$

r dépend de l'indice par une relation qui sera donnée tout à l'heure.

Le nombre N a déjà été appelé *nombre fondamental* de la ramification. Dans ce qui suit, nous n'admettons nullement son invariabilité, nous proposant, au contraire, de la faire ressortir de la considération du Tableau.

Tout d'abord, il convient de montrer qu'on peut ramener l'investigation au cas d'un Tableau irréductible.

Soit le Tableau réductible suivant, dans lequel une lettre L est supposée lettre libre un nombre quelconque de fois :

$$\begin{array}{l} \infty \dots L \dots \infty \\ \infty A \dots L \infty \\ \infty B \dots L \infty \\ \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \end{array}$$

En réduisant les deux lignes A et B en une seule,

$$\infty A \dots L \dots B \infty ,$$

nous perdons un trait proprement dit. Mais, d'un autre côté, nous en gagnons un sur les branches libres qui restent autour du nœud L , car les deux ∞ qui ont disparu, et qui représentaient explicitement deux branches libres, se combineront *en un seul chemin*, qui se re-

trouvera dans l'indice, lequel devient, d'après la règle, $\varepsilon - k + 2$. Il n'y a donc ni perte ni gain sur l'ensemble des traits qui résultaient du premier Tableau.

Comme ce raisonnement peut se répéter indéfiniment, on en conclut que le nombre total de chemins qu'on trouve dans un Tableau quelconque est le même que dans le Tableau irréductible équivalent.

Considérons donc un Tableau irréductible, et occupons-nous, pour chaque nœud, de l'évaluation de r au moyen de l'indice qui lui correspond.

Appelons c la *connexité* d'un nœud quelconque (nombre de ses branches de jonction). On remarquera que

$$\text{à } \begin{cases} \alpha = \varepsilon - 1 \\ \alpha = \varepsilon \end{cases} \text{ correspond } \begin{cases} c = 2p - 1, \\ c = 2p. \end{cases}$$

Cela résulte de ce que, dans un Tableau irréductible, une lettre ne peut être lettre libre que dans une seule ligne (n° 1); on a alors $c = 2p - 1$, car, si cette lettre est répétée, elle se trouve partout ailleurs entre deux lettres.

Maintenant, si $c = 2p$, les lignes du Tableau absorberont les $p = \left(\frac{c+1}{2}\right)$ chemins fournis par les branches de jonction du nœud considéré. Il restera ε branches libres donnant $\left(\frac{\varepsilon+1}{2}\right)$ traits. Mais ici $\varepsilon = \alpha$; donc le nombre de traits afférent à l'indice est

$$r = \left(\frac{\alpha+1}{2}\right).$$

Si $c = 2p - 1$, les $p - 1$ premières lignes du Tableau qui passent par le nœud considéré absorberont $p - 1 = \left(\frac{c+1}{2}\right) - 1$ chemins. Il restera une branche de jonction non parcourue. Elle correspond, dans le Tableau, à une lettre libre. La ligne qui contient cette lettre absorbera à la fois cette branche de jonction isolée et une branche libre (représentée dans le Tableau par le signe ∞). A ce moment, on aura parcouru $\left(\frac{c+1}{2}\right)$ chemins, et il restera $\varepsilon - 1$ branches libres non encore parcourues. Ces dernières four-

nissent $\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ traits. Mais ici $\varepsilon - 1 = \alpha$; on a donc toujours

$$r = \left(\frac{\alpha + 1}{2}\right),$$

α pouvant, dans certains cas, être égal à -1 . L'avantage de cette convention est, comme on voit, de conduire à une formule générale pour r .

De ce qui précède résulte l'équation générale

$$N = R + \sum \left(\frac{\alpha + 1}{2}\right).$$

On peut la mettre sous une autre forme.

En effet, m désignant l'ordre d'un nœud quelconque, on sait que $\left(\frac{m+1}{2}\right)$ est le nombre de chemins autour de ce nœud, considéré comme isolé. On aura donc

$$\left(\frac{m+1}{2}\right) = \left(\frac{c+1}{2}\right) + \left(\frac{\alpha+1}{2}\right),$$

par suite

$$N = R + \sum \left[\left(\frac{m+1}{2}\right) - \left(\frac{c+1}{2}\right) \right].$$

Or, dans un Tableau irréductible, R est une quantité constante *minima* (n° 1). La somme Σ est constante aussi, ne dépendant que des éléments fixes de la ramification. Donc N est une constante pour un Tableau irréductible, par suite pour tout Tableau, c'est-à-dire pour un tracé quelconque.

L'équation précédente est susceptible d'une autre interprétation. Si, dans la ramification donnée, on supprime toutes les branches libres, on obtiendra une nouvelle ramification, dans laquelle le nouveau nombre N sera égal au nombre R de la première ramification. Écrivons

$$N' = R,$$

et supposons qu'on soit parti de la ramification N' . Si l'on admet que N' est une constante, il en résultera la même propriété pour R , par suite pour N , nombre relatif à la ramification qu'on obtient en ajoutant un nœud à chaque extrémité libre de la ramification

initiale et un nombre *quelconque de branches libres à chaque nœud*. On peut donc également démontrer l'invariabilité du nombre fondamental par induction, car la proposition, étant évidente pour un simple trait, c'est-à-dire pour une ramification composée d'une seule branche sans nœuds, se trouvera démontrée pour une deuxième ramification ayant deux nœuds et une infinité de branches libres, puis pour une troisième ayant déjà une infinité de nœuds, et ainsi de suite.

V.

1. La magnitude d'une ramification est, d'après M. Sylvester, le nombre de ses branches. Ici il ne s'agit, bien entendu, que de branches de jonction entre deux nœuds consécutifs ou de branches libres.

D'après cette définition, la magnitude d'une ramification qui ne possède qu'un nœud n'est autre chose que ce qui a été appelé *ordre du nœud*.

Isolons par des coupures tous les nœuds d'une ramification, comme il a été fait au § I (*Remarque fondamentale*). En rejoignant d'abord deux nœuds, on obtiendra une ramification partielle. Soient $M_{1,2}$ sa magnitude et m_1, m_2 les ordres des deux nœuds; on aura

$$M_{1,2} = m_1 + m_2 - 1,$$

d'où une induction facile donnera, pour la magnitude M d'une ramification dont v est le nombre des nœuds,

$$M = m_1 + m_2 + \dots - (v - 1)$$

ou

$$M = \Sigma m - (v - 1).$$

D'ailleurs, nous avons trouvé (§ I)

$$N = \sum \left(\frac{m+1}{2} \right) - (v - 1);$$

donc

$$M = N = \Sigma m - \sum \left(\frac{m+1}{2} \right).$$

Séparant les ordres pairs et impairs comme au § II (n° 2), nous aurons

$$\Sigma m = 2(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_p) + 2(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_l) + i$$

ou

$$\Sigma m = 2\Sigma\mu + 2\Sigma\lambda + i$$

et

$$\Sigma \left(\frac{m+1}{2} \right) = \Sigma\mu + \Sigma\lambda + i,$$

par suite

$$M - N = \Sigma\mu + \Sigma\lambda,$$

et, comme nous avons trouvé (§ II, n° 2)

$$N = \Sigma\mu + \Sigma\lambda - p + 1,$$

formule dans laquelle p désigne le nombre des nœuds d'ordre pair, il vient

$$M = 2N + p - 1$$

pour la relation qui existe entre la magnitude et le nombre fondamental.

Corollaire. — Si $p = 1$, la magnitude est paire ; elle est impaire si $p = 0$. Autrement dit, une ramification qui n'a pas de nœud d'ordre pair a un nombre impair de branches. Ce dernier résultat est facile à vérifier directement.

2. Autres expressions pour M et pour N . — En reliant un nombre quelconque de nœuds isolés pour former une ramification, on perd deux extrémités libres pour chaque nœud, hormis le premier et le dernier, qui n'en font perdre qu'une chacun. Donc, e désignant, comme au § II, le nombre des extrémités libres, on a

$$e = m_1 + m_2 + \dots + m_v - 2(v - 1).$$

La comparaison de cette expression avec la valeur de M du numéro précédent donne

$$M = e + v - 1,$$

d'où il résulte aussi

$$2N = e + v - p,$$

et, comme $v = p + i$,

$$2N = e + i,$$

i désignant le nombre des nœuds d'ordre impair.

3. Centres et axes de distance. — Les centres et les axes que possèdent les ramifications ont été signalés pour la première fois par M. Jordan. Voici comment leur existence se rattache aux considérations précédentes.

Parmi les chemins, tels que nous les avons définis, qu'on peut suivre dans une ramification, il y en a un ou plusieurs qui contiennent un nombre maximum de nœuds. Appelons-les *traits principaux*, et, adoptant un sens de parcours sur l'un d'eux, numérotions les nœuds $1, 2, 3, \dots, n$, comme ils se présentent. Quel que soit l'ordre du nœud 1 , toutes ses branches moins une seront des branches libres, car, si l'une d'elles contenait un nœud autre que 1 , en parcourant le trait principal en sens inverse, on en trouverait un nouveau contenant $n + 1$ nœuds, ce qui est contre l'hypothèse. Pour la même raison, les branches issues du nœud 2 ne pourront avoir chacune qu'un autre nœud, et ainsi de suite. En renversant le sens du parcours, on tirera la même conclusion à l'égard des nœuds primitivement notés n et $n - 1$, etc. Appelons *puissance* d'une branche indéfinie estimée à partir d'un nœud le nombre total de ses nœuds, y compris celui d'où elle part. Nous avons prouvé que sur tout trait principal deux nœuds à égale distance des extrêmes (comme rang) ont des branches extérieures dont les puissances maxima sont égales, et égales au rang le plus petit des deux nœuds. Si n est impair, $2p + 1$, il y aura un nœud au milieu, de rang $p + 1$. Si n est pair, $2p$, il y aura deux nœuds au milieu; leurs rangs seront p et $p + 1$, et la puissance maxima de leurs branches, la même pour les deux, sera p . On peut donc dire que, selon les cas, tout trait principal contient un centre ou un axe (aussi appelé *bicentre* par M. Sylvester). Maintenant je dis que ce centre ou cet axe est le même pour tous les traits principaux. En effet, supposons que la ramification comporte un centre et qu'il y en ait deux distincts sur deux traits principaux différents; on aura $n = 2p + 1$, et le rang de chacun des deux centres sera $p + 1$ sur le trait principal auquel il appartient. Or il y a nécessairement une branche

qui joint ces deux centres; mais au moyen de cette branche on obtiendrait un parcours composé d'au moins $2p + 2$ nœuds, ce qui est impossible. Le raisonnement serait le même dans le cas d'un axe. On peut énoncer ainsi cette propriété :

Dans toute ramification, les branches indéfinies qui contiennent le maximum de nœuds ont toutes une branche centrale commune ou un nœud central commun selon que le nombre maximum de nœuds est pair ou impair.

Une ramification donnée peut être complétée de manière que chacune de ses branches obtienne sa puissance maxima. Elle est alors parfaitement symétrique.

Le centre et l'axe dont les considérations qui précèdent ont défini le mode d'existence sont appelés *centre et axe de distance*. Il y a un autre centre et un autre axe, qu'on appelle *centre et axe de magnitude*. Pour leur définition, voir *Educational Times*, question 5208, par M. Sylvester; solution par M. Cayley.

4. L'évaluation de la magnitude se fait facilement au moyen du tableau représentatif. Le nombre des branches qu'on rencontre dans chaque ligne est égal au nombre des intervalles entre les chiffres de cette ligne (y compris les deux ∞), plus la somme des indices, ces derniers n'étant comptés qu'une fois chacun. D'après cela, soit f le nombre des chiffres que contient une ligne, les deux ∞ exclus; le nombre des branches de cette ligne sera

$$1 - f - \text{somme des indices.}$$

d'où l'on conclut, pour la magnitude,

$$M = R - \Sigma f - \Sigma i.$$

Il ne faut pas perdre de vue que, dans cette formule, chaque chiffre du Tableau est compté autant de fois qu'il s'y trouve répété; l'indice seulement une fois. Pour ce qui est de Σf , observons qu'un chiffre n sera répété dans le Tableau chaque fois qu'un des chemins qui composent la somme R passera par le nœud n . Mais le Tableau doit, au moyen de ses chemins, absorber toutes les branches de jonction aboutissant à n . Donc n apparaîtra dans le Tableau

$\left(\frac{c_n + 1}{2}\right)$ fois, c_n étant, comme ci-dessus, la connexité du nœud n .

On a donc simplement

$$\Sigma f = \sum \left(\frac{c + 1}{2}\right).$$

D'autre part, c étant la connexité d'un nœud, Σc sera deux fois le nombre des branches de jonction ; car, dans Σc , chaque branche de jonction est répétée deux fois. Σc est donc aussi deux fois le nombre des intervalles entre les chiffres du Tableau dans chaque ligne ; par suite

$$\Sigma c = 2(\Sigma f - R),$$

ou

$$\Sigma c = 2 \left[\sum \left(\frac{c + 1}{2}\right) - R \right],$$

$$2R = 2 \sum \left(\frac{c + 1}{2}\right) - \Sigma c.$$

Cette formule donne en quelque sorte une définition arithmétique du nombre R au moyen de nombres entiers donnés $c_1, c_2, \dots, c_v$. Observons d'ailleurs qu'avec ces mêmes nombres pris au hasard on ne pourra pas en général former une arborescence ayant v nœuds, et dont les nombres donnés représentent les connexités respectives. Il y a en effet une relation entre v et Σc . Un Tableau irréductible la met immédiatement en évidence, car, en se rappelant que chaque ligne, sauf la première, contient une lettre répétée et une seule, toutes les autres étant des lettres nouvelles, que d'ailleurs chaque lettre représente un nœud, on en conclura immédiatement

$$v = \Sigma f - (R - 1),$$

et la comparaison de cette équation avec la dernière donne

$$2v = \Sigma c + 2, \quad \text{ou} \quad \Sigma c = 2(v - 1).$$

On voit que par la considération du Tableau le champ des recherches s'élargit de lui-même ; mais je ne crois pas devoir entrer pour le moment dans de plus grands développements à cet égard. Je me bornerai à remarquer, en terminant, qu'une ramification fournit des solutions en nombres entiers positifs du système d'é-

quations indéterminées

$$x_1 + x_2 + \dots + x_v = 2(v-1),$$

$$\left(\frac{x_1+1}{2}\right) + \left(\frac{x_2+1}{2}\right) + \dots + \left(\frac{x_v+1}{2}\right) = F,$$

dans lesquelles les x sont les inconnues et les seconds membres des quantités données, car les formules précédentes donneront

$$R = F - v + 1,$$

et le problème se trouve ramené à la formation, suivant les règles données, d'un Tableau irréductible de R lignes horizontales et composé des chiffres 1, 2, 3, ..., v , ce qui ne présente pas de difficulté. On en pourra former plusieurs. Le Tableau une fois écrit ou la ramification tracée, les x se trouveront déterminées simultanément par les connexités des nœuds. La considération du Tableau donnera, pour les conditions de possibilité du problème,

$$v-1 < F < v + \left(\frac{v+1}{2}\right).$$

Sur une formule de M. Hermite ; par M. HUMBERT.

(Séance du 19 novembre 1880.)

M. Hermite a démontré que la fonction

$$\frac{H(x+a)}{\Theta(x)} e^{-\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x} = f(x, a)$$

satisfait à l'équation de Lamé dans le cas de $n = 1$:

$$(1) \quad f''(x, a) = (2k^2 \operatorname{sn}^2 x - 1 - k^2 + k^2 \operatorname{sn}^2 a) f(x, a).$$

Il a donné aussi la formule

$$(2) \quad B \int f(x, a) f(x, b) dx = \frac{\Theta(x+a+b)}{\Theta(x)} e^{-\left[\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{\Theta'(b)}{\Theta(b)}\right]x}.$$

Cette formule suffit pour démontrer un certain nombre de pro-

priétés des fonctions $f(x, a)$; comme application, on se propose ici d'en tirer la relation (1).

On partira pour cela de la décomposition de $\frac{\theta(x+a+b)\theta(x)}{H(x+a)H(x+b)}$ en éléments simples.

On aura une expression de la forme

$$\frac{\theta(x+a+b)\theta(x)}{H(x+a)H(x+b)} = \alpha + \beta \frac{H'}{H}(x+a) + \gamma \frac{H'}{H}(x+b).$$

β et γ sont de signes contraires. En effet, β est le résidu relatif au pôle $x = -a$:

$$\beta = \frac{\theta(b)\theta(a)}{H'(0)H(b-a)},$$

$$\gamma = \frac{\theta(b)\theta(a)}{H'(0)H(a-b)}.$$

On a donc, en désignant par C une constante,

$$C \frac{\theta(x+a+b)\theta(x)}{H(x+a)H(x+b)} = \alpha + \frac{H'}{H}(x+a) - \frac{H'}{H}(x+b).$$

faisant

$$x = ik',$$

$$0 = \alpha + \frac{\theta'}{\theta}(a) - \frac{\theta'}{\theta}(b).$$

Donc

$$C \frac{\theta(x+a+b)\theta(x)}{H(x+a)H(x+b)} = \left[\frac{H'(x+a)}{H(x+a)} - \frac{\theta'(a)}{\theta(a)} \right] - \left[\frac{H'(x+b)}{H(x+b)} - \frac{\theta'(b)}{\theta(b)} \right].$$

L'équation (2) s'écrit alors, A étant une constante,

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & A \int f(x, a) f(x, b) dx \\ & = e^{-\left[\frac{\theta'(a)}{\theta(a)} + \frac{\theta'(b)}{\theta(b)} \right] x} \left\{ \frac{H(x+a)H(x+b)}{\theta^2(x)} \left[\frac{\theta'(b)}{\theta(b)} - \frac{\theta'(a)}{\theta(a)} \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{H'(x+a)H(x+b) - H'(x+b)H(x+a)}{\theta^2(x)} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Or on a

$$f(x, a) = \frac{H(x+a)}{\theta(x)} e^{-\frac{\theta'(a)}{\theta(a)}x},$$

$$f'_x(x, a) = \left[\frac{H'(x+a)}{\theta(x)} - \frac{H(x+a)\theta'(x)}{\theta^2(x)} - \frac{\theta'(a)}{\theta(a)} \frac{H(x+a)}{\theta(x)} \right] e^{-\frac{\theta'(a)}{\theta(a)}x}$$

Si l'on calcule la fonction

$$f'_x(x, a)f(x, b) - f'_x(x, b)f(x, a),$$

on trouve le second membre de (3). Donc

$$(4) \quad A \int f(x, a)f(x, b) dx = f'(x, a)f(x, b) - f'(x, b)f(x, a).$$

On en tire

$$A f(x, a)f(x, b) = f''_x(x, a)f(x, b) - f''_x(x, b)f(x, a),$$

d'où

$$(5) \quad \frac{f''(x, a) - A f'(x, a)}{f(x, a)} = \frac{f''(x, b)}{f(x, b)}.$$

A est une fonction de a et de b ; soit A' sa valeur pour $b = 0$.

On a, en faisant $x = b$ dans l'équation précédente,

$$\frac{f''(x, a) - A' f'(x, a)}{f(x, a)} = \frac{\frac{d^2}{dx^2} \operatorname{sn} x}{\operatorname{sn} x} = 2k^2 \sin^2 x - 1 - k^2.$$

Donc

$$f''(x, a) = f(x, a)(2k^2 \sin^2 x - 1 - k^2 + A').$$

Pour calculer A' , faisons $x = 0$. On trouve aisément

$$-1 - k^2 + A' = \frac{H''(a)}{H(a)} - \frac{\theta''(0)}{\theta(0)} - \frac{2\theta'(a)}{\theta(a)} \frac{H'(a)}{H(a)} + \frac{\theta'^2(a)}{\theta^2(a)},$$

ou, en tenant compte de ce que

$$\frac{d^2}{da^2} \left[\frac{H(a)}{\theta(a)} \right] = \frac{H(a)}{\theta(a)} (2k^2 \sin^2 a - 1 - k^2).$$

il vient

$$-1 - k^2 + A' = \frac{-\theta''(0)}{\theta(0)} - \frac{\theta''(a)}{\theta^2(a)} + \frac{\theta'(a)}{\theta(a)} + 2k^2 \operatorname{sn}^2 a - 1 - k^2.$$

Or, à l'aide de la relation

$$\operatorname{sn}^2(a) = \frac{1}{k^2} \left[\frac{\theta''(0)}{\theta(0)} - D_a \frac{\theta'(a)}{\theta(a)} \right],$$

on déduit

$$A' = + k^2 \operatorname{sn}^2 a.$$

Donc l'équation différentielle prend la forme

$$f''(x, a) = f(x, a)(2k^2 \operatorname{sn}^2 x - 1 - k^2 + k^2 \operatorname{sn}^2 a),$$

que lui a donnée M. Hermite.

Inversement, on peut déduire de l'équation la formule qui vient d'y conduire, en employant un procédé bien connu. On a

$$\begin{aligned} & \int f(x, a) f(x, b) (2k^2 \operatorname{sn}^2 x - 1 - k^2 + k^2 \operatorname{sn}^2 a) dx \\ &= \int f''(x, a) f(x, b) dx \\ &= + f'(x, a) f(x, b) - f(x, a) f'(x, b) + \int f''(x, b) f(x, a) dx. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} & \int f(x, a) f''(x, b) dx \\ &= \int f(x, a) f(x, b) (2k^2 \operatorname{sn}^2 x - 1 - k^2 + k^2 \operatorname{sn}^2 b) dx; \end{aligned}$$

par suite,

$$\int f(x, a) f(x, b) (k^2 \operatorname{sn}^2 a - k^2 \operatorname{sn}^2 b) dx = f'(x, a) f(x, b) - f(x, a) f'(x, b),$$

ce qui est bien la formule (2) mise sous la forme (4).

Remarque sur le frottement d'une corde sur un cylindre lorsque tous deux tournent avec une grande vitesse; par M. H. LÉAUTÉ.

(Séance du 3 décembre 1880.)

Lorsqu'une corde enroulée sur un cylindre fixe est sur le point de glisser, la relation qui lie la puissance P à la résistance Q est

$$\frac{P}{Q} = e^{f\Lambda},$$

Λ étant l'angle des deux tangentes extrêmes à l'arc embrassé, f le coefficient de frottement au départ, e la base des logarithmes népériens.

Cette formule, qui est rigoureusement exacte quelle que soit la forme du cylindre, suppose seulement que la corde est enroulée suivant une section droite; elle s'établit en écrivant l'équilibre de toutes les forces appliquées à un élément de corde, c'est-à-dire des deux tensions aux extrémités, de la résistance normale du cylindre et du frottement.

La condition d'adhérence à laquelle conduit cette formule

$$\frac{P}{Q} < e^{f\Lambda}$$

n'est évidemment pas applicable en toute rigueur au cas où la corde est enroulée sur une poulie qu'elle entraîne, puisque dans ce cas, la corde ayant une certaine vitesse, les forces d'inertie auraient dû intervenir dans les équations d'équilibre. Cependant on l'admet d'une façon générale dans les règles d'établissement des transmissions par courroies, par cordes ou par câbles métalliques.

Cette approximation, qui est suffisante, en pratique, lorsque la transmission ne marche pas très vite, devient inadmissible dans le cas, très fréquent aujourd'hui, des transmissions à grande vitesse. On arrive en effet souvent à faire parcourir au lien 25^m et même 32^m par seconde; les forces d'inertie sont alors loin d'être négligeables, et le rapport des tensions peut être inférieur à $e^{f\Lambda}$ sans que l'adhérence soit assurée.

La remarque qui précède explique certains mécomptes qui se produisent lorsqu'on installe des courroies ou des câbles à grande vitesse; elle montre que, dans ces circonstances, il est indispensable de tenir compte de la force centrifuge pour l'évaluation de la limite supérieure du rapport des tensions. C'est là le but que nous nous proposons dans cette Note.

Soit un élément AB d'une corde enroulée suivant la section droite d'un cylindre circulaire qui tourne autour de son axe avec une vitesse angulaire correspondant pour la corde à une vitesse linéaire V. Le glissement est sur le point de se produire de B vers A; T est la tension en B, $T + dT$ la tension en A.

La force centrifuge, qui est ici la seule force d'inertie à considérer, puisqu'il y a équilibre relatif et que le cylindre est animé d'une rotation uniforme, donne sur l'élément AB une résultante $\frac{P}{g} V^2 d\alpha$, P étant le poids de la corde par mètre courant, g l'accélération de la pesanteur et $d\alpha$ l'angle de contingence.

Les deux équations d'équilibre entre les tensions T et $T + dT$, la résistance normale N du cylindre, le frottement fN et la force centrifuge, obtenues en projetant toutes ces forces sur la direction de N et sur celle de fN , sont alors, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$N = \left(T - \frac{P}{g} V^2 \right) d\alpha,$$

$$dT = fN.$$

On déduit de là, en éliminant N entre ces deux équations et intégrant,

$$\frac{T_1 - \frac{P}{g} V^2}{T_2 - \frac{P}{g} V^2} = e^{f\alpha}.$$

La condition d'adhérence est donc

$$\frac{T_1 - \frac{P}{g} V^2}{T_2 - \frac{P}{g} V^2} < e^{f\alpha},$$

qui peut s'écrire

$$\frac{T_1}{T_2} < e^{f\lambda} - \frac{p}{g} (e^{f\lambda} - 1) \frac{V^2}{T_2}.$$

Cette relation doit remplacer celle que l'on admettait jusqu'ici :

$$\frac{T_1}{T_2} < e^{f\lambda}.$$

La condition que nous venons d'établir prouve que le rapport des tensions peut être plus petit que $e^{f\lambda}$ sans que l'adhérence soit assurée et montre qu'il est d'autant plus nécessaire de tenir compte de la vitesse, dans la fixation de ce rapport, que cette vitesse est plus grande et que les tensions sont plus petites.

Remarquons enfin que, le rapport $\frac{T_1}{T_2}$ devant être plus grand que l'unité, il y a pour chaque tension une limite supérieure de vitesse que l'on ne pourra dépasser :

$$V < \sqrt{\frac{gT_2}{p}}.$$

Tout ce que nous venons de dire est applicable à toutes les transmissions par lien flexible; mais, dans le cas particulier des câbles télodynamiques, la condition d'adhérence est susceptible d'une interprétation importante à indiquer.

Soit, en effet, un câble de portée $2l$. Le mouvement uniforme étant réalisé, il y a équilibre, pour chaque brin, entre la tension, le poids $2pl$ et la force centrifuge $2 \frac{p}{g} l \frac{V^2}{\rho}$ (ρ étant le rayon de courbure moyen de l'arc d'un très petit nombre de degrés que forme le brin).

On déduit de là, en projetant toutes les forces sur la verticale,

$$2pl + 2 \frac{p}{g} l \frac{V^2}{\rho} = 2T_1 \cos \varphi.$$

φ étant l'angle de T_1 et de la verticale.

Mais on a

$$\cos \varphi = \frac{2f_1}{l}, \quad \rho = \frac{l^2}{f_1},$$

en désignant par f_1 la flèche du brin considéré.

L'équation précédente devient dès lors

$$T_1 \dots \frac{p}{g} V^2 = \frac{p l^2}{f_1};$$

on a, de même,

$$T_2 \dots \frac{p}{g} V^2 = \frac{p l^2}{f_2},$$

et, par suite, la condition d'adhérence peut s'écrire

$$\frac{f_2}{f_1} < e^{\mu}.$$

Dans le cas des câbles, c'est donc le rapport des flèches, et non le rapport des tensions, comme on l'admet d'ordinaire, qui doit être inférieur à e^{μ} pour que le glissement ne puisse se produire.

Sur certaines directions de transversales des courbes algébriques, qui correspondent aux directions des axes des coniques; par M. C. STEPHANOS.

(Séance du 7 janvier 1881.)

1. Considérons une courbe algébrique plane du $m^{\text{ième}}$ degré, ayant pour équation en coordonnées rectangulaires

$$f(x, y) = 0.$$

Le produit des segments interceptés sur une transversale faisant avec l'axe des x un angle ω , entre un point M de la transversale dont les coordonnées sont x et y et les m points où elle rencontre la courbe, est donné par l'expression

$$\frac{f(x, y)}{F(\cos \omega, \sin \omega)},$$

$F(x, y)$ étant le polynôme homogène de degré m en x, y dans $f(x, y)$.

De cette formule résulte, comme on sait, le théorème de Newton

sur la proportionnalité des produits de segments qui correspondent à des transversales passant par deux points du plan et ayant les mêmes directions, d'où l'on tire cette autre conséquence que les directions des transversales passant par un point M et auxquelles correspond un produit de segments minimum ou maximum sont les mêmes quel que soit le point M.

Steiner s'est occupé de ces directions remarquables et en a donné une série de propriétés bien intéressantes, relatives surtout au cas d'une conique [*Vermischte Sätze und Aufgaben (Journal de Crelle*, vol. LV, p. 356)]. Dans la présente Note, dont nous possédons les résultats depuis longtemps, nous allons ajouter quelques propositions sur le même sujet.

2. Les directions de transversales auxquelles correspond un produit de segments minimum ou maximum sont données par l'équation

$$\varphi = \cos \omega \frac{\partial F}{\partial \sin \omega} - \sin \omega \frac{\partial F}{\partial \cos \omega} = 0;$$

elles sont donc au nombre de m et ne dépendent que des directions des asymptotes de la courbe $f = 0$, données par l'équation

$$F(\cos \omega, \sin \omega) = 0$$

et des points cycliques à l'infini (voir n° 8). Cependant, dans le cas où m est pair ($= 2n + 2$) et où

$$F(\cos \omega, \sin \omega) = c(\cos^2 \omega + \sin^2 \omega)^{n+1},$$

l'expression

$$\cos \omega \frac{\partial F}{\partial \sin \omega} - \sin \omega \frac{\partial F}{\partial \cos \omega}$$

est identiquement nulle, puisqu'alors les produits de segments correspondant aux diverses transversales passant par un point M sont tous égaux.

Les directions dont il s'agit coïncident, dans le cas d'une conique, avec les directions de ses axes, et elles ont pour une courbe quelconque, comme pour les coniques, la propriété d'être perpendiculaires au diamètre du premier degré (droite polaire)

$$(\cos \omega f'_x + \sin \omega f'_y)^{(m-1)} = 0,$$

qui leur correspond.

Pour ces raisons et pour abréger, nous désignerons ces directions, dans les énoncés suivants, sous le nom de *directions axiales de la courbe* $f = 0$.

Il n'y a que les courbes de degré pair $2n + 2$ pour lesquelles $F(\cos \omega, \sin \omega) = c(\cos^2 \omega + \sin^2 \omega)^{n+1}$, c'est-à-dire ayant pour points $(n + 1)$ ^{iples} les points cycliques à l'infini, qui aient une infinité de directions axiales.

3. Étant donnés sur un cercle $2m$ points $P_1, P_2, \dots$, les droites passant par un point arbitraire P de ce cercle et ayant pour directions les directions axiales du système des droites $PP_1, PP_2, \dots$ déterminent sur le cercle un groupe de $2m$ points $Q_1, Q_2, \dots$, qui ne dépend pas de la position du point P sur le cercle.

Maintenant, si l'on considère dans le plan d'une courbe $f = 0$, d'ordre m , une série de cercles ayant le même centre K , et que sur chacun de ces cercles on détermine le groupe des $2m$ points $Q_1, Q_2, \dots$ dérivé du groupe des $2m$ points $P_1, P_2, \dots$ communs à ce cercle et à la courbe $f = 0$ d'après le procédé indiqué par la proposition précédente, le lieu des points Q sera la courbe (Q) du $m^{\text{ième}}$ degré passant par le point K et par les pieds des normales abaissées du point K sur la courbe $f = 0$.

Toutes les courbes (Q) correspondant ainsi aux divers points K du plan de $f = 0$ ont des asymptotes dont les directions coïncident avec les directions axiales de la courbe $f = 0$.

4. Dans le cas d'une conique, il existe entre les deux directions axiales une relation métrique, puisqu'elles sont perpendiculaires entre elles. Il y a donc lieu d'examiner, pour le cas des courbes d'ordre supérieur, s'il existe toujours entre les directions axiales une relation.

Cette question revient à la question analytique suivante :

Quelle condition doit remplir une fonction $\varphi(\cos \omega, \sin \omega)$ entière, homogène et de degré m en $\cos \omega, \sin \omega$, pour qu'elle coïncide avec la dérivée d'une autre fonction $F(\cos \omega, \sin \omega)$ entière, homogène et de degré m en $\cos \omega, \sin \omega$?

La question ainsi posée n'offre pas de difficulté; cependant, comme la réponse en est bien curieuse, nous allons l'examiner avec quelque détail. Le résultat qu'on tirera de là pour notre problème géométrique sera que :

Le système des m directions axiales d'une courbe $f=0$ n'est assujéti à remplir une relation métrique que dans le cas où m est pair.

5. Soit symboliquement

$$\varphi(\cos \omega, \sin \omega) = (a_1 \cos \omega + a_2 \sin \omega)^m.$$

En posant

$$u = \cos \omega + i \sin \omega, \quad v = \cos \omega - i \sin \omega$$

ou

$$\cos \omega = \frac{u+v}{2}, \quad \sin \omega = \frac{u-v}{2i},$$

on a

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2^m} [a_1(u+v) - ia_2(u-v)]^m \\ &= \frac{1}{2^m} [(a_1 - ia_2)u + (a_1 + ia_2)v]^m. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$2^m \varphi = \sum \binom{m}{k} A_k u^k v^{m-k} = \sum \binom{m}{k} A_k (\cos \omega - i \sin \omega)^{m-2k},$$

étant posé

$$A_k = (a_1 - ia_2)^k (a_1 + ia_2)^{m-2k}.$$

Ainsi, dans le cas de m impair ($= 2n+1$) on a

$$\begin{aligned} 2^m \varphi &= \sum_{k=0}^{k=n} \binom{m}{k} A_k (\cos \omega - i \sin \omega)^{m-2k} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{k=n} \binom{m}{k} A_{m-k} (\cos \omega + i \sin \omega)^{m-2k}, \end{aligned}$$

tandis que dans le cas de m pair ($= 2n + 2$) on a

$$\begin{aligned} 2^m \varphi &= \sum_{k=0}^{k=n} \binom{m}{k} A_k (\cos \omega - i \sin \omega)^{m-2k} \\ &+ \sum_{k=0}^{k=n} \binom{m}{k} A_{m-k} (\cos \omega + i \sin \omega)^{m-2k} + \left(\frac{m}{n+1} \right) A_{n+1}. \end{aligned}$$

6. De cette manière, dans le cas où m est impair, on aura

$$\begin{aligned} 2^m \int \varphi d\omega &= i \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\binom{m}{k}}{m-2k} A_k (\cos \omega - i \sin \omega)^{m-2k} \\ &+ i \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\binom{m}{k}}{m-2k} A_{m-k} (\cos \omega + i \sin \omega)^{m-2k} + \text{const.} \end{aligned}$$

Le second membre de cette égalité, si l'on y rétablit l'homogénéité par rapport à $\cos \omega$, $\sin \omega$ en multipliant les divers termes par des puissances convenables de $\sin^2 \omega + \cos^2 \omega$, ne pourra représenter une fonction entière de $\cos \omega$, $\sin \omega$ que si l'on suppose la constante égale à zéro.

Ainsi :

Toute fonction

$$\varphi = (a_1 \cos \omega + a_2 \sin \omega)^m,$$

où $m = 2 + 1$, est la dérivée d'une seule fonction F entière, homogène et de degré m en $\cos \omega$, $\sin \omega$, donnée par la formule

$$\begin{aligned} 2^m F &= i \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\binom{m}{k}}{m-2k} (a_1 - ia_2)^k (a_1 + ia_2)^{m-k} (\cos \omega - i \sin \omega)^{m-2k} (\sin^2 \omega + \cos^2 \omega)^k \\ &+ i \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\binom{m}{k}}{m-2k} (a_1 - ia_2)^{m-k} (a_1 + ia_2)^k (\cos \omega + i \sin \omega)^{m-2k} (\sin^2 \omega + \cos^2 \omega)^k. \end{aligned}$$

7. Considérons maintenant le cas où m est pair. On a alors

$$\begin{aligned} z^m \int \varphi d\omega &= i \sum_{k=n}^{\frac{m}{2}} \frac{\binom{m}{k}}{m-2k} A_k (\cos \omega - i \sin \omega)^{m-2k} \\ &\quad + i \sum_{k=n}^{\frac{m}{2}} \frac{\binom{m}{k}}{m-2k} A_{m-k} (\cos \omega + i \sin \omega)^{m-2k} \\ &\quad + \binom{m}{n+1} A_{n+1} \omega + C. \end{aligned}$$

On voit que le second membre de cette égalité ne peut être une fonction algébrique de $\cos \omega$, $\sin \omega$ que si la condition

$$A_{n+1} = (a_1^2 + a_2^2)^{n+1} = 0$$

est remplie, et que, cela étant supposé, toutes les fonctions correspondant aux diverses valeurs de C qu'on obtient en rétablissant dans le second membre l'homogénéité par rapport aux $\cos \omega$, $\sin \omega$ seront entières.

Il résulte de là que :

Pour qu'une fonction

$$\varphi = (a_1 \cos \omega + a_2 \sin \omega)^m = \sum \binom{m}{k} a_k \cos^k \omega \sin^{m-k} \omega,$$

où $m = 2n - 2$, soit la dérivée d'une fonction F entière, homogène et de degré m en $\cos \omega$, $\sin \omega$, il faut que l'on ait

$$(a_1^2 + a_2^2)^{n-1} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sum \binom{n-1}{k} a_{2k} = 0;$$

et qu'alors la fonction φ a la même propriété par rapport à une

infinité de fonctions F comprises dans l'expression

$$\begin{aligned} {}^mF = & i \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\binom{m}{k}}{m-2k} (a_1 - ia_2)^k (a_1 + ia_2)^{m-k} (\cos \omega - i \sin \omega)^{m-2k} (\sin^2 \omega + \cos^2 \omega)^k \\ & + i \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\binom{m}{k}}{m-2k} (a_1 - ia_2)^{m-k} (a_1 + ia_2)^k (\cos \omega + i \sin \omega)^{m-2k} (\sin^2 \omega + \cos^2 \omega)^k \\ & + \lambda (\sin^2 \omega + \cos^2 \omega)^{n+1} \end{aligned}$$

et correspondant aux diverses valeurs de λ .

Ainsi se trouve résolue la question que nous nous sommes proposé de traiter (n° 4).

8. Si, dans les fonctions

$$\begin{aligned} \cos^2 \omega + \sin^2 \omega, \quad F &= (a_1 \cos \omega + a_2 \sin \omega)^m, \\ \cos \omega \frac{\partial F}{\partial \sin \omega} - \sin \omega \frac{\partial F}{\partial \cos \omega}, \end{aligned}$$

on remplace les $\cos \omega$, $\sin \omega$ par des variables x_1 , x_2 , on obtient trois formes binaires

$$x_1^2 + x_2^2, \quad G = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^m, \quad x_1 \frac{\partial G}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial G}{\partial x_1},$$

dont la troisième coïncide avec le jacobien des deux premières. En transformant ces formes par une substitution linéaire arbitraire, mais de déterminant non nul, on peut remplacer $x_1^2 + x_2^2$ par une forme quadratique quelconque à discriminant D différent de zéro. Les résultats obtenus précédemment (n° 6, 7) donnent alors les propositions suivantes :

Toute forme binaire $\varphi(x_1, x_2)$ de degré m impair ne peut être considérée comme jacobien d'une forme quadratique donnée (à $D \neq 0$) et d'une autre forme du degré m que d'une seule manière.

Pour qu'une forme binaire $\varphi = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^{2m}$ soit le ja-

cobien d'une forme quadratique binaire

$$\alpha = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2 = (x_1 y'_2 - x_2 y'_1)(x_1 y''_2 - x_2 y''_1)$$

(telle que $D \leq 0$) et d'une autre forme G_0 de degré $2m$, il faut que l'on ait

$$(a_0 a_2^2 - 2a_1 a_1 a_2 + a_2 a_1^2)^m = (a_1 y'_1 + a_2 y'_2)^m (a_1 y''_1 + a_2 y''_2)^m \neq 0,$$

c'est-à-dire il faut que les points y' et y'' de la forme α soient harmoniques de degré m l'un de l'autre par rapport à la forme φ ; mais alors la forme φ a la même propriété par rapport à une infinité de formes G , comprises dans l'expression

$$G_0 + \lambda \alpha^m.$$

Il est à remarquer que la forme φ s'annule pour les points doubles, autres que y', y'' , des formes du faisceau

$$G_0 + \lambda \alpha^m.$$

Sur la fonction $(x-1)^a$; par M. HUMBERT.

(Séance du 4 février 1881.)

Dans le *Bulletin de la Société mathématique*, M. Laguerre a démontré que les polynômes P, Q, R , de degrés p, q, r , qui rendent la fonction $P e^{ax} + Q e^{bx} + R$ du degré le plus élevé possible en x , sont tels que les trois fonctions $P e^{ax}, Q e^{bx}, R$ sont solutions d'une équation différentielle du troisième ordre, de la forme

$$x y''' + (\alpha x + \beta) y'' + (\gamma x + \delta) y' + \varepsilon y = 0.$$

On peut donner un théorème analogue en remplaçant e^{ax}, e^{bx} par $(x-1)^a, (x-1)^b$; la méthode qu'on va employer est différente de celle de M. Laguerre.

Cherchons donc à déterminer les polynômes P, Q, R , de degrés p, q, r , de façon que $P(x-1)^a + Q(x-1)^b + R$ soit du degré le plus élevé possible en x , c'est-à-dire du degré $p+q+r+2$. On

a donc

$$P(x-1)^a + Q(x-1)^b + R = (x^{p+q+r+1}).$$

Lemme. — On ne peut avoir

$$P(x-1)^a + Q(x-1)^b + R = (x^{p+q+r+1}),$$

P, Q, R étant de degrés p, q, r , sans que $P=0, Q=0, R=0$.

Prenons en effet les dérivées d'ordre $r+1$ des deux membres de l'équation précédente; il vient

$$(x-1)^{a'} P_1(x) + (x-1)^{b'} Q_1(x) = (x^{p+q+1}),$$

P_1 et Q_1 étant de degrés p et q , ou

$$(x-1)^{a'-b'} P_1 + Q_1 = (x^{p+q+1}).$$

Prenons les dérivées d'ordre $q+1$:

$$(x-1)^{a''-b''} P_2 = (x^{p+1}).$$

P_2 étant au plus de degré p , cette égalité est impossible, à moins que $P_2=0$. Le second membre est nul aussi; on en conclut aisément que l'on a

$$(x-1)^{a''-b''} P_1 + Q_1 = 0,$$

et aussi

$$P(x-1)^a + Q(x-1)^b + R = 0.$$

La première de ces équations exige que $a'' - b''$ ou $a - b$ soit entier, ou que $P_1=0, Q_1=0$.

Excluons le cas de $a - b$ entier; on voit que

$$P(x-1)^a + Q(x-1)^b + R$$

doit être nul, en même temps que $P(x-1)^a = R_1, Q(x-1)^b = R_2$, R_1 et R_2 étant des polynômes de degré r . Cela exige que a et b soient entiers.

En excluant les cas de $a, b, a - b$ entiers, le lemme est donc démontré.

Cela posé, je reprends l'équation

$$(1) \quad P(x-1)^a + Q(x-1)^b + R = (x^{p+q+r+1}).$$

Prenons les dérivées successives

$$(2) \quad (x-1)^{a-1}P'(x-1) + aP] + \dots + R' = (x^{p+q+r+1}).$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x-1)^{a-2}[P''(x-1)^2 + 2aP'(x-1) \\ + a(a-1)P] + \dots + R'' = (x^{p+q+r}), \end{array} \right.$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x-1)^{a-3}[P'''(x-1)^3 \\ + 3aP''(x-1)^2 + 3a(a-1)P'(x-1) \\ + a(a-1)(a-2)P] + \dots + R''' = (x^{p+q+r-1}). \end{array} \right.$$

Multiplions (4) par $x(x-1)^2$, (3) par $(x-1)(\alpha x + \beta)$, (2) par $(\gamma x + \delta)$, (1) par ε ; $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sont des constantes; ajoutons membre à membre, il vient

$$\begin{aligned} & (x-1)^{a-1}[xP'''(x-1)^3 + \dots] \\ & + (x-1)^{b-1}[xQ''(x-1)^2 + \dots] + x(x-1)^2R''' \\ & + (x-1)R''(\alpha x + \beta) + (\gamma x + \delta)R' + \varepsilon R = (x^{p+q+r}). \end{aligned}$$

On peut disposer de $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ de manière que $x(x-1)^2R''' + \dots$ soit au plus de degré $r-5$.

On a aussi

$$(x-1)^{a-1}\psi(x) + (x-1)^{b-1}\chi(x) + \varphi(x) = (x^{p+q+r});$$

ψ est au plus de degré $p+1$, χ est au plus de degré $q+1$, φ est au plus de degré $r-3$.

La somme de ces degrés est donc au plus $p+q+r-3$.

On ne peut donc avoir, d'après le lemme,

$$(x-1)^{a-1}\psi(x) + (x-1)^{b-1}\chi(x) + \varphi(x) = (x^{p+q+r})$$

que si $\psi = 0$, $\chi = 0$, $\varphi = 0$. Donc l'équation

$$x(x-1)^2\gamma''' + (x-1)(\alpha x + \beta)\gamma'' + (\gamma x + \delta)\gamma' + \varepsilon\gamma = 0$$

a pour solutions

$$R(x), \quad (x-1)^aP(x), \quad (x-1)^bQ(x).$$

La généralisation est évidente.

Sur la représentation analytique des substitutions;

par M. DE POLIGNAC.

(Séance du 18 février 1881.)

Pour qu'une fonction entière $\psi(x)$ soit apte à représenter une substitution $[x, \psi(x)]$ entre p lettres, elle doit satisfaire à certaines conditions. Quand p est un nombre premier, M. Hermite a donné le critérium de ce caractère. Il consiste en ce que le coefficient de x^{p-1} soit divisible par p dans les $p - 2$ premières puissances de la fonction, lorsque les exposants y ont été abaissés au-dessous de p au moyen de la congruence $x^p \equiv x \pmod{p}$.

Inversement, une substitution entre k lettres, étant donnée la formule d'interpolation de Lagrange, peut servir à la représenter analytiquement, ainsi que le fait remarquer M. Jordan dans le *Traité des substitutions* (Chap. II). Le but de cette Note est de donner une forme générale pour toutes les fonctions entières jouissant de la propriété en question.

J'observe d'abord qu'au moyen du théorème de Fermat on pourra, p étant premier, abaisser dans toute fonction entière les exposants de x au-dessous de $p - 1$.

Soit donc

$$\psi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{p-1} x^{p-1}.$$

Pour que cette fonction puisse représenter une substitution, il faut et il suffit que les nombres $\psi(0), \psi(1), \dots, \psi(p-1)$ donnent à l'ordre près les résidus $0, 1, 2, \dots, p-1$ suivant le module p .

Posons

$$\psi(x) = a_0 + \varphi(x);$$

on aura

$$\varphi(0) = 0.$$

a_0 doit être supposé premier avec p ; il en résulte, pour les conditions du problème,

$$\varphi(1) \equiv r_1, \varphi(2) \equiv r_2, \dots, \varphi(p-1) \equiv r_{p-1},$$

les quantités r ne différant que par l'ordre des nombres

$$1, 2, 3, \dots, p-1.$$

Nous arrivons donc, en apparence, à un système de $p - 1$ congruences entre $p - 2$ inconnues $a_1, a_2, \dots, a_{p-2}$; mais ce système se réduit à $p - 2$ congruences distinctes, attendu que la somme de toutes les congruences est nulle suivant le module p . Cela résulte, pour les premiers membres, de ce que la somme des puissances semblables des $p - 1$ premiers nombres entiers est divisible par p , jusqu'à la puissance $p - 2$ inclusivement, et, pour les seconds membres, de la convention même relative aux quantités r .

Les conditions générales du problème sont donc exprimées par le système suivant de $p - 2$ congruences :

$$\left. \begin{array}{lll} a_1 + & a_2 + \dots + & a_{p-2} \equiv r_1 \\ 2a_1 + & 2^2 a_2 + \dots + & 2^{p-2} a_{p-2} \equiv r_2 \\ 3a_1 + & 3^2 a_2 + \dots + & 3^{p-2} a_{p-2} \equiv r_3 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ (p-2)a_1 + (p-2)^2 a_2 + \dots + (p-2)^{p-2} a_{p-2} \equiv r_{p-2} \end{array} \right\} \pmod{p}.$$

Le déterminant de ce système a une valeur connue, différente de zéro; les coefficients $a_1, a_2, \dots, a_{p-2}$ seront donc exprimables en fonction des quantités $r_1, r_2, \dots, r_{p-2}$.

Soient ces valeurs

$$a_1 \equiv \rho_1, \quad a_2 \equiv \rho_2, \quad \dots, \quad a_{p-2} \equiv \rho_{p-2};$$

on aura

$$\psi(x) = a_0 + \rho_1 x + \rho_2 x^2 + \dots + \rho_{p-2} x^{p-2}.$$

Dans cette forme symbolique, a_0 est un nombre quelconque non divisible par p . Les symboles ρ sont des fonctions entières linéaires des quantités $r_1, r_2, \dots, r_{p-2}$, dont les coefficients sont numériques et dépendent du nombre premier p . Les quantités r elles-mêmes sont des indéterminées assujetties à la condition d'être toutes *distinctes et différentes de zéro suivant le module p* .

Exemple. — Pour $p = 5$, on a

$$\psi(x) = a + (3r_1 + r_2 + 2r_3)x + 2(r_2 + r_3)x^2 + (3r_1 + 2r_2 + r_3)x^3,$$

forme analytique générale d'une substitution de cinq lettres.

En y faisant $a = 0, r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3$, on doit retomber sur la substitution identique $[x, x]$: c'est ce qu'il est facile de vérifier.

On peut obtenir les symboles ρ sous forme explicite. Soient Δ le déterminant du système caractéristique de congruences, $M_{n,1}$, $M_{n,2}$, ... les déterminants mineurs des éléments successifs de la $n^{\text{ième}}$ colonne. On a

$$\Delta a_n = M_{n,1} r_1 + M_{n,2} r_2 + \dots + M_{n,h} r_h + \dots + M_{n,p-2} r_{p-2}.$$

Adoptons les signes conventionnels suivants

$$1.2.3\dots k = \Pi(k),$$

$$\Pi(k) \Pi(k+1) \Pi(k+2) \dots \Pi(N) = \overline{\Pi}(k, N),$$

$\sum_1^N (h, m) =$ somme des produits m à m des nombres entiers depuis 1 jusqu'à N , défalcation faite de h , autrement dit des nombres 1, 2, ..., $h-1$, $h+1$, ..., N ,

et rappelons que l'on a

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} & a_1^{n+1} & a_1^{n+2} & \dots & a_1^m \\ a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} & a_2^{n+1} & a_2^{n+2} & \dots & a_2^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m-2} & a_{m-2}^2 & \dots & a_{m-2}^{n-1} & a_{m-2}^{n+1} & a_{m-2}^{n+2} & \dots & a_{m-2}^m \\ a_{m-1} & a_{m-1}^2 & \dots & a_{m-1}^{n-1} & a_{m-1}^{n+1} & a_{m-1}^{n+2} & \dots & a_{m-1}^m \end{vmatrix} = a_1 a_2 \dots a_{m-1} \times (a_{m-1} - a_{m-2}) \times (a_{m-2} - a_{m-3}) \dots \times (a_2 - a_1) S^{(m-n)},$$

expression dans laquelle le dernier facteur désigne la somme des produits $m-n$ à $m-n$ des quantités $a_1, a_2, \dots$. Les déterminants mineurs M seront du type de celui-ci, présentant une lacune dans la suite naturelle des exposants, et l'on trouvera, tout calcul fait,

$$\Delta = \overline{\Pi}(1, p-2),$$

$$M_{n,h} = (-1)^{n+h} \frac{\overline{\Pi}(1, h-3)}{\Pi(h) \Pi(p-2-h)} \sum_1^{p-2} (h, p-2-n).$$

Si l'on observe qu'en vertu du théorème de Wilson on a

$$\Pi(p-2) \equiv 1 \pmod{p},$$

il en résultera

$$\Delta \equiv \overline{\Pi}(1, p-3);$$

par suite, posant

$$\Lambda_{n,h} = \frac{M_{n,h}}{\Delta},$$

il viendra

$$\Lambda_{n,h} \equiv (-1)^{n+h} \frac{\sum_{i=0}^{p-2} (h, p-2-i)}{\Pi(h) \Pi(p-2-h)}$$

et

$$\alpha_n \equiv \sum_{h=1}^{h=p-2} (-1)^{n+h} \frac{\sum_{i=0}^{p-2} (h, p-2-i)}{\Pi(h) \Pi(p-2-h)} r_h,$$

formule susceptible d'une notable simplification, ainsi qu'on le verra plus loin.

Quand une substitution est donnée, les valeurs particulières de $a_0, r_1, r_2, \dots$ s'en déduisent immédiatement, par suite la fonction $\psi(x)$ qui la représente. Inversement, si la fonction $\psi(x)$ est donnée, le système de congruences ci-dessus déterminera les quantités $r_1, r_2, \dots, r_{p-2}$ en fonction des coefficients, et la validité du caractère consiste en ce que les valeurs trouvées soient toutes différentes entre elles et différentes de zéro.

L'hypothèse

$$a_0 = 0, \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 2, \quad \dots, \quad r_{n-1} = n-1$$

correspond à une substitution ne déplaçant pas les n premières lettres. On peut donc appliquer l'analyse précédente aux substitutions composées d'un nombre quelconque de lettres non premier. Il suffira de prendre p égal au nombre premier immédiatement supérieur au nombre considéré.

Dans ce mode de représentation, la somme de deux substitutions ne donne pas, en général, une substitution, mais toute substitution peut s'exprimer linéairement en fonction de $p-2$ substitutions convenablement choisies.

En effet, soit une substitution donnée

$$\Psi(x) = A + \Phi(x).$$

Formons avec $p - 2$ autres substitutions la fonction

$$f(x) = x_0 + x_1 \psi_1(x) + x_2 \psi_2(x) + \dots + x_{p-2} \psi_{p-2}(x),$$

qui peut s'écrire

$$f(x) = a + x_1 \varphi_1(x) + x_2 \varphi_2(x) + \dots + x_{p-2} \varphi_{p-2}(x).$$

L'identification de $f(x)$ avec $\Psi(x)$ donnera d'abord

$$\begin{aligned} \Phi(n) &\equiv x_1 \varphi_1(n) + x_2 \varphi_2(n) + \dots + x_{p-2} \varphi_{p-2}(n) \pmod{p}, \\ n &= 1, 2, \dots, p-2, \end{aligned}$$

système de $p - 2$ congruences qui fera connaître $x_1, x_2, \dots, x_{p-2}$, à la seule condition que le déterminant formé avec les quantités φ ne soit pas congru à p . Ensuite

$$a \equiv A,$$

congruence qui déterminera x_0 .

Si l'on se donne les quantités φ , les quantités Φ restant, au contraire, indéterminées, on aura l'expression générale d'une substitution en fonction linéaire de $p - 2$ autres.

Reprenons la formule

$$A_{n,h} = (-1)^{n+h} \frac{\sum_{i=1}^{p-2} (h, p-2-n)}{\Pi(h) \Pi(p-2-h)}.$$

Il est facile de voir qu'en vertu du théorème de Wilson on a généralement

$$\Pi(h+1) \Pi(p-2-h) \equiv (-1)^h \pmod{p};$$

il en résulte

$$A_{n,h} = (-1)^n (h+1) \sum_{i=1}^{p-2} (h, p-2-n).$$

On peut encore simplifier cette formule.

En vertu de l'identité

$$x^{p-1} - 1 = (x-1)(x-2)\dots(x-\overline{p-1}) + pF(x)$$

qui résulte du théorème de Fermat, on a

$$\sum_1^{p-1} (m) \equiv 0 \pmod{p},$$

excepté pour $m = p - 1$. Ici le symbole $\mathbf{S}$ désigne la somme des produits m à m des nombres entiers $1, 2, \dots, p - 1$.

D'ailleurs, on a évidemment

$$\sum_1^{p-1} (m) = \sum_1^{p-2} (m) + (p-1) \sum_1^{p-2} (m-1),$$

d'où il résulte

$$\sum_1^{p-2} (m) \equiv \sum_1^{p-2} (m-1) \pmod{p},$$

et de cette congruence on déduit, en faisant décroître m ,

$$\sum_1^{p-2} (m) \equiv 1 \pmod{p}.$$

D'autre part, la définition de nos symboles $\mathbf{S}$ donne lieu à l'identité

$$\sum_1^{p-2} (m) = \sum_1^{p-2} (h, m) + h \sum_1^{p-2} (h, m-1);$$

on a donc finalement

$$\sum_1^{p-2} (h, m) + h \sum_1^{p-2} (h, m-1) \equiv 1.$$

Désignons, pour abréger, cette congruence par

$$U_0 \equiv 1 \pmod{p},$$

et changeons-y m successivement en $m-1, m-2, \dots, 1, h$ restant constant. Nous aurons de nouvelles congruences

$$U_1 \equiv 1, \quad U_2 \equiv 1, \quad \dots, \quad U_{m-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Multipliant généralement U_i par $(-1)^i h^i$ et ajoutant, il viendra

$$\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i h^i U_i = \sum_1^{p-2} (h, m) + (-1)^{m-1} h^m \equiv \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i h^i$$

ou

$$\sum_1^{p-2} (h, m) \equiv \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i h^i.$$

Le second membre est la différence des deux progressions géométriques $1 + h^2 + h^4 + \dots$ et $h + h^3 + h^5 + \dots$, qui est égale à $\frac{1 + (-1)^m h^{m+1}}{1 + h}$. On a donc

$$\sum_1^{p-2} (h, m) \equiv \frac{1 + (-1)^m h^{m+1}}{1 + h} \pmod{p},$$

et la valeur trouvée en dernier lieu pour $A_{n,h}$ devient, en posant $m = p - 2 - n$ et toutes réductions faites,

$$A_{n,h} \equiv (-1)^n - h^{p-1-n} \pmod{p},$$

formule qui peut aussi s'écrire

$$A_{n,h} \equiv (-1)^n - \frac{1}{h^n} \pmod{p},$$

à cause du théorème de Fermat.

En résumé, toute substitution pourra se mettre sous la forme $\alpha + \varphi(x)$, le coefficient de x^n dans $\varphi(x)$ étant

$$\sum_{h=1}^{h=p-2} \left[(-1)^n - \frac{1}{h^n} \right] r_h.$$

Voici quelques conséquences immédiates des dernières formules :

1° Le coefficient de r_i dans chaque terme de $\varphi(x)$ est nul si n est pair et égal à -2 , ou, ce qui est la même chose, à $p-2$, si n est impair.

2° Le coefficient de x^{p-2} est immédiatement donné. On a

$$\alpha_{p-2} \equiv -[2r_1 + 3r_2 + \dots + (p-1)r_{p-2}].$$

3^e Pour $n = \frac{p-1}{2}$, on a

$$A_{\frac{p-1}{2}, h} = (-1)^{\frac{p-1}{2}} - h^{\frac{p-1}{2}};$$

on en conclut, pour le terme du milieu de $\varphi(x)$,

$$a_{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot 2(r_{z_1} + r_{z_2} + r_{z_3} + \dots),$$

expression dans laquelle $z_1, z_2, \dots$ seront les *résidus quadratiques* si p est de la forme $4N-1$ et les *non-résidus* si p est de la forme $4N+1$.

Il existe une loi de récurrence entre les termes $A_{n,h}$ correspondant à une même valeur de n , qui réduit de moitié les calculs à faire.

On a, d'après la formule générale,

$$\begin{aligned} A_{n, 2+k} &= (-1)^n - (2+k)^{p-1-n}, \\ A_{n, p-(2+k)} &= (-1)^n - [p - (2+k)]^{p-1-n} \\ &\equiv (-1)^n + (-1)^{p-n} (2+k)^{p-1-n}, \end{aligned}$$

d'où il résulte immédiatement pour n pair

$$A_{n, 2+k} \equiv A_{n, p-(2+k)},$$

pour n impair

$$A_{n, 2+k} + A_{n, p-(2+k)} \equiv -2.$$

Si l'on observe que $A_{n,1} = 0$ quand n est pair, on pourra énoncer ainsi ces deux relations :

Pour n pair, les termes à égale distance des extrêmes sont égaux.

Pour n impair, abstraction faite du premier terme $A_{n,1}$ qui est toujours -2 , la somme des termes à égale distance des extrêmes est égale à -2 (suivant le module p).

Par un calcul tout semblable on trouvera pour le terme du milieu, qui correspond à $h = \frac{p-1}{2}$,

$$A_{n, \frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^n (1 - 2^n).$$

Grâce à ces remarques, on trouvera aisément : pour $p = 7$,

$$\begin{aligned}\psi(x) = & a + (5r_1 + 2r_2 + r_3 + 4r_4 + 3r_5)x \\ & - (r_2 + 3r_3 + 3r_4 + r_5)x^2 \\ & - 2(r_1 + r_2 + r_4)x^3 + (4r_2 - r_3 - r_4 + 4r_5)x^4 \\ & + (5r_1 + 4r_2 + 3r_3 + 2r_4 + r_5)x^5;\end{aligned}$$

pour $p = 11$,

$$\begin{aligned}\psi(x) = & a + (9r_1 + 4r_2 + 6r_3 + 7r_4 + r_5 + 8r_6 + 2r_7 + 3r_8 + 5r_9)x \\ & + (9r_2 + 7r_3 + 3r_4 - 3r_5 - 3r_6 + 3r_7 + 7r_8 + 9r_9)x^2 \\ & + (9r_1 + 3r_2 + r_3 + 5r_4 - 4r_5 + 2r_6 + 4r_7 - 3r_8 - 5r_9)x^3 \\ & + (3r_2 - 2r_3 - 3r_4 - 4r_5 - 4r_6 - 3r_7 - 2r_8 + 3r_9)x^4 \\ & - 2(r_1 + r_2 + r_4 + r_5 + r_9)x^5 \\ & - (4r_2 + 3r_3 + 2r_4 - 3r_5 - 3r_6 + 2r_7 + 3r_8 + 4r_9)x^6 \\ & + (9r_1 + 2r_2 + 5r_3 + r_4 + 6r_5 + 3r_6 - 3r_7 + 4r_8 - 4r_9)x^7 \\ & - (3r_2 - 3r_3 + 4r_4 + 2r_5 + 2r_6 + 4r_7 - 3r_8 + 3r_9)x^8 \\ & + (9r_1 + 8r_2 + 7r_3 + 6r_4 + 5r_5 + 4r_6 + 3r_7 + 2r_8 + r_9)x^9.\end{aligned}$$

Sur la règle de multiplication des déterminants;
par M. C. LE PAIGE.

(Séance du 4 février 1881.)

Soient les trois déterminants

$$\begin{aligned}A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}, \\ C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix},\end{aligned}$$

où

$$(1) \quad c_{ik} = a_{i1}b_{k1} + a_{i2}b_{k2} + \dots + a_{in}b_{kn} = a_{i1}b_{k1} + d_{ik}.$$

Nous représentons par A_{pq} , B_{pq} les mineurs de a_{pq} , b_{pq} dans les déterminants A et B.

Cela posé, si nous multiplions le déterminant C par A_{11} , en multipliant par A_{11} les éléments de la première rangée, et que nous ajoutions à cette première rangée les $n - 1$ dernières, respectivement multipliées par A_{21} , A_{31} , ..., A_{n1} , nous aurons, en ayant égard aux relations (1) et aux identités

$$a_{1r}A_{11} + a_{2r}A_{21} + \dots + a_{nr}A_{n1} = \frac{A}{0},$$

suivant que r est égal à 1 ou est différent de 1,

$$CA_{11} = A \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \quad (1).$$

Multiplions les deux membres de cette identité par B_{11} , et ajoutons à la première colonne du déterminant qui figure dans le second membre les $(n - 1)$ dernières, respectivement multipliées par B_{21} , B_{31} , ..., B_{n1} ; nous aurons

$$CA_{11}B_{11} = AB \begin{vmatrix} 1 & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ a_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

Or, en retranchant des $(n - 1)$ dernières colonnes de ce déterminant la première, successivement multipliée par b_{21} , b_{31} , ..., b_{n1} , nous trouvons, à cause de (1),

$$CA_{11}B_{11} = AB \begin{vmatrix} d_{22} & d_{23} & \dots & d_{2n} \\ d_{32} & d_{33} & \dots & d_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n2} & d_{n3} & \dots & d_{nn} \end{vmatrix} = AB.D.$$

Il est visible que D est formé à l'aide de A_{11} , B_{11} , comme C au

(¹) Cette formule se trouve également dans une petite Notice de M. Édouard Weyr (*Sitzb. der kön. böhm. Gesellschaft der Wiss.* Prague, 1880) et dans notre Mémoire *Sur quelques points de la théorie des formes algébriques* (*Mém. de la Soc. royale des Sciences de Liège*, 1880).

moyen de A et B. En conséquence, si la règle de multiplication est vraie pour deux déterminants d'ordre $n - 1$, elle est vraie pour deux déterminants d'ordre n .

Puisqu'elle est évidente pour $n = 2$, elle est générale.

Démonstrations élémentaires des lois fondamentales de probabilité des écarts dans les méthodes expérimentales ;

par M. E. LAQUIÈRE.

(Séance du 4 février 1881).

1. La connaissance de la loi de distribution des écarts, c'est-à-dire de la probabilité des valeurs diverses que peut présenter le résultat d'études expérimentales, selon son plus ou moins de divergence d'avec le résultat normal, est de la première importance au point de vue pratique. Cette notion, aussi peu répandue en dehors du monde scientifique qu'elle mériterait au contraire d'être universellement divulguée, peut s'exprimer en disant que, si l'*absolu est la vérité théorique*, le *probable* est, de son côté, *la vérité pratique*.

La détermination mathématique des chances dans les événements soumis aux lois dites du hasard résulte de l'évaluation des combinaisons des causes fortuites pouvant offrir soit les cas favorables, soit les cas contraires à l'arrivée de ces événements.

Dans la nature tout est soumis à des lois immuables, d'après un principe général de continuité, et la connaissance complète des causes entraînerait nécessairement, par une déduction logique et ne laissant prise à aucune incertitude, la connaissance des événements qui en dépendent. Malheureusement, dans la plupart des cas, les causes des événements échappent à notre sagacité et ne se manifestent que par leurs effets, et, comme ceux-ci dépendent, en général, de l'action simultanée d'une multiplicité innombrable de causes qui se combinent pour en amener la production, il nous est d'ordinaire impossible de démêler dans ce chaos le *pourquoi* de l'événement, la cause primordiale et complexe dont il émane.

Au demeurant de cette ignorance des causes, nous ne sommes cependant pas sans avoir le droit de préjuger, dans une certaine mesure, de l'arrivée de certains faits dont les motifs nous sont soit inconnus, soit imparfaitement connus. Guidés par l'idée première et fondamentale de l'invariabilité de la *loi*, nous devons, à l'inverse du joueur pariant maladroitement contre la *série*, croire d'autant plus à l'arrivée future d'un événement que nous l'avons déjà vu plus fréquemment se présenter dans des circonstances qui nous paraissent identiques, car nous devons, logiquement, d'une fréquence qui nous surprend dès l'abord, *conclure à l'existence d'une cause qui favorise sa venue*, cause que nous n'avons nullement besoin de connaître dans son essence pour affirmer d'une façon plausible qu'elle existe réellement.

Les événements qui font l'objet d'études expérimentales sont, en général, le résultat d'une *cause principale* qui les déterminerait complètement sans les modifications qu'y apportent une foule d'autres causes coexistantes et perturbatrices dont l'effet est de produire, en divers sens, des divergences entre les résultats obtenus dans un certain nombre de répétitions de la même cause principale.

On nomme *écart* cette divergence entre un résultat particulier obtenu et le résultat *normal* qu'eût donné la cause principale en l'absence, irréalisable d'ailleurs, de toute cause perturbatrice. La *loi des hasards* a pour objet l'étude de ces écarts; elle détermine la *probabilité* qu'un résultat cherché sera obtenu à un *écart près de limite fixée*. Nous allons montrer d'une manière tout à fait élémentaire que, pour les écarts ordinaires, cette loi des hasards n'est autre que la courbe $y = e^{-x^2}$, que Cauchy avait nommée *indice de probabilité*.

Recherche de la probabilité d'un écart donné.

Cherchons l'expression numérique $P(\delta)$ de la probabilité qu'un événement particulier présentera un écart déterminé de grandeur δ par rapport à l'événement régulier ou normal, tel qu'il serait constitué sans les altérations produites par les causes variables inconnues, et sous la seule influence de la cause principale, simple ou complexe, qui tend à le produire. Cette expression, que l'on

pourrait appeler *probabilité théorique*, s'évaluera par le rapport du nombre des cas favorables, ou des combinaisons des causes le produisant, au nombre total des cas ou des combinaisons possibles. La *probabilité expérimentale* ou *pratique* résultant d'une série d'expériences serait le rapport du nombre des cas ayant donné le résultat cherché au nombre total des cas observés. Cette dernière probabilité n'est qu'une approximation de la vérité, d'autant plus grande (sujette à une erreur d'approximation d'autant moindre) que le nombre des expériences aura été plus considérable.

La question que nous nous proposons de résoudre est de déterminer à la fois la variation de la probabilité théorique avec la grandeur relative des écarts, et l'approximation que l'on est en droit d'espérer dans la détermination pratique d'un résultat moyen, en raison du nombre des expériences qui ont servi de bases à la mesure de ce résultat. Nous obtiendrons ainsi, avec une facilité extrême, la démonstration de ce principe de Bernoulli, règle fondamentale de toute méthode logique d'expérimentation, que l'erreur d'approximation à craindre dans la mesure d'une moyenne est en raison inverse de la racine carrée du nombre des expériences exécutées.

Soit donc $P(\delta)$ la probabilité que l'écart entre la valeur normale et la valeur particulière de la quantité en question sera compris entre les grandeurs δ et $\delta + \Delta\delta$. Nous la nommerons *probabilité de l'écart* δ , celui-ci étant par suite mesuré avec une erreur d'approximation au maximum égale à $\Delta\delta$.

Pour une valeur donnée de δ , il est évident, comme conséquence de la loi générale de continuité dont la formule de Taylor est l'expression analytique, que cette expression est de l'ordre de grandeur de la variation, ou erreur d'approximation $\Delta\delta$ de l'écart, et, lorsque celle-ci est infiniment petite, lui devient proportionnelle. La probabilité de l'écart δ se présentera donc sous la forme

$$P(\delta) = \gamma = z d\delta,$$

dans laquelle z sera une fonction indépendante de l'accroissement $d\delta$.

Au point de vue pratique et utile, on cherche à connaître la probabilité que l'écart entre la valeur normale et la valeur particulière ne s'élèvera pas au delà d'une quantité déterminée δ , en

valeur absolue, c'est-à-dire que l'écart sera compris entre $+\delta$ et $-\delta$. Cette probabilité est l'intégrale de $P(\delta)$ prise entre les limites $+\delta$ et $-\delta$. La valeur en est parfaitement définie, puisqu'elle représente, dans l'infinité des grandeurs possibles de la quantité, le rapport du nombre des quantités, dont l'écart de la valeur normale est égal ou inférieur à $\pm\delta$, à leur nombre total. La différentielle en sera donc proportionnelle à l'accroissement $d\delta$, et ε ne sera autre que la dérivée de la probabilité d'un écart $\varepsilon\delta$.

2. Pour faire intervenir l'action des causes perturbatrices inconnues et variables, considérons l'écart δ comme la résultante d'un certain nombre m d'écarts élémentaires, de grandeur absolue $\Delta\delta$ égale pour tous, mais de signes divers, modifiant l'événement type les uns dans un sens, les autres en sens contraire. Nous appellerons *causes des écarts* les variations des causes dont la valeur normale coexisterait avec la valeur normale de la quantité soumise à l'expérience. Les causes élémentaires en jeu seront en nombre m , dont m_1 sources de l'écart $+\Delta\delta$ et m_2 de l'écart $-\Delta\delta$. On a donc, en posant $n = m_1 - m_2$,

$$\delta = n \Delta\delta.$$

La loi de distribution des écarts que nous allons rechercher devant rester en dehors de toute hypothèse sur la nature des phénomènes soumis à l'expérience, elle nécessite une restriction des plus importantes qui, bien que tacitement admise sans nul doute, n'a jamais été, croyons-nous, formellement énoncée, et c'est à cet oubli qu'il faut attribuer les interminables et si obscures discussions engagées entre les partisans et les adversaires de la loi mathématique des hasards. Cette restriction consiste en ce que les écarts considérés doivent toujours être assez faibles pour rester sensiblement proportionnels à la variation de la cause qui leur donne naissance. Cette hypothèse, base unique mais absolue du calcul qui va suivre, est évidemment réalisée dans les séries d'expériences où l'on cherche à obtenir, mais en n'y parvenant qu'imparfaitement, un concours de circonstances identiques, productrices du phénomène. C'est le cas des expériences balistiques et de toutes les études pratiques ayant pour objet la détermination d'une loi naturelle. La loi des écarts et toutes les conséquences qui

en découlent seront ainsi applicables en toute sécurité à ces phénomènes ; mais les *écarts anormaux*, qui ne se produisent que dans les cas excessivement rares d'une *méprise*, ou erreur très grossière commise dans la réalisation des causes, restent en dehors de la théorie.

Sous le bénéfice de cette observation capitale, on verra que la loi des hasards est une vraie loi limite, précise et nette, jouant dans un ordre d'idées différent un rôle semblable à celui que l'indicatrice joue dans la théorie de la variation de courbure des surfaces.

Nous ne considérerons d'abord que les écarts de nature absolument semblable, s'ajoutant ou se retranchant numériquement de façon que deux écarts égaux se doublent ou se détruisent, suivant la parité ou la disparité de leurs signes. L'idée de continuité, autrement dit de liaison constante entre un effet et sa cause, loi primordiale et philosophique d'une vérité absolue, régissant à la fois tous les phénomènes moraux ou naturels, nous conduit nécessairement, et sans qu'il y ait lieu à une justification plus détaillée, à considérer comme également probables toutes les causes élémentaires capables des mêmes effets, soit les causes origines de tous les écarts élémentaires $\pm \Delta\delta$.

Cela posé, supposons les causes d'écarts à l'état de division extrême, leur nombre s'accroissant d'ailleurs indéfiniment en raison inverse de leur valeur élémentaire. On sait que les nombres m_1 et m_2 des causes d'écarts d'égale probabilité $\pm \Delta\delta$, soit $\pm d\delta$, ont pour rapport limite l'unité, et que le nombre n est ainsi infiniment petit par rapport à m . Celui-ci est donc infiniment grand par rapport à n , soit un infiniment grand du second ordre par rapport à $d\delta$, et, comme il est d'ailleurs indépendant de la valeur particulière et variable de δ , on peut écrire

$$m d\delta^2 = K^2,$$

K désignant une quantité constante dont nous déterminerons ultérieurement la valeur.

Remarquons dès à présent que, si l'on convient de mesurer les écarts δ à une échelle convenablement choisie α , on pourra représenter l'écart concret δ à l'échelle α par l'écart abstrait ou numé-

rique x , en tenant compte des relations

$$\delta = ax,$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} d\delta &= a dx, \\ m d\delta^2 &= ma^2 dx^2 = K^2. \end{aligned}$$

Il suffira donc d'adopter comme échelle a des écarts la constante K pour simplifier la relation qui donne la valeur de m , et la transformer en

$$m dx^2 = 1.$$

Recherche de la loi des écarts.

3. Ainsi qu'il vient d'être expliqué, l'écart $\delta = n d\delta$ résulte de la coexistence de $m = \frac{K^2}{d\delta^2}$ écarts élémentaires, dont m_1 égaux à $+d\delta$ et m_2 égaux à $-d\delta$, par hypothèse tous de même probabilité.

La probabilité $P(\delta) = y = z d\delta$ de l'écart δ est donc le rapport, au nombre total des cas possibles, du nombre des cas qui lui donnent naissance, c'est-à-dire du nombre de manières de choisir m_1 fois l'écart $d\delta$, ou, ce qui revient au même, m_2 fois l'écart $-d\delta$, dans m groupes de deux écarts contraires ($d\delta$ et $-d\delta$), en prenant à volonté l'un des deux écarts dans chaque groupe. Ce nombre est donc égal à celui des combinaisons de m objets m_1 à m_1 , soit m_2 à m_2 , et par suite égal à

$$C_{m_1}^m = C_{m_2}^m = \frac{1.2.3\dots m}{1.2.3\dots m_1.1.2.3\dots m_2}.$$

Son rapport au nombre total

$$P_m = 1.2.3\dots m$$

des cas possibles donne la valeur de la probabilité $P(\delta)$, d'où

$$y = P(\delta) = \frac{1}{1.2.3\dots m_1.1.2.3\dots m_2}.$$

Si nous faisons croître m_1 d'une unité, m_2 décroîtra d'une unité, la valeur de m ne changeant pas. Ainsi n augmentera de deux

unités, et δ de $2 d\delta$. On aura conséquemment

$$y + 2 dy = P(\delta + 2 d\delta) = P(\delta) \frac{m_1}{m_1 + 1},$$

ou bien, en vertu de $m = m_1 + m_2$ et $n = m_1 - m_2$,

$$y + 2 dy = y \frac{m - n}{m + n + 2},$$

d'où enfin

$$dy = -y \frac{n + 1}{m + n + 2}.$$

Remplaçant n et m par leurs valeurs $\frac{\delta}{d\delta}$ et $\frac{K^2}{d\delta^2}$, et négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, il vient

$$dy = -y \delta d\delta.$$

Intégrant et prenant la constante sous la forme $\log \text{nép} H d\delta$, nécessaire pour conserver l'expression de la probabilité sous la forme convenable, ainsi qu'il a été dit plus haut,

$$\log \text{nép} y = -\frac{\delta^2}{2K^2} + \log \text{nép} H d\delta,$$

d'où l'expression définitive

$$y = P(\delta) = H e^{-\frac{\delta^2}{2K^2}} d\delta,$$

représentant la probabilité que l'écart sera compris entre les deux valeurs voisines δ et $\delta + d\delta$.

4. Pour déterminer l'expression de la constante H , qui dépend de la nature des phénomènes, il suffit de comparer la formule de Lagrange,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi},$$

à l'identité

$$H \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\delta^2}{K^2}} d\delta = 1,$$

évidente puisque la somme des probabilités de tous les écarts possibles n'est autre que l'unité, symbole de la certitude.

Posons, dans ce but,

$$\sigma K^2 = \frac{1}{h^2} \quad \text{et} \quad h\hat{z} = u,$$

d'où

$$d\hat{z} = \frac{du}{h};$$

nous aurons

$$H = \frac{h}{\sqrt{\pi}},$$

et la formule de la probabilité deviendra

$$P(\hat{z}) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \hat{z}^2} d\hat{z}.$$

Telle est la forme habituelle donnée à la loi des écarts dans les calculs auxquels donnent lieu les études expérimentales. Le seul paramètre h qu'elle contient, et qui est déterminé dans chaque nature d'expériences par cette nature même, porte le nom de *coefficient de régularité*.

Si l'on prend l'expression de la probabilité en fonction de la valeur abstraite x , en posant

$$\hat{z} = Kx = \frac{x}{h\sqrt{\pi}},$$

la probabilité de l'écart x , à dx près, aura pour valeur

$$P(x) = y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\pi}} dx.$$

En fonction de l'échelle K des écarts, on aura

$$P(\hat{z}) = y = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\pi}} d\hat{z}.$$

Telle est la loi de distribution des écarts simples. On voit que la loi de distribution des écarts proportionnels reste invariable quelle que soit la nature du phénomène : celle-ci fait seulement varier l'échelle à laquelle doivent être mesurés lesdits écarts pour tomber sous l'application de la formule.

Loi de Bernoulli.

§. En désignant par m le nombre des causes en jeu, nous avons posé

$$m dx^2 = 1,$$

soit

$$m d\delta^2 = K^2 = \frac{1}{2h^2}.$$

Or, ainsi que nous venons de le dire, h est une quantité déterminée par la nature même des écarts, dont la distribution suit une loi de répartition invariable suivant leur grandeur relative, c'est-à-dire rapportée à l'échelle convenue $\frac{1}{h\sqrt{2}}$, mais dont la grandeur intrinsèque dépend de leur nature, qui fixe celle de cette échelle. On voit donc que *l'approximation $d\delta$ obtenue est en raison inverse de la racine carrée de m , c'est-à-dire du nombre des causes mises en jeu.*

Cette relation, à laquelle on serait tenté de n'attacher aucune importance sous cette forme un peu vague, est au contraire la plus précieuse règle que le Calcul des probabilités mette à la disposition des expérimentateurs.

Dans toute méthode rationnelle d'expérimentation, on recherche un résultat normal au moyen d'une série d'expériences qui fournissent un certain nombre de résultats particuliers présentant entre eux des divergences plus ou moins considérables. Ces résultats, étant censés mériter le même degré de confiance, entrent au même titre dans le calcul du résultat normal, et dès lors on devra considérer celui-ci comme n'étant autre que leur moyenne arithmétique. Cette conclusion serait absolument rigoureuse si le nombre des résultats servant à établir le résultat moyen était infini, car les écarts de chacun d'eux d'avec le résultat normal se trouveraient distribués suivant la loi de probabilité, et leur somme algébrique serait nulle (1).

(1) Notons, en passant, que lorsque les expériences doivent, pour des raisons observées et discutées en dehors du calcul de la moyenne, être considérées comme méritant des degrés divers de confiance, pour tenir compte de celui-ci, on l'éva-

Le nombre des expériences étant nécessairement limité, on n'obtiendra pas, par la moyenne des résultats particuliers, rigoureusement le résultat normal, mais seulement une approximation de celui-ci, approximation évidemment d'autant plus grande que le nombre des expériences, s'élevant davantage, devra inspirer une confiance plus complète.

Ce degré de confiance trouve sa mesure dans la relation

$$m d\bar{e}^2 = K^2,$$

et, nous le répétons, c'est, au point de vue de la conduite des expériences, la règle la plus utile fournie par la théorie aux praticiens.

A quoi revient, en effet, la division indéfiniment poussée de l'écart en écart élémentaire? A un premier point de vue, elle rapproche de plus en plus les conditions du problème des conditions idéales qui ne sont autres que celles mêmes des faits naturels, dont les lois continues n'admettent point de variations brusques, mais de simples modifications insensiblement variables des causes. Et c'est là ce qui nous autorise, à l'encontre de beaucoup de personnes n'ayant sans doute qu'insuffisamment mûri cette sorte d'études au point de vue philosophique, à considérer le Calcul des probabilités comme l'expression la plus complète de la vérité dans l'ordre des faits naturels.

Au second point de vue, la division de l'écart, ou multiplication du nombre d'écarts élémentaires dont il est la résultante, revient à une multiplication du nombre des cas possibles. Dans cet ordre d'idées, le nombre m des causes élémentaires d'écart mises en jeu aura pour facteur le nombre des expériences, le fait du remplacement d'une expérience par p autres revenant au remplacement des causes qui en déterminent le résultat par la moyenne de p causes identiques, ou la somme de p causes capables individuellement

luera, sous le nom de *poids* du résultat particulier, en considérant chaque résultat comme représentant un groupe de résultats en nombre proportionnel au poids du résultat. C'est le suffrage à deux degrés perfectionné, chaque électeur du deuxième degré disposant d'un nombre de voix égal à celui de ses commettants, système qui ne manquerait pas de logique, et qui a été mis en avant par un économiste anglais dans ces derniers temps.

d'un écart élémentaire p fois moindre. On peut donc considérer m comme représentant proportionnellement le nombre des expériences sur lesquelles est basée la détermination du résultat normal; la relation

$$m d\sigma^2 = K^2 = \frac{1}{2h^2}$$

soit

$$d\sigma = \frac{1}{h\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{m}}$$

exprime donc que l'erreur d'approximation des écarts comptés à partir du résultat normal est en raison inverse de la racine carrée du nombre des expériences sur lesquelles est basée la détermination du résultat moyen, considéré comme résultat normal.

Ainsi les écarts que l'on a la même probabilité de ne pas dépasser *dans la détermination du point moyen* (ou résultat normal) sont proportionnels à

$$\frac{1}{h\sqrt{2m}} = \frac{K}{\sqrt{m}},$$

c'est-à-dire en raison de l'échelle même des écarts, dépendant de la nature du phénomène, et *en raison inverse de la racine carrée du nombre des expériences qui ont servi à l'établir.*

6. L'importance de ce résultat nous engage à insister sur sa démonstration, que rendra plus claire l'examen des résultats d'une série d'expériences.

Considérons une quantité quelconque dont on ait relevé un nombre considérable de valeurs. Si ce nombre en était infini, la distribution des écarts des valeurs diverses d'avec la valeur normale, ou moyenne, eût été faite exactement d'après la loi de probabilité; avec un nombre simplement très grand, cette distribution s'approchera seulement de cet idéal et l'on obtiendra une approximation de la loi de probabilité de la manière suivante.

Représentons individuellement chaque écart par un poids fixe que nous placerons sur une droite fixe, axe des écarts, à une distance de l'origine, représentative de la valeur normale, égale à l'écart mesuré à une échelle, d'ailleurs quelconque, en rapport

avec la nature des faits soumis à l'expérience. Soient p le poids fixe d'un écart individuel et N le nombre des écarts, soit des expériences; Np sera le poids total dont est chargé l'axe des écarts. Il est visible que, si une portion de cet axe se trouve ainsi chargée d'un poids P , la probabilité que, dans une expérience faisant ou non partie de la série, mais exécutée dans les mêmes conditions, l'écart sera compris entre les deux limites mesurées par les distances de l'origine aux deux extrémités de cette portion de l'axe sera égale au rapport $\frac{P}{Np}$ des poids de la portion désignée et de la totalité de l'axe.

Supposons construite la courbe indice de probabilité, et désignons par S la surface totale comprise entre la courbe et son asymptote, axe des écarts, et par s la surface comprise entre la courbe, l'axe des écarts et les deux ordonnées correspondant aux écarts δ et δ' . Soit de plus $\Delta\delta$ le côté du carré dont la surface $\Delta\delta^2$ est contenue N fois dans $S = N \cdot \Delta\delta^2$. A partir de l'asymptote et de sa perpendiculaire par l'origine, construisons un réseau de parallèles aux deux droites à l'équidistance $\Delta\delta$; elles formeront un quadrillage dont les éléments superficiels auront $\Delta\delta^2$ pour surface. Il est visible que le nombre des carreaux compris entre deux ordonnées et la courbe est le même que celui des poids p placés sur l'axe des écarts et que par conséquent il y a une distance inférieure à $\Delta\delta$ entre les deux extrémités de la portion de l'axe chargée d'un poids $P = np$ et les pieds des ordonnées du quadrillage détachant une surface $s = n \cdot \Delta\delta^2$. L'écart, ayant une probabilité déterminée, est donc, à l'aide des poids ou des expériences, déterminé à une approximation $\Delta\delta = \sqrt{\frac{S}{N}}$ près, ce qu'il fallait démontrer.

On voit que cette démonstration est indépendante de l'expression même de la loi de probabilité.

Approximation probable d'un résultat moyen obtenu.

7. Lorsqu'on a cherché une grandeur par une série d'expériences, on a déterminé la *moyenne algébrique* des valeurs particulières qu'elle prend dans chacune des expériences particulières; cette moyenne X est admise comme représentant la valeur *vraie*.

En outre, la comparaison des résultats individuels avec le résultat moyen, toujours admis comme rigoureusement exact, fait connaître le module h dont dépend la régularité du phénomène, et qui permet de calculer les probabilités de tel ou tel écart à craindre.

Mais, le nombre des cas expérimentés étant nécessairement restreint, le résultat moyen obtenu s'écartera toujours plus ou moins du résultat type, de la valeur *vraie* qui se représenterait invariablement à tous les coups, s'il était possible de faire disparaître toute cause de divergence entre les différents cas. La *vérité absolue* nous échappe fatalement, et, selon l'expression on ne peut plus juste de M. Jouffret, alors même que le hasard nous fournirait une valeur de cette nature, *nous n'en pourrions rien savoir*. La valeur moyenne obtenue ne doit donc être considérée que comme *la plus probable* des valeurs que l'on pourrait assigner à la grandeur cherchée.

Toutefois, au prix d'une somme suffisante de travail expérimental, il est toujours possible, sinon de parvenir à la vérité absolue, du moins, en multipliant convenablement les expériences, d'en approcher aussi près que l'on voudra. Cette puissance indéfinie de la répétition des épreuves au point de vue de la *rigueur du résultat moyen* a été mise en évidence pour la première fois par Bernoulli, qui a énoncé la loi suivante, fixant la mesure de l'erreur à craindre sur le résultat moyen en raison du nombre et de la nature des expériences.

THÉORÈME. — Soient X la valeur moyenne d'une quantité et n le nombre des valeurs individuelles x relevées dans les expériences; si l'on désigne par t un nombre quelconque, il y a une probabilité égale à $\Theta(t)$ que la valeur vraie cherchée est comprise entre les deux limites

$$X - \frac{t}{h\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad X + \frac{t}{h\sqrt{n}},$$

c'est-à-dire que l'écart entre la valeur vraie et la valeur moyenne ne dépasse pas $\frac{t}{h\sqrt{n}}$, le symbole $\Theta(t)$ représentant la probabilité,

$$\Theta(t) = \int_{-t}^{+t} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt,$$

qu'un écart isolé sera au maximum égal à $\frac{\ell}{h}$ en valeur absolue.

La démonstration de ce principe découle immédiatement de ce que nous avons dit plus haut. L'écart $\Delta\delta$ du point moyen, c'est-à-dire l'approximation avec laquelle m expériences le déterminent, est proportionnel à $\frac{1}{\sqrt{m}}$. Or, si l'on se borne à une expérience, faisant $m = 1$, il est évident que les deux écarts, celui du point moyen par rapport au point particulier qui seul le détermine, et celui de ce dernier par rapport au point moyen, sont égaux et de signes contraires, et de plus, étant solidaires et relatifs l'un de l'autre, ils ont même probabilité pour une même valeur déterminée. Dans ce cas le module de convergence du point moyen est donc le même que celui du point particulier, et l'on a la probabilité $\theta(\ell)$ que l'écart sur le point moyen ne dépassera $\frac{\ell}{h}$, comme l'on aurait cette probabilité que l'écart d'un point particulier par rapport au point moyen restera inférieur ou au plus égal à cette quantité.

Si l'on base la recherche du point moyen sur n expériences, l'écart que l'on a la probabilité $\theta(\ell)$ de ne pas dépasser sera avec le précédent dans le rapport $\frac{1}{\sqrt{n}}$, et par suite égal à $\frac{\ell}{h\sqrt{n}}$.

Détermination du coefficient de régularité.

8. Pour comparer les écarts de deux séries d'expériences provenant d'état de choses constant dans une même série, mais différent d'une série à l'autre, soient h_1 et h_2 les deux coefficients de régularité correspondants; les écarts δ_1 et δ_2 de l'une et l'autre série, accouplés de telle sorte que l'on ait

$$h_1 \delta_1 = h_2 \delta_2,$$

auront même probabilité de ne pas être dépassés dans l'un et l'autre cas.

Le coefficient de régularité est donc en rapport inverse de l'échelle des écarts, c'est-à-dire des écarts qui ont la même probabilité de ne pas être dépassés.

La détermination de ce coefficient, également connu sous les noms de *module de convergence*, *mesure de la précision*, s'obtient au moyen des relations ci-dessous.

1° *Écart moyen*. — Soit n le nombre des écarts compris entre δ et $\delta + d\delta$, N étant le nombre total des écarts (ou nombre des expériences); on aura

$$\frac{n}{N} = P(\delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \delta^2} d\delta.$$

L'écart moyen μ ou moyenne arithmétique des valeurs absolues $\pm \delta$ de tous les écarts s'évalue facilement :

$$\mu = 2 \int_0^{+\infty} \frac{h \delta^2}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \delta^2} d\delta = \frac{1}{h \sqrt{\pi}}.$$

2° *Écart moyen quadratique*. — Cette quantité, l'unité à laquelle il est le plus commode pour les calculs de rapporter les écarts, est l'écart fictif dont le carré est la moyenne arithmétique des carrés de tous les écarts. En le désignant par ε , on aura

$$\varepsilon^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h \delta^2}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \delta^2} d\delta = \frac{1}{2 h^2} = K^2.$$

L'écart moyen quadratique n'est donc autre que l'échelle des écarts que nous avons été amené à employer dans le calcul de la probabilité.

Les relations entre les divers modules,

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sqrt{\frac{\sum \delta^2}{N}} = \frac{1}{h \sqrt{2}}, \\ \mu &= \frac{\sum (\pm \delta)}{N} = \frac{1}{h \sqrt{\pi}} = \varepsilon \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \end{aligned}$$

permettent de les déterminer pratiquement d'une manière approximative, en traitant le nombre limité N d'expériences faites comme si ce nombre était infini.

9. Nous n'ajouterons qu'un mot sur les écarts simultanés dus à des causes différentes et indépendantes les unes des autres.

Dans le cas de deux, chaque écart particulier complexe est la résultante des deux écarts particuliers correspondants dus à chacune des causes résultantes des groupes de causes élémentaires de même nature. En conséquence, soit Δ l'écart résultant des écarts δ et δ' , dus aux deux causes distinctes dont les natures particulières peuvent d'ailleurs être soit similaires, soit différentes; sa probabilité sera

$$\frac{hh'}{\pi} e^{-(h^2\delta^2 + h'^2\delta'^2)} d\delta \cdot d\delta',$$

en désignant par h et h' les coefficients de régularité relatifs aux deux écarts composants.

Deux cas principaux sont à considérer :

1° Les écarts δ et δ' sont de même nature et susceptibles de s'ajouter. L'écart Δ est alors leur somme algébrique et sa probabilité deviendra la somme de toutes les probabilités élémentaires, telles que la précédente, pour lesquelles on aura

$$\delta + \delta' = \Delta.$$

On voit aisément que, si l'on pose

$$\frac{1}{H^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h'^2},$$

cette probabilité n'est autre que

$$\frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2\Delta^2} d\Delta.$$

Ce résultat généralisé montre que : lorsqu'un écart est la résultante de plusieurs écarts de même nature dus à des causes indépendantes, la loi de probabilité de l'écart résultant est la même que s'il était dû à une seule nature de cause, mais le carré de l'écart moyen quadratique est la somme des carrés des écarts moyens quadratiques composants.

2° Les écarts de nature analogue ne sont pas superposables, mais assimilables à des écarts simultanés dans deux directions différentes, tels que les écarts en portée et en direction d'une arme à feu. Dans ce cas, posons

$$h^2\delta^2 + h'^2\delta'^2 = \lambda^2.$$

On voit que les courbes d'égale probabilité sont des ellipses concentriques, ayant pour demi-diamètres conjugués dans les directions des écarts

$$\frac{\lambda}{h} \quad \text{et} \quad \frac{\lambda}{h'}.$$

On voit immédiatement aussi que les surfaces totales des ellipses d'égale probabilité ont plus de chance de renfermer l'extrémité de l'écart que toute surface autre d'aire équivalente.

10. Terminons par quelques observations ayant pour objet de lever une difficulté apparente à laquelle nous n'aurions peut-être jamais songé sans les critiques insuffisamment mûries à notre avis, dont les courbes d'égale probabilité dans le tir sur écran plan ont été l'objet il y a quelques années.

Si l'on examine un Tableau de probabilité dressé suivant les valeurs de $\theta(t)$, on est immédiatement frappé de l'absence de limite à la grandeur des écarts auxquels est sujet le phénomène. Or il est évident que l'écart de la quantité en jeu par rapport à sa valeur normale ne saurait être infini.

Nous expliquerons tout à l'heure la cause de cette absurdité apparente des résultats déduits de la courbe de probabilité. Disons tout d'abord que la loi de probabilité ne réglant, ainsi que nous l'avons observé dans le principe, que la fréquence des écarts peu considérables, nous pourrions dès à présent laisser passer cette anomalie sans y prêter attention.

Dans le numéro d'avril 1877 de la *Revue d'Artillerie*, cette absence de limite imposée aux écarts par la loi de probabilité a servi d'arme à M. Bréger pour combattre les ellipses isoprobables qui ne sauraient, suivant lui, jouir de cette propriété, la courbe de probabilité zéro devant être le rectangle formé par les écarts maxima en portée d'une part, en direction de l'autre. Sans réfuter les erreurs d'un tel raisonnement, ni nous retrancher derrière ce fait que la loi n'est plus applicable aux écarts considérables, nous ferons simplement observer que, bien que les écarts ne puissent s'étendre à l'infini, la limite absolue dans laquelle ils restent circonscrits pour un sujet déterminé nous échappe totalement, *aussi bien comme conception que comme réalité* ; il ne saurait, à proprement parler, y avoir de courbe de probabilité nulle : et, s'il y avait

un lieu géométrique de probabilité nulle, il comprendrait, au delà de cette lisière fictive, tout l'espace extérieur correspondant à des écarts supérieurs à l'écart limité et ne pouvant, *a fortiori*, se présenter. En réalité, la limite des écarts nous échappe fatalement, et il ne nous est point loisible de raisonner sur elle comme sur une quantité déterminée. Les seules quantités de cette nature dont nous pouvons avoir connaissance sont les écarts qui se présenteront une fois sur dix, une fois sur cent, une fois sur mille, et pour ceux-là, même ceux qui sont fort rares, les Tableaux de probabilité nous assignent toujours un écart non seulement fini, mais assez restreint, et par conséquent, malgré la restriction originelle, la loi des écarts leur est applicable.

L'absence de limite assignée aux écarts par la loi de probabilité a d'ailleurs son origine dans la méthode de calcul employée pour exprimer *approximativement en chiffres* les résultats de la théorie, méthode basée sur la proportionnalité des effets aux causes, qui en restreint l'application aux écarts modérés, l'approximation de la probabilité des autres restant tout à fait illusoire.

Quelle que soit l'hypothèse imaginée pour déterminer par le calcul la loi des hasards, elle reviendra fatalement à considérer un écart donné comme la résultante des écarts simultanés dus à toutes les causes accessoires influant sur le phénomène. Prises à part, ces causes sont en général innombrables, mais en nombre fini pourtant. Les écarts, dont chacun pris individuellement résulte de la simultanéité des valeurs particulières correspondantes de toutes ces causes, seront en nombre égal à celui des combinaisons de toutes ces causes en systèmes correspondants, par suite en nombre fini, quoique incomparablement supérieur au précédent. Par conséquent, les écarts résultants de même probabilité, c'est-à-dire ceux qui se reproduisent le même nombre de fois dans la totalité des cas qui peuvent se présenter, formeront, par leurs extrémités sur l'écran, une série de points régulièrement distribués, d'autant plus serrés que les causes seront plus nombreuses, ou plus divisées si l'on considère chacune d'elles comme la résultante de causes semblables. La courbe de probabilité égale est l'image limite, ou abstraction, de la courbe ponctuée, représentation exacte de la figure formée par les points représentant les écarts en nombre fini, bien qu'insaisissable.

Le mode de calcul employé se trouve ainsi complètement justifié sans qu'il y ait lieu de se préoccuper de cet écart démesuré qui s'introduit furtivement (d'ailleurs comme application de la formule à un cas exclu *a priori*), mais auquel le calcul lui-même, sans que la limite du possible puisse être pour cela nettement révélée, assigne une improbabilité assez voisine de l'impossibilité pour qu'il n'y ait pas lieu d'en tenir compte. On est en droit d'en considérer l'*aléa* apparent comme erreur d'approximation dans le calcul des chances, et la source s'en trouve dans cette division à l'infini des causes physiques en un groupe de causes théoriques, se combinant entre elles pour multiplier de même les écarts élémentaires dont se compose un écart réel, ce qui, d'après la rapidité d'accroissement du nombre des combinaisons avec le nombre des éléments combinés, rend démesurément plus considérable, à chaque division nouvelle des causes, l'improbabilité de l'écart résultant de la combinaison dans le même sens de tous les écarts élémentaires, tandis que les écarts naturels conservent arithmétiquement la même probabilité avec une approximation d'autant plus grande et plus véritablement figurée par la loi des hasards.

Cette loi, il ne faut jamais le perdre de vue, exprime uniquement une sorte de *pour cent*, la probabilité qu'un écart ne s'éloignera pas d'une quantité assignée de plus qu'une différence $\Delta\delta$ également donnée. Nous terminerons par une représentation diagrammique de cette loi qui nous paraît la mieux imagée : tracer des cercles concentriques d'égale probabilité (projections sur un plan convenable des ellipses isoprobables) distants d'entre eux d'une longueur égale à l'erreur d'approximation assignée comme limite à la mesure des écarts ; puis, si l'on désire les probabilités à $\frac{1}{n}$ près, chercher la probabilité $\frac{1}{k}$ d'atteindre chaque zone ; placer dans l'intérieur de la zone annulaire $\left(\frac{n}{k}\right)$ points, c'est-à-dire le plus grand entier contenu dans $\frac{n}{k}$, en les distribuant régulièrement. Le nombre des zones sur lesquelles se distribueront les points figuratifs des probabilités se limitera ainsi de lui-même et donnera de lui-même la grandeur des écarts de probabilité assignable. Cette probabilité sera exprimée en $n^{\text{ième}}$ par le nombre de points figu-

ratifs ayant l'écart en question et les résultats spéculatifs rentreront identiquement dans les conditions pratiques.

Les courbes isoprobables sont bien des ellipses ; mais la direction de leurs axes, loin d'être arbitraire, ainsi que leurs adversaires semblent le supposer pour les combattre, est déterminée de la manière la plus précise.

Dans le cas du tir des armes à feu, sans qu'il soit nécessaire de recourir à une démonstration par le calcul, peut-être fort difficile à imaginer, cette vérité me paraît mise hors de conteste par la simple réflexion suivante :

La *trajectoire théorique*, ou lieu du *point d'impact moyen*, est une courbe gauche autour de laquelle tout se passe dans ses plans normaux dans les conditions de la plus parfaite symétrie. En conséquence, la *gerbe*, ou *faisceau des trajectoires individuelles*, a pour surface diamétrale principale la surface gauche enveloppe des plans osculateurs de la trajectoire théorique, soit la développable de ses normales principales. Sur une section plane de la gerbe normale à la trajectoire, les axes de symétrie des courbes d'égale probabilité seront évidemment la normale principale et la perpendiculaire au plan de courbure. Pour toutes les sections obliques, ce seront des courbes fort rapprochées des projections de ces lignes. Ces axes sont d'ailleurs, en pratique, représentés avec une approximation très suffisante par l'horizontale et la trace sur l'écran du plan vertical passant par la tangente à la trajectoire à laquelle l'écran cible est posé normalement.

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

SÉANCE DU 5 NOVEMBRE 1880.

PRÉSIDENCE DE M. JORDAN.

Communications :

M. Laguerre : *Sur la transformation par directions réciproques.*

M. Halphen : *Sur la recherche d'une courbe de troisième classe tangente en neuf points à une courbe du troisième degré donnée.*

M. Stephanos : *Sur les formes admettant un covariant donné.*

SÉANCE DU 19 NOVEMBRE 1880.

PRÉSIDENCE DE M. JORDAN.

Élection : M. Jean Guccia, présenté dans la dernière séance par MM. Jordan et Stephanos, est élu Membre de la Société.

Communications :

M. Humbert : *Sur une formule de M. Hermite.*

M. Jordan : *Sur la transformation des formes en elles-mêmes par une substitution infinitésimale.*

SÉANCE DU 3 DÉCEMBRE 1880.

PRÉSIDENCE DE M. JORDAN.

M. Gomes Teixeira adresse un Mémoire *Sur la théorie des imaginaires.*

Communications :

M. Stephanos : *Sur les faisceaux de formes binaires ayant une jacobienne donnée.*

M. Léauté : *Sur le frottement d'une corde enroulée sur un cylindre quand tous deux tournent avec une grande vitesse.*

M. Jordan : *Sur le théorème d'Abel relatif à la convergence des séries.*

SÉANCE DU 20 DÉCEMBRE 1880.

PRÉSIDENTE DE M. JORDAN.

M. Resal, membre de l'Institut, professeur de Mécanique à l'École Polytechnique, membre du Conseil de la Société mathématique de France, adresse sa démission de Membre de la Société.

Communications :

M. Weill : *Sur les polygones de Poncelet.*

M. Stephanos : *Sur les formes binaires.*

SÉANCE DU 7 JANVIER 1881.

PRÉSIDENTE DE M. JORDAN.

Communications :

M. Weill : *Sur quelques cas de décomposition des lieux géométriques.*

M. Stephanos : *Sur certaines directions de transversales des courbes algébriques, qui correspondent aux directions des axes des coniques.*

M. Humbert : *Sur le théorème de Lebesgue concernant les zones d'ellipsoïde à différence planifiable, et sur d'autres propositions analogues obtenues au moyen du théorème d'Abel, étendu aux intégrales multiples.*

SÉANCE DU 21 JANVIER 1881.

PRÉSIDENTE DE M. JORDAN.

A l'occasion du renouvellement du Bureau, M. le Président, se faisant l'interprète de la Société, exprime les vifs regrets que lui inspire la perte récente de M. Chasles, qui, après avoir été l'un de ses fondateurs et son premier Président, était resté son Président d'honneur. La Société s'associe, à l'unanimité des Membres présents, aux regrets exprimés par son Président.

Le Bureau et le Conseil sont renouvelés comme l'indique l'état qui est au commencement du Volume.

M. de Polignac, au nom de la Commission des Comptes, donne lecture du Rapport sur la gestion du Trésorier. Les conclusions du rapporteur, proposant l'approbation des comptes et des remerciements au Trésorier, sont votées à l'unanimité.

La Société approuve l'ouverture d'un crédit de 300^{fr} pour l'envoi d'une circulaire destinée à la faire connaître et à provoquer de nouvelles adhésions.

Élections : M. Vanecek, professeur au Lycée de Jicin (Bohême), et M. Cretin, professeur au Lycée Saint-Louis, présentés dans la dernière séance, l'un par MM. Collignon et Stephanos, l'autre par MM. Halphen et Laguerre, sont élus Membres de la Société.

SÉANCE DU 4 FÉVRIER 1881.

PRÉSIDENTE DE M. LAGUERRE.

. *Communications* :

M. Laguerre : *Sur la séparation des racines des équations dont le premier membre satisfait à une équation linéaire du second ordre.*

M. Humbert : *Sur la fonction $(x - 1)^2$.*

M. Stephanos : *Sur une généralisation de la théorie de M. Laguerre sur la Géométrie de direction.*

M. de Marsilly adresse une Note *Sur la théorie des parallèles*.

M. le Paige adresse une Note *Sur le théorème de multiplication des déterminants*.

M. Laquière adresse un Mémoire intitulé *Démonstrations élémentaires des lois fondamentales de probabilité des écarts dans les méthodes expérimentales*.

M. Picquet est désigné comme délégué de la Société au Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences, à Alger.

SÉANCE DU 18 FÉVRIER 1881.

PRÉSIDENTE DE M. LAGUERRE.

Communications :

M. Jordan : *Sur la convergence d'une classe de séries multiples*.

M. Stephanos : *Sur les mouvements osculateurs du mouvement d'une figure plane invariable dans son plan*.

M. de Polignac : *Sur la représentation analytique des substitutions*.

M. Weill : *Sur les polygones de Poncelet*.

SÉANCE DU 4 MARS 1881.

PRÉSIDENTE DE M. ANDRÉ.

Communications :

M. Stephanos : *Sur la représentation des déplacements d'un plan sur lui-même par des points de l'espace*.

Élection : M. Chemin, ingénieur des Ponts et Chaussées, présenté à la dernière séance par MM. Laguerre et Fouret, est élu Membre de la Société.

SÉANCE DU 18 MARS 1881.

PRÉSIDENCE DE M. DE POLIGNAC.

Communications :

M. Jordan : *Sur la représentation d'un nombre ou d'une forme quadratique binaire par des formes quadratiques d'ordre quelconque.*

M. Weill : *Sur un mode de génération des courbes du quatrième degré à deux points doubles.*

SÉANCE DU 1^{er} AVRIL 1881.

PRÉSIDENCE DE M. DE POLIGNAC.

Communications :

M. Stephanos : *Sur le réseau des quadriques conjuguées à un tétraèdre.*

M. Halphen : *Sur l'intégration des équations différentielles linéaires n'ayant pas plus de trois points singuliers.*

SÉANCE DU 15 AVRIL 1881.

PRÉSIDENCE DE M. LAGUERRE.

Communications :

M. Stephanos : *Sur quelques propriétés des formes binaires.*

M. Rodet : *Sur les Tables à calcul des Romains et des Grecs.*

Élection : M. Perott, présenté à la dernière séance par MM. Laguerre et Fouret, est élu Membre de la Société; sur sa demande, il est inscrit comme Sociétaire perpétuel.

SÉANCE DU 6 MAI 1881.

PRÉSIDENTE DE M. LAGUERRE.

Communications :

M. Halphen : *Sur un système d'équations différentielles.*

M. Laguerre : *Sur le théorème de Budan et la méthode d'approximation de Newton.*

SÉANCE DU 20 MAI 1881.

PRÉSIDENTE DE M. DE POLIGNAC.

Communications :

M. Halphen : *Sur une application de la théorie des invariants différentiels d'après M. Zeuthen.*

M. Halphen : *Sur un système d'équations différentielles.*

M. Stephanos : *Sur la relation qui existe entre la théorie des directions de M. Laguerre et la Géométrie des sphères de M. Lie.*

La Société royale des Sciences de Saxe, à Leipzig, et la Société mathématique d'Odessa (Russie) demandent à échanger leurs publications contre le *Bulletin de la Société mathématique de France*.

M. F. Briot, capitaine d'infanterie de la marine, adresse un Mémoire intitulé *Théorie des équations algébriques et essai sur les équations transcendentes.*

OUVRAGES ET MÉMOIRES REÇUS DEPUIS LE 3 NOVEMBRE 1880.

M. Léop. Hugo : Traduction allemande de l'*Aperçu historique* de Chasles.

MM. le Paige et F. Folie : *Mémoire sur les courbes du troisième ordre* (1^{re} Partie). Bruxelles, Hayez, 1880.

M. Zeuthen : *Construction du huitième point commun aux surfaces du second ordre qui passent par sept points donnés.*

M. Stephanos : *Sur quelques surfaces du second degré dont les deux systèmes de droites appartiennent à des complexes linéaires.*

M. J. Guccia : *Sur une classe de surfaces représentables sur un plan.*

Académie royale de Belgique (Classe des Sciences) : *Jugement du Concours annuel de 1880.*

M. Laisant : *Introduction à la méthode des quaternions.* Paris, Gauthier-Villars, 1881.

M. d'Ovidio : *Note sur les formes binaires du cinquième ordre. Note sur quelques hyperboloïdes.*

Clebsch (traduction par M. Benoist) : *Leçons sur la Géométrie* (deuxième Volume). Paris, Gauthier-Villars, 1881.

M. Gomes Teixeira : *Journal des Sciences mathématiques et astronomiques* (Coïmbre, vol. I et II, 1878 et 1879).

M. Stephanos : *Sur la théorie des connexes conjugués.*

M. Catalan : *Note sur les fonctions X_n de Legendre. Note sur la quadrature des courbes paraboliques. Mémoire sur une suite de polynômes entiers et sur quelques intégrales définies.*

Extraits de trois Lettres adressées par M. E. Catalan à D.-B. Boncompagni.

M. Rodet : *Note sur la véritable signification de la notation numérique inventée par Aryabhata.*

Note sur les notations numériques et algébriques antérieurement au XVI^e siècle.

M. Genty : *Applications mécaniques du Calcul des quaternions.*

Problème concernant les courbes planes du troisième degré;
par M. HALPHEN.

(Séance du 5 novembre 1880.)

1. Le problème que je me propose de traiter est le suivant :

Étant donnée une courbe plane du troisième degré, trouver une courbe de la troisième classe qui soit tangente à la proposée en neuf points.

D'après une élégante proposition due à M. Cremona ⁽¹⁾, la *hessienne* et la *cayleyenne* d'un même réseau de coniques sont tangentes entre elles en neuf points. Ces courbes sont respectivement du troisième degré et de la troisième classe. De plus, toute courbe du troisième degré est, de trois manières différentes, la hessienne d'un réseau de coniques. Il lui correspond donc trois cayleyennes, qui, toutes trois, donnent des solutions du problème que je viens d'énoncer. Ainsi trois solutions sont déjà connues. Il s'agit de reconnaître s'il en existe d'autres, si même le problème est déterminé : dans un cas particulier, en effet, comme je vais le montrer pour commencer, il existe une infinité de solutions.

Le résultat auquel je parviens est celui-ci :

1° *Si la cubique donnée est équiianharmonique, le problème admet une infinité de solutions. Les courbes de troisième classe touchant la cubique en neuf points forment un système dont ne font pas partie les trois cayleyennes. Ces dernières donnent, en outre, trois solutions isolées.*

2° *Si la cubique n'est pas équiianharmonique, il n'y a pas d'autre solution que les trois cayleyennes.*

J'entre maintenant en matière, et j'avertis le lecteur que j'emploie les caractères italiques pour les coordonnées des points, les caractères grecs pour les coordonnées des droites. Ainsi x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées homogènes du point x , et ξ_1, ξ_2, ξ_3 les coordonnées homogènes de la droite ξ .

(1) *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, p. 116. Voir également PICQUET, *Systèmes ponctuels et tangentiels de sections coniques*, p. 106.

2. Soient les deux courbes

$$(1) \quad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0,$$

$$(2) \quad \lambda_1 x_1^{\frac{3}{2}} + \lambda_2 x_2^{\frac{3}{2}} + \lambda_3 x_3^{\frac{3}{2}} = 0.$$

Je me propose de déterminer les constantes λ de telle sorte que ces courbes se touchent. Je fais, pour un instant, $x^3 = y^2$. Le problème est alors le même que celui d'établir le contact entre une conique et une droite; les deux équations se changent effectivement en celles-ci :

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0,$$

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 = 0.$$

La condition de contact est

$$(3) \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 0.$$

Soit supposée remplie cette condition. La conique et la droite se touchent en un point y . Mais les équations

$$x_1^3 : y_1^2 :: x_2^3 : y_2^2 :: x_3^3 : y_3^2$$

font correspondre au point y neuf points x . Donc, sous la condition (3), les courbes (1) et (2) se touchent en neuf points. Or la courbe (1) est une cubique équiانharmonique, la courbe (2) est une courbe de troisième classe, également équiانharmonique; ainsi toute cubique équiانharmonique est l'enveloppe d'un système de courbes de troisième classe, dont chacune la touche en neuf points.

Cette propriété n'appartient pas aux autres cubiques; pour le faire voir, je vais d'abord démontrer un lemme.

3. LEMME. — 1^o Par les neuf points de rebroussement d'une courbe de troisième classe (α) passe une et une seule courbe du troisième degré (a).

2^o Si l'on donne (a), la courbe (α) de troisième classe assujettie à avoir ses neuf points de rebroussement sur (a) est déterminée de trois manières. Il y a exception dans le seul cas où (a) se compose de trois droites : s'il en est ainsi, il y a une infinité de courbes (α) et elles sont équiانharmoniques.

Soit la courbe (α) représentée par l'équation tangentielle

$$(4) \quad \xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3 + 6\alpha \xi_1 \xi_2 \xi_3 = 0.$$

Désignons par ω une racine cubique de l'unité. Les coordonnées ponctuelles des neuf points de rebroussement s'obtiennent de la sorte : pour l'un d'eux on a

$$x_1 : \omega :: x_2 : \omega^2 :: x_3 : -2\alpha,$$

et l'on obtient tous les autres en permutant les indices 1, 2, 3 et en changeant la racine cubique ω . Par ces neuf points nous devons mener une courbe du troisième degré. Je partage les termes de l'équation de cette courbe en trois groupes P_0, P_1, P_2 , comme il suit :

$$P_0 = a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + a_3 x_3^3 + 6\alpha x_1 x_2 x_3,$$

$$P_1 = c_1 x_2 x_3^2 + c_2 x_3 x_1^2 + c_3 x_1 x_2^2,$$

$$P_2 = d_1 x_3 x_2^2 + d_2 x_1 x_3^2 + d_3 x_2 x_1^2,$$

en sorte que

$$P_0 + P_1 + P_2 = 0$$

est une équation générale du troisième degré. La propriété qui distingue les trois groupes P_0, P_1, P_2 consiste en ce que, si l'on remplace x_1, x_2 par ωx_1 et $\omega^2 x_2$, chacun de ces groupes se reproduit multiplié par une puissance de ω dont l'exposant coïncide avec l'indice de ce groupe. Considérons donc successivement les trois points $(1, 1, -2\alpha), (\omega, \omega^2, -2\alpha), (\omega^2, \omega, -2\alpha)$, où ω est maintenant imaginaire. Étant mises dans P_0, P_1, P_2 les coordonnées du premier point, nous avons les trois équations

$$P_0 + P_1 + P_2 = 0,$$

$$P_0 + \omega P_1 + \omega^2 P_2 = 0,$$

$$P_0 + \omega^2 P_1 + \omega P_2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$P_0 = 0, \quad P_1 = 0, \quad P_2 = 0.$$

Les équations relatives aux autres points s'obtiennent par la permutation des indices dans ces dernières équations. De là résulte cette conséquence : P_1 et P_2 sont identiquement nuls, et P_0 a la forme

$$P_0 = \alpha(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + (1 - 4\alpha^3)x_1 x_2 x_3.$$

Le seul cas d'exception où P_1 et P_2 ne sont pas identiquement nuls a lieu sous la condition $8\alpha^3 + 1 = 0$, qui caractérise la réduction de la courbe (4) à trois points. Ce cas écarté, nous trouvons pour unique solution la cubique

$$(5) \quad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6\alpha x_1 x_2 x_3 = 0,$$

dont le paramètre α est donné par la formule

$$(6) \quad \alpha = \frac{1 - 4x^3}{6x}.$$

Ceci démontre la première partie du lemme. La seconde partie s'en déduit aisément. Effectivement les courbes (4) et (5) étant simultanément réduites aux équations canoniques, on voit que, si l'on donne l'équation (5) pour la courbe (α), on en conclura l'équation (4) pour la courbe (α), et le paramètre α , susceptible de trois déterminations, sera fourni par la relation (6).

Il y a toutefois exception pour le cas où l'équation (5) se réduit à son dernier terme, $x_1 x_2 x_3 = 0$. Ce cas provient de l'hypothèse $\alpha = 0$. S'il en est ainsi, la courbe (α) a une infinité de déterminations, dont la forme est

$$\mu_1 \xi_1^3 + \mu_2 \xi_2^3 + \mu_3 \xi_3^3 = 0,$$

et dans laquelle les coefficients μ sont entièrement arbitraires. On sait en effet que, pour une courbe de troisième classe équi-anharmonique, les points de rebroussement sont distribués sur trois droites.

C'est aussi le même cas d'exception qui s'offre si l'on suppose que l'équation (5), bien que complète, représente trois droites, c'est-à-dire si l'on suppose $8\alpha^3 + 1 = 0$. Il est bien vrai que l'équation simultanée des trois droites, mise sous la forme (5), conduit de trois manières seulement à l'équation (4). Mais l'équation des trois droites peut être mise d'une infinité de manières sous la forme (5). Les conclusions sont donc ici les mêmes que dans le cas précédent; la seconde partie du lemme est pleinement justifiée.

4. Au moyen de ce lemme, je peux maintenant prouver que *la cubique équi-anharmonique est la seule cubique qui soit tan-*

gente en neuf points à chacune des courbes de troisième classe faisant partie d'un système.

Soit (b) une cubique donnée, que je suppose être l'enveloppe de courbes (α) de troisième classe, touchant chacune (b) en neuf points. Envisageons une de ces courbes (α) et les neuf tangentes qu'elle a en commun avec (b) . Ces tangentes lui sont aussi communes avec la courbe du système qui diffère infiniment peu de (α) . Elles sont donc les pivots d'un faisceau tangentiel de courbes de troisième classe $\alpha + \mu\alpha' = 0$. La cubique (b) est tangente aux neuf pivots de ce faisceau. Son équation tangentielle est du sixième degré. Cette équation tangentielle a donc pour premier membre une forme quadratique homogène de α et α' . En désignant par β, β', β'' trois combinaisons linéaires convenables de α, α' , je peux écrire l'équation tangentielle de (b) sous la forme

$$\beta'^2 - \beta\beta'' = 0.$$

J'en conclus que la cubique (b) est l'enveloppe des courbes du système défini par l'équation

$$(7) \quad \lambda^2\beta + 2\lambda\beta' + \beta'' = 0.$$

Ces courbes, dont l'une est (α) , sont de troisième classe, et touchent chacune (b) en neuf points. Le système (7) constitue soit la totalité, soit une partie du système supposé. C'est sur ce système (7) que je vais maintenant raisonner. D'après la forme de son équation, ce système a une caractéristique égale à 2 : c'est la caractéristique ν , nombre des courbes qui sont tangentes à une droite donnée arbitrairement. Mais par un point de (b) , qui est l'enveloppe, passe une seule courbe du système, comptant deux fois. L'autre caractéristique μ , nombre des courbes qui passent par un point arbitraire, est donc aussi égale à 2. En conséquence, le système (7) constitue la coïncidence principale d'un connexe d'ordre 2 et de classe 2, connexe qui sera représenté par une équation doublement quadratique entre les coordonnées d'un point x et celle d'une droite $\xi, f(x, \xi) = 0$.

Envisageant les ξ comme des constantes, je forme l'équation tangentielle de la conique $f = 0$, et j'emploie les mêmes lettres ξ pour les coordonnées de la tangente. Je définis ainsi l'enveloppe des droites ξ qui jouissent de cette propriété : les deux points x

situés sur ξ et correspondant à ξ dans le connexe coïncident entre eux. D'après les hypothèses, la cubique (b) fait partie de cette enveloppe; mais cette enveloppe est de sixième classe comme (b) . Donc (b) est toute cette enveloppe.

De même, les points x par chacun desquels passent deux droites lui correspondant dans le connexe et coïncidant entre elles ont un lieu du sixième degré, dont l'équation s'obtient d'une manière analogue. Or (b) fait partie de ce lieu. L'autre partie est donc une autre cubique (a) , qui est nécessairement le lieu des points de rebroussement des courbes du système.

Ainsi, dans un système tel que (7), toutes les courbes de troisième classe qui le composent ont leurs points de rebroussement sur une cubique (a) . Cela est en opposition avec le lemme, sauf le seul cas où ces courbes sont équiianharmoniques, et où leurs équations sont toutes simultanément réduites à la forme

$$(8) \quad \mu_1 \xi_1^3 + \mu_2 \xi_2^3 + \mu_3 \xi_3^3 = 0.$$

Il en résulte immédiatement que la cubique (b) a nécessairement une équation de la forme

$$(9) \quad \lambda_1 x_1^3 + \lambda_2 x_2^3 + \lambda_3 x_3^3 = 0,$$

et l'on retrouve ainsi le seul cas possible, qui est celui dont l'existence a été prouvée au n° 2.

§. L'analyse précédente permet de tirer encore une autre conclusion, comme on va voir. Cette analyse découle de l'hypothèse que les neuf tangentes communes à (b) et à (a) sont les pivots d'un faisceau tangentiel $\alpha + \mu\alpha' = 0$. On voit ainsi que cette hypothèse est impossible, sauf le cas où (b) et (a) sont représentées simultanément par des équations telles que (9) et (8).

Écartant dorénavant le cas tout spécial traité dans le n° 2, je peux donc dire que, si une courbe du troisième degré et une courbe de troisième classe ont neuf contacts, les neuf tangentes communes n'appartiennent à aucune autre courbe de troisième classe.

A quoi j'ajoute le fait corrélatif : *les neuf points de contact n'appartiennent à aucune autre courbe du troisième degré.*

C'est cette dernière conséquence qui va me permettre d'achever la solution du problème; je ferai maintenant intervenir la représentation des courbes cubiques par les fonctions elliptiques.

6. J'envisage un argument u ; les coordonnées d'un point de la cubique proposée (a) sont des fonctions uniformes de u , aux périodes ϖ, ϖ' , ayant les mêmes infinis, au nombre de trois, dans le parallélogramme des périodes. J'ajoute encore la supposition habituelle que l'argument u est choisi de telle sorte qu'il soit nul pour un des points d'inflexion de (a) .

Je cherche une courbe de troisième classe (α) , tangente à (a) en neuf points. Soient $u_0, u_1, \dots$ les arguments de ces neuf points. D'après un théorème bien connu, on aura entre ces arguments la relation

$$2(u_0 + u_1 + \dots) = m\varpi + m'\varpi',$$

où m et m' seront deux nombres entiers. De là quatre cas à distinguer, savoir :

$$u_0 + u_1 + \dots \equiv 0,$$

$$u_0 + u_1 + \dots \equiv \frac{\varpi}{2},$$

$$u_0 + u_1 + \dots \equiv \frac{\varpi'}{2},$$

$$u_0 + u_1 + \dots \equiv \frac{\varpi + \varpi'}{2}.$$

Le premier de ces cas est celui où les neuf points appartiennent à une infinité de courbes du troisième degré. Il ne peut y correspondre aucune solution, comme je viens de le prouver au n° 5. Il reste donc à envisager les trois autres cas. Je vais montrer d'abord qu'à chacun de ces trois derniers correspond une solution et que ces trois solutions fournissent les trois cayleyennes. Je ferai voir ensuite qu'il n'existe aucune autre solution.

7. Soit h l'une quelconque des trois demi-périodes $\frac{\varpi}{2}, \frac{\varpi'}{2}, \frac{\varpi + \varpi'}{2}$.

Prenons les arguments $v_0, v_1, \dots, v_8$ des neuf points d'inflexion et ajoutons h à chacun d'eux. Nous formons ainsi neuf arguments

$w_0, w_1, w_2, \dots$, dont la forme générale est

$$w = \frac{m\pi}{3} + \frac{m'\pi'}{3} + h,$$

m et m' étant des nombres entiers. J'ai, d'après cette forme,

$$w_0 + w_1 + w_2 + \dots \equiv h.$$

Ainsi ces neuf arguments w donnent pour somme une demi-période, comme il doit arriver pour les arguments des neuf points de contact de (a) et de la courbe cherchée (α) . Je vais prouver qu'effectivement les arguments w déterminent neuf pareils points. Je prends les tangentes en ces neuf points, et je détermine la courbe de troisième classe (α) tangente à ces neuf droites. Il faudra montrer que (α) est tangente à (a) aux neuf points dont les arguments sont $w_0, w_1, w_2, \dots$.

J'observe d'abord que le groupe $w_0, w_1, w_2, \dots$ n'est pas altéré si l'on change w en $\pm w + \frac{m\pi}{3} + \frac{m'\pi'}{3}$, m et m' étant deux entiers quelconques. Les dix-huit substitutions correspondantes ont une expression très simple quand la cubique est représentée en coordonnées ponctuelles par l'équation canonique. Elles ont pour effet d'échanger les indices 1, 2, 3 des coordonnées x et aussi de changer x_1, x_2, x_3 en $\omega x_1, \omega^2 x_2, x_3$, ω étant une racine cubique de l'unité. Les mêmes échanges ont simultanément lieu pour les coordonnées tangentielles. De là résulte, par une analyse toute semblable à celle du n° 3, que l'équation tangentielle de la courbe (α) , déterminée par les neuf tangentes que j'ai choisies, est réduite à la forme canonique en même temps que l'équation ponctuelle de la courbe (a) .

Les courbes (a) et (α) ont en commun neuf autres tangentes, qui touchent (a) en des points dont je désigne les arguments par $w'_0, w'_1, \dots$. La somme des dix-huit arguments devant faire une période, j'ai aussi

$$(10) \quad w'_0 + w'_1 + w'_2 + \dots \equiv h.$$

En outre, l'équation de (α) est réduite à la forme canonique en même temps que celle de (a) . Donc la courbe (α) reste inaltérée par les dix-huit substitutions homographiques qui n'altèrent pas

(a). Ces substitutions conservent donc le groupe des dix-huit points $w_0, w_1, \dots, w'_0, w'_1, \dots$. Elles conservent déjà le premier groupe de neuf points; elles conservent donc aussi le second. En employant seulement les neuf substitutions qui changent w' en $w' + \frac{m\varpi}{3} + \frac{m'\varpi'}{3}$, je peux représenter les neuf arguments $w'_0, w'_1, \dots$ par l'expression générale $w'_0 + \frac{m\varpi}{3} + \frac{m'\varpi'}{3}$. En employant une des neuf autres substitutions, je trouve que w'_0 doit coïncider avec un des arguments précédents, ce qui me donne

$$w'_0 \equiv \frac{m\varpi}{6} + \frac{m'\varpi'}{6}.$$

Je peux écrire encore sous une autre forme

$$w'_0 \equiv \frac{m\varpi}{3} + \frac{m'\varpi'}{3} + h',$$

h' étant, comme h , une des demi-périodes. Il s'ensuit

$$w'_0 + w'_1 + w'_2 + \dots \equiv h'.$$

Donc, à cause de (10), h' coïncide avec h et le groupe $w'_0, w'_1, \dots$ avec le groupe $w_0, w_1, \dots$. Donc la courbe (α) est tangente à la cubique (a) en neuf points, comme il fallait le démontrer.

8. La courbe (α) ainsi trouvée est réduite à la forme canonique en même temps que (a). Elle est choisie de trois manières différentes, suivant la demi-période h que l'on a employée. On voit aussi que les trois courbes (α) obtenues de la sorte sont les seules qui soient réduites à la forme canonique en même temps que (a). Cette propriété de réduction simultanée a lieu aussi pour les trois cayleyennes. Par suite, étant connu le théorème de M. Cremona, on peut conclure que les trois courbes (α) sont les cayleyennes des trois réseaux dont (a) est la hessienne. Je vais revenir sur la démonstration directe de ce fait; mais, pour le moment, j'ajoute cette conséquence immédiate de l'analyse précédente : Les points de contact d'une cubique (a) avec les cayleyennes (α), (α'), (α'') des trois réseaux dont (a) est la hessienne sont des points sextactiques de (α), de (α'), (α'') et (α'').

Les vingt-sept points sextactiques de (a) se partagent en trois groupes de neuf points, chaque groupe se transformant en lui-même par les substitutions homographiques qui conservent cette cubique. Les points d'un même groupe sont les points de contact avec une même cayleyenne.

La seule partie de cet énoncé dont la démonstration immédiate ne soit pas contenue dans l'analyse précédente consiste dans cette propriété : les points de contact sont sextactiques sur (α) , (α') , (α'') . Mais cela résulte par dualité de la propriété qui précède, puisque (a) et (α) jouent un rôle symétrique l'une par rapport à l'autre. On retrouve ainsi cette propriété si connue que la liaison entre la hessienne et la cayleyenne d'un même réseau de coniques se conserve dans les transformations corrélatives.

9. Pour la commodité du lecteur, je place ici une démonstration directe du théorème de M. Cremona.

En prenant pour point de départ une cubique

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6\lambda x_1 x_2 x_3 = 0,$$

on a pour sa hessienne et sa cayleyenne les équations

$$(11) \quad \begin{cases} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6a x_1 x_2 x_3 = 0, \\ \xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3 + 6a \xi_1 \xi_2 \xi_3 = 0, \end{cases}$$

dans lesquelles les paramètres a , α sont ainsi déterminés :

$$6a = -\frac{2\lambda^3 + 1}{\lambda^2}, \quad 6\alpha = \frac{1 - 4\lambda^3}{\lambda}.$$

La symétrie apparaît d'ailleurs si l'on pose

$$(12) \quad 2\mu\lambda = -1.$$

On peut effectivement écrire, au lieu des précédentes, les équations

$$(13) \quad 6a = -\frac{2\lambda^3 + 1}{\lambda^2}, \quad 6\alpha = -\frac{2\mu^3 + 1}{\mu^2}.$$

Ce sont ainsi les équations (12) et (13) qui caractérisent entre les courbes (11) la liaison dont il s'agit ici.

Prenons le point dont les coordonnées sont

$$x_1 = x_2 = \lambda, \quad x_3 = 1.$$

D'après (13), ce point est sur la cubique (α) . De plus, la tangente de (α) en ce point a pour coordonnées

$$\xi_1 = \xi_2 = \mu, \quad \xi_3 = 1.$$

A cause de la symétrie des équations (13), il est manifeste que cette tangente touche aussi la courbe (α) et que le point de contact avec (α) est le même qu'avec (α) . Les courbes (α) et (α) ont donc entre elles un contact ; leurs équations étant toutes deux sous la forme canonique, je conclus que ces courbes ont entre elles neuf contacts : c'est ce qu'il fallait prouver.

10. J'arrive maintenant à la dernière partie du problème, celle qui m'a présenté le plus de difficultés. Il s'agit de reconnaître s'il existe d'autres solutions que les précédentes. Soit (β) une courbe de troisième classe, différente des trois cayleyennes, tangente à (α) en neuf points. Les arguments $u_0, u_1, \dots$ des points de contact donnent (n° 6) pour somme l'une des trois demi-périodes h . Parmi les cayleyennes, il en est une qui touche aussi (α) en neuf points dont la somme des arguments est h . Soit (α) cette cayleyenne.

Par les mêmes lettres α, β , je désigne les premiers membres des équations tangentielles de ces courbes. Ce sont deux fonctions des coordonnées ξ , toutes deux du troisième degré. J'envisage la fonction $\frac{\beta}{\alpha}$ tout le long de la cubique (α) . En d'autres termes, je considère la suite des valeurs de $\frac{\beta}{\alpha}$ pour les diverses tangentes de (α) . Au moyen de la représentation de (α) par les fonctions elliptiques, $\frac{\beta}{\alpha}$ devient une fonction doublement périodique de u ; je désigne cette fonction par $f(u)$.

La fonction $f(u)$ a ses zéros et ses infinis doubles ; les premiers correspondent aux contacts de (α) avec (β) , les seconds aux contacts de (α) avec (α) . Donc $f(u)$ est le carré d'une fonction uniforme. De plus, les zéros et les infinis, pris chacun une seule fois, ont la même somme h . Donc la racine carrée de $f(u)$ a aussi les

périodes ϖ, ϖ' comme $f(u)$, ce qui n'arriverait pas si les deux sommes n'étaient pas égales entre elles. C'est sur cette racine carrée de $f(u)$ que je vais maintenant raisonner. Je la désigne par $\varphi(u)$.

La fonction $\varphi(u)$ a neuf infinis qui nous sont connus : ce sont les arguments ω . Ses zéros ne nous sont pas connus. Mais l'origine de cette fonction nous conduit à reconnaître qu'elle doit jouir d'une propriété caractéristique : *La dérivée $\varphi'(u)$ a pour zéros les arguments ν des neuf points d'inflexion.*

Soient, pour le prouver, α_i, β_i les symboles de α et β . Pour considérer la fonction $\frac{\beta}{\alpha}$ le long de la cubique (a) , il nous faut poser, en désignant par x_1, x_2, x_3 les coordonnées d'un point de (a) , qui sont des fonctions de u , et par x'_1, x'_2, x'_3 les dérivées de ces fonctions,

$$\xi_1 = x_2 x'_3 - x_3 x'_2, \quad \xi_2 = x_3 x'_1 - x_1 x'_3, \quad \xi_3 = x_1 x'_2 - x_2 x'_1.$$

Comme on le sait, on tire de là

$$\Delta x_1 = \xi_2 \xi'_3 - \xi_3 \xi'_2, \quad \Delta x_2 = \xi_3 \xi'_1 - \xi_1 \xi'_3, \quad \Delta x_3 = \xi_1 \xi'_2 - \xi_2 \xi'_1,$$

Δ désignant le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 \end{vmatrix}.$$

J'ai maintenant

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)' = \frac{\alpha\beta' - \beta\alpha'}{\alpha^2} = \frac{3}{\alpha^2} \alpha_i^2 \beta_i^2 (\alpha\beta x) \Delta.$$

Le numérateur de cette dérivée contient donc le facteur Δ . Or, on le sait, Δ s'évanouit en chacun des points d'inflexion. Il en est donc ainsi de la dérivée de $f(u)$, et par suite aussi de $\varphi'(u)$.

Si donc la courbe (β) existe, il existe aussi une fonction uniforme $\varphi(u)$, aux périodes ϖ, ϖ' , ayant pour infinis simples les neuf arguments ω et dont la dérivée a les neuf zéros ν . L'existence d'une telle fonction peut déjà être considérée comme peu probable, eu égard aux nombres comparés des arbitraires et des conditions. Toutefois il est nécessaire de prouver effectivement la non-

existence de cette fonction : c'est ce que je vais faire. La solution géométrique du problème est ici achevée, cette dernière recherche appartenant exclusivement à la théorie des fonctions elliptiques.

11. Je ferai usage des notations employées par M. Weierstrass, en introduisant la fonction $\wp(u)$. On pose

$$\wp\left(\frac{\omega}{2}\right) = e_1, \quad \wp\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right) = e_2, \quad \wp\left(\frac{\omega'}{2}\right) = e_3.$$

La somme de ces trois constantes est nulle :

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0.$$

On pose en outre

$$g_2 = -4(e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1),$$

$$g_3 = 4e_1 e_2 e_3,$$

et l'on a de la sorte

$$(14) \quad \wp''(u) = 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3.$$

L'équation dont dépend la division des périodes par 3 se trouve aisément de diverses manières. Il est tout naturel ici de la chercher par la propriété des points d'inflexion, en observant qu'une cubique est ainsi représentée :

$$\frac{x_1}{x_3} = \wp(u), \quad \frac{x_2}{x_3} = \wp'(u).$$

De là résulte pour le déterminant Δ l'expression

$$\Delta = \wp''(u) - \wp'(u)\wp''(u).$$

De (14) on tire successivement

$$\wp'' = 6\wp^2 - \frac{1}{2}g_2,$$

$$\wp''' = 12\wp\wp'.$$

Substituant dans Δ et égalant à zéro le résultat, on a pour déterminer $\wp(v)$ l'équation du quatrième degré

$$(15) \quad F(x) = 12x^4 - 6g_2x^2 - 12g_3x - \frac{1}{4}g_2^2 = 0.$$

Les quatre racines fournissent huit valeurs de v , égales et de signes opposés deux à deux, à quoi il faut joindre la neuvième valeur $v = 0$.

On remarquera que la dérivée du polynôme $F(x)$ est

$$(16) \quad \begin{cases} F'(x) = 12(4x^3 - g_2x - g_3) \\ \quad = 48(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3) = 12\mathfrak{P}'^2, \end{cases}$$

relation dont la raison est facile à trouver et qui va tout à l'heure être utile.

Je distinguerai les arguments v par de doubles indices, en posant

$$v_{m,n} = \frac{m\varpi}{3} + \frac{n\varpi'}{3}.$$

J'ai précédemment désigné par h une des trois demi-périodes; je conserve cette notation et je désigne par e celle des trois quantités e_1, e_2, e_3 qui correspond à la même demi-période, par e', e'' les deux autres.

Les arguments w sont définis comme la somme de h et d'un quelconque des arguments v . Je les distingue par les indices correspondants en posant

$$(17) \quad w_{m,n} = v_{m,n} + h,$$

et, comme h est une demi-période, on a simultanément, pour

$$m + m' = 3, \quad n + n' = 3,$$

$$v_{m,n} \equiv -v_{m',n'}, \quad w_{m,n} \equiv -w_{m',n'}, \quad \mathfrak{P}(w_{m,n}) = \mathfrak{P}(w_{m',n'}).$$

Pour former $\mathfrak{P}(w)$ j'emploie, suivant la définition (17), la formule d'addition

$$\mathfrak{P}(v+u) = \frac{2\mathfrak{P}(v)\mathfrak{P}(u)[\mathfrak{P}(v) + \mathfrak{P}(u)] - \frac{1}{2}g_2[\mathfrak{P}(v) + \mathfrak{P}(u)] - g_3 - \mathfrak{P}'(v)\mathfrak{P}'(u)}{2[\mathfrak{P}'(u) - \mathfrak{P}'(v)]^2}.$$

Ici v sera l'un des arguments $v_{m,n}$, et $\mathfrak{P}(v)$ l'une des racines x de (15); u sera h , $\mathfrak{P}(u)$ sera e , et, suivant (14), $\mathfrak{P}'(u)$ sera nul. J'ai ainsi

$$\mathfrak{P}(w) = \frac{2e(x+e) - \frac{1}{2}g_2(x+e) - g_3}{2(x-e)^2},$$

expression qui se simplifie par suppression d'un facteur commun $(x - e)$ dans les deux termes de la fraction. J'écris donc

$$\mathfrak{Q}(w) = \frac{2ex + \frac{1}{2}g_2 + \frac{g_3}{e}}{2(x - e)},$$

puis, multipliant les deux termes par $(x - e')(x - e'')$ et tenant compte de (16), j'obtiens

$$\mathfrak{Q}(w) = 24 \frac{(x - e')(x - e'') \left(2ex + \frac{1}{2}g_2 + \frac{g_3}{e} \right)}{F'(x)}.$$

J'envisage cette même expression pour les quatre racines x de $F(x)$ et je fais la somme

$$\Sigma \mathfrak{Q}(w) = 4e.$$

Pour abréger, j'écris $p_{m,n}$ pour $\mathfrak{Q}(w_{m,n})$, en sorte que cette dernière relation devient

$$(18) \quad p_{10} + p_{01} + p_{11} + p_{12} = 4p_{00}.$$

Cette égalité (18) va me permettre de prouver la non-existence de la fonction $\varphi(u)$, à laquelle je reviens maintenant.

12. Désignons par $\zeta(u)$ la fonction qui sert d'élément simple et dont la dérivée est $-\mathfrak{Q}(u)$. D'après sa définition, la fonction $\varphi(u)$ a la forme

$$\varphi(u) = C + \Sigma B_{m,n} \zeta(u - w_{m,n}),$$

où la somme des coefficients B doit être nulle. J'en déduis

$$-\varphi'(u) = \Sigma B_{m,n} \mathfrak{Q}(u - w_{m,n}).$$

Faisant ici $u = v_{k,l}$, je dois, suivant les conditions imposées à $\varphi(u)$, avoir zéro pour résultat. J'obtiens ainsi neuf équations qui comprennent celle-ci, $\Sigma B = 0$. C'est donc en tout neuf équations homogènes entre neuf inconnues, et il me faut prouver qu'effectivement ces équations ne peuvent être satisfaites autrement qu'en faisant nulles les neuf inconnues.

Je désigne par (k, l) l'équation obtenue en égalant à zéro $\varphi'(v_{k,l})$. L'argument $w_{m,n} = v_{k,l}$ coïncide avec $w_{m-k, n-l}$. L'équation (k, l)

est donc

$$(k, l) \quad 0 = \sum B_{m,n} p_{m-k, n-l}.$$

Posons pour un instant

$$\begin{aligned} z_1 &= p_{00} + p_{01} + p_{02}, & y_1 &= B_{00} + B_{01} + B_{02}, \\ z_2 &= p_{10} + p_{11} + p_{12}, & y_2 &= B_{10} + B_{11} + B_{12}, \\ z_3 &= p_{20} + p_{21} + p_{22}, & y_3 &= B_{20} + B_{21} + B_{22}. \end{aligned}$$

Ajoutons membre à membre les équations (00), (01), (02); ajoutons de même (20), (21), (22), et aussi (10), (11), (12). Nous avons ainsi le système

$$\begin{aligned} z_1 y_1 + z_2 y_2 + z_3 y_3 &= 0, \\ z_2 y_1 + z_3 y_2 + z_1 y_3 &= 0, \\ z_3 y_1 + z_1 y_2 + z_2 y_3 &= 0, \end{aligned}$$

à quoi nous pouvons joindre

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0.$$

Comme on le voit sans peine, ce système n'admet que la solution $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, sauf si l'on a, en prenant pour ω une racine cubique *imaginaire* de l'unité :

$$(19) \quad z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = 0.$$

D'ailleurs ici $z_2 = z_3$, et cette relation (19) devient

$$p_{00} + 2p_{01} - p_{10} - p_{11} - p_{12} = 0,$$

qui ne peut avoir lieu. Effectivement, à cause de (18), elle se réduit à $p_{00} = p_{01}$, ce qui est certainement inexact. J'ai donc zéro pour chacun des y . Ainsi

$$(20) \quad \begin{cases} B_{00} + B_{01} + B_{02} = 0, \\ B_{10} + B_{11} + B_{12} = 0, \\ B_{20} + B_{21} + B_{22} = 0. \end{cases}$$

Il y a d'autres conséquences analogues; on les obtiendra par des combinaisons qu'il n'est pas nécessaire de rechercher. Il suffit d'échanger les périodes ϖ, ϖ' , puis de changer le système de périodes ϖ, ϖ' en ces deux équivalents $(\varpi, \varpi + \varpi')$, $(\varpi, 2\varpi + \varpi')$.

Tous les autres changements conduisent aux mêmes équations :

$$(21) \quad \begin{cases} B_{00} + B_{10} + B_{20} = 0, \\ B_{01} + B_{11} + B_{21} = 0, \\ B_{02} + B_{12} + B_{22} = 0, \end{cases}$$

$$(22) \quad \begin{cases} B_{00} + B_{11} + B_{22} = 0, \\ B_{10} + B_{21} + B_{02} = 0, \\ B_{20} + B_{01} + B_{12} = 0, \end{cases}$$

$$(23) \quad \begin{cases} B_{00} + B_{21} + B_{12} = 0, \\ B_{10} + B_{01} + B_{22} = 0, \\ B_{20} + B_{11} + B_{02} = 0. \end{cases}$$

Ces douze équations se réduisent à neuf en tout, entièrement équivalentes aux neuf équations (k, l) .

Des deux dernières (20) et de la première (22) je déduis

$$B_{10} + B_{20} + B_{12} + B_{21} - B_{00} = 0,$$

et, à cause de la première (21),

$$B_{12} + B_{21} - 2B_{00} = 0.$$

Eu égard à la première équation (23), j'ai ainsi

$$B_{00} = 0, \quad B_{12} + B_{21} = 0.$$

Semblablement,

$$B_{11} + B_{22} = 0, \quad B_{10} + B_{20} = 0, \quad B_{01} + B_{02} = 0.$$

L'élimination, devenue très facile, conduit ainsi à trouver nulles toutes les inconnues B .

Donc la fonction $\varphi(u)$ n'existe pas : c'est ce qu'il fallait définitivement prouver.

Sur les conditions de convergence de certaines séries multiples ;

par M. CAMILLE JORDAN.

(Séance du 17 juin 1881.)

Eisenstein a établi (*Journal de Crelle*, t. 35) que la série

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2)^\mu},$$

où $v_1, \dots, v_n$ sont des fonctions linéaires des variables entières $x_1, \dots, x_n$ par rapport auxquelles on fait la sommation, est convergente ou divergente suivant qu'on a

$$2\mu > n \quad \text{ou} \quad 2\mu \leq n$$

(pourvu que le déterminant des fonctions v ne soit pas nul).

La démonstration de cet illustre auteur peut être simplifiée et généralisée comme il suit :

Considérons d'abord la série

$$S = \sum \sum \cdots \frac{1}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^\mu},$$

où $x_1, \dots, x_n$ prennent tous les systèmes de valeurs possibles, le système 0, 0, ... excepté.

Soit γ un entier quelconque. Le nombre des systèmes de valeurs de $x_1, \dots, x_n$ non supérieures à γ en valeur absolue est évidemment $(2\gamma + 1)^n - 1$. Celui des systèmes de valeurs où l'une au moins des variables est égale à γ , les autres ne surpassant pas γ , sera

$$(2\gamma + 1)^n - 1 - [(2\gamma - 1)^n - 1] = n \cdot 2^{n-1} \gamma^{n-1} + \dots$$

Chacun des termes de la série S correspondants à ces systèmes de valeurs étant évidemment compris entre $\frac{1}{\gamma^{2\mu}}$ et $\frac{1}{(n\gamma^2)^\mu}$, leur somme sera comprise entre

$$\frac{n \cdot 2^{n-1} \gamma^{n-1} + \dots}{\gamma^{2\mu}} \quad \text{et} \quad \frac{n \cdot 2^{n-1} \gamma^{n-1} + \dots}{n^\mu \gamma^{2\mu}}.$$

La série S sera donc comprise entre T et $\frac{1}{n^k} T$, T désignant la somme

$$\sum_{y=1}^{y=\infty} \frac{n \cdot 2^{n-1} y^{n-1} + \dots}{y^{2k}}.$$

Or, pour que T soit convergent, il faut et il suffit, comme on sait, qu'on ait

$$2k > n.$$

Soit maintenant F une fonction homogène et de degré k des variables $x_1, \dots, x_n$, laquelle reste finie et positive pour tous les systèmes de valeurs réelles de ces variables; soit Φ une autre fonction de ces variables, de degré inférieur à $2k$. La série

$$U = \sum \sum \dots \frac{1}{F^s + \Phi}$$

sera convergente ou divergente (abstraction faite des termes qui deviendraient infinis) suivant qu'on aura

$$(1) \quad 2k > n \quad \text{ou} \quad 2k \leq n.$$

Soient, en effet, M et m le maximum et le minimum de F pour tous les systèmes de valeurs réelles des variables qui satisfont à la relation

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1.$$

La fonction $\frac{F^s}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{s}{2}}}$, ne dépendant que des rapports des variables, restera constamment comprise entre M^s et m^s . D'autre part, pour des valeurs suffisamment grandes des variables, la fonction $\frac{\Phi}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{s}{2}}}$ tendra vers zéro, car elle est inférieure à

$\frac{\Phi}{x_p^{2k}}$, x_p désignant la plus grande des variables; or il est clair que cette dernière quantité tend vers zéro, son dénominateur étant d'un degré plus élevé que son numérateur.

Donc, pour des valeurs suffisamment grandes des variables, le

rapport des termes de la série U à ceux de la série

$$V = \sum \sum \dots \frac{1}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{\alpha k}{2}}}$$

sera compris entre les deux quantités positives $\frac{1}{M^{\alpha} + \varepsilon}$ et $\frac{1}{m^{\alpha} + \varepsilon}$, ε étant aussi petit que l'on voudra. Donc, pour que U soit convergente, il faut et il suffit que V le soit, ce qui donne la condition (1).

Étude sur les courbes gauches unicursales;
par M. GENTY.

(Séance du 1^{er} juillet 1881.)

1. — *Considérations générales.*

1. Soient f_1, f_2, f_3, f_4 quatre fonctions d'une variable arbitraire t ; les équations

$$x : y : z : w = f_1 : f_2 : f_3 : f_4,$$

ou, sous une forme plus simple,

$$f_1 : f_2 : f_3 : f_4$$

représentent une courbe C, lieu des points m qu'on obtient en donnant successivement à la variable t toutes les valeurs possibles.

Lorsque les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 seront des fonctions algébriques et entières de degré m par rapport à la variable t , je dirai que la courbe C est une courbe *unicursale* ou *rationnelle* d'ordre m .

2. Soient de même F_1, F_2, F_3, F_4 quatre fonctions de deux variables arbitraires indépendantes t et u , les équations

$$x : y : z : w = F_1 : F_2 : F_3 : F_4,$$

ou simplement

$$F_1 : F_2 : F_3 : F_4.$$

représentent une surface S , lieu des courbes en nombre infini qu'on peut obtenir en établissant une relation quelconque entre les variables t et u .

3. Les équations

$$x : y : z = f_1 : f_2 : f_3,$$

dans lesquelles il n'entre qu'une seule variable arbitraire, représentent, soit le cône qui a son sommet au point ω et qui contient la courbe gauche C , soit la perspective de cette courbe sur le plan $\omega = 0$, l'œil étant placé au sommet ω du tétraèdre de référence.

4. Les points d'intersection de la courbe C avec le plan

$$lx + my + nz + p\omega = 0$$

sont donnés par l'équation

$$(1) \quad lf_1 + mf_2 + nf_3 + pf_4 = 0.$$

Dans le cas des courbes rationnelles d'ordre m , cette équation est algébrique et d'ordre m . Donc un plan coupe une courbe unicursale d'ordre m en m points.

5. Lorsque l'équation (1) du paragraphe précédent est identique, la courbe C est située tout entière dans le plan donné.

Réciproquement, pour que la courbe C soit plane, il faut qu'on puisse trouver un plan

$$lx + my + nz + p\omega = 0$$

qui la contienne tout entière, et tel, par suite, que l'équation

$$lf_1 + mf_2 + nf_3 + pf_4 = 0$$

soit satisfaite identiquement. On obtient ainsi, dans le cas d'une courbe rationnelle, $m + 1$ équations entre lesquelles il restera à éliminer l, m, n et p , ce qui donnera en tout $m - 2$ conditions.

Pour $m = 2$, il n'y a aucune condition à remplir, et, par suite, toute courbe unicursale du second ordre est une courbe plane.

Soient, en effet,

$$a_1 t^2 + b_1 t + c_1 : a_2 t^2 + b_2 t + c_2 : a_3 t^2 + b_3 t + c_3 : a_4 t^2 + b_4 t + c_4$$

les équations générales d'une conique; on reconnaît immédiatement que cette courbe est située dans le plan qui a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour $m = 3$, les équations de la courbe sont

$$a_1 t^3 + b_1 t^2 + c_1 t + d_1 : a_2 t^3 + b_2 t^2 + c_2 t + d_2 : \dots,$$

et l'on voit immédiatement que la condition à remplir pour qu'elle soit plane est

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = 0.$$

6. On obtient de même les conditions qui doivent être remplies pour que la courbe C puisse être placée tout entière sur une quadrique. Il suffit, en effet, de considérer l'équation d'une quadrique quelconque, d'y remplacer les coordonnées courantes x, y, z et w par f_1, f_2, f_3 et f_4 respectivement, et d'exprimer que l'équation en t ainsi obtenue est identique. On obtiendra un certain nombre de conditions entre lesquelles on éliminera les dix coefficients inconnus qui entrent dans l'équation de la quadrique.

Pour $m = 2$, on n'a que cinq équations qui ne suffisent pas pour déterminer ces dix coefficients; donc, on peut placer une conique sur une infinité de quadriques.

Pour $m = 3$, on n'a que sept équations; on peut donc faire passer une infinité de quadriques par une cubique gauche.

Pour $m = 4$, on a neuf équations, qui déterminent complètement une quadrique contenant la courbe. Ainsi, en général, on ne peut faire passer qu'une seule quadrique par une quartique gauche rationnelle.

En général, en éliminant les dix coefficients inconnus entre les $2m + 1$ équations de condition, on obtient $2m - 8$ relations pour exprimer que la courbe C peut être placée sur une quadrique.

7. Un cône ayant son sommet en un point quelconque p et passant par une courbe unicursale d'ordre m a $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ arêtes doubles;

Ou bien,

La perspective d'une courbe unicursale d'ordre m , l'œil étant placé en un point quelconque, est une courbe plane unicursale.

Le cône qui passe par la courbe et dont le sommet est au point w , supposé quelconque, a évidemment pour équations

$$(3) \quad x:y:z = f_1:f_2:f_3.$$

Pour que ce cône ait une arête double, il faut qu'on puisse trouver deux valeurs t et τ de la variable satisfaisant aux équations

$$(1) \quad \frac{f_1(t)}{f_1(\tau)} = \frac{f_2(t)}{f_2(\tau)} = \frac{f_3(t)}{f_3(\tau)}.$$

Il reste à faire voir que, dans le cas où f_1, f_2 et f_3 sont des fonctions entières de degré m , le système des équations (1) a $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$

solutions distinctes. Voici une démonstration assez simple de ce théorème bien connu.

Les équations (1) peuvent se mettre sous la forme

$$(2) \quad \begin{cases} f_2(t)f_3(\tau) - f_2(\tau)f_3(t) = 0, \\ f_3(t)f_1(\tau) - f_3(\tau)f_1(t) = 0, \\ f_1(t)f_2(\tau) - f_1(\tau)f_2(t) = 0. \end{cases}$$

Ces trois équations, si l'on y considère t et τ comme des coordonnées cartésiennes, représentent des courbes dont les points communs auront pour coordonnées les valeurs cherchées de t et τ . Les premiers membres de ces équations débarrassées du facteur $t - \tau$ sont d'ordre $m-1$ en t et τ , et, comme ils sont symétriques par rapport à ces deux variables, ils sont de la forme

$$At^{m-1}\tau^{m-1} + \dots,$$

le degré des termes négligés étant inférieur à celui du premier.

Les courbes représentées par les deux premières équations (2) ont donc $4(m-1)^2$ points communs. Mais elles ont toutes deux à

l'infini, sur chacun des axes, un point multiple d'ordre $m - 1$, et ces points comptent pour $2(m - 1)^2$ points d'intersection qui ne conviennent pas à la question.

D'un autre côté, ces mêmes courbes ont, parmi leurs points communs, tous ceux qui ont pour coordonnées deux racines quelconques différentes de l'équation

$$f_3(t) = 0,$$

et ces points, dont le nombre est égal à $n(n - 1)$, ne sont pas situés sur la troisième courbe. Donc, enfin, le nombre des points communs aux trois courbes qui conviennent à la question est égal à

$$4(n - 1)^2 - 2(n - 1)^2 - n(n - 1) = (n - 1)(n - 2).$$

D'ailleurs, à un point d'intersection ayant pour abscisse λ et pour ordonnée μ , en correspond un autre ayant pour abscisse μ et pour ordonnée λ , et ces deux points fournissent évidemment le même point double. Donc le nombre des points doubles apparents de la courbe gauche est égal à $\frac{(m - 1)(m - 2)}{2}$.

II. — Du nombre des conditions nécessaires pour déterminer une courbe unicursale d'ordre m .

8. Les équations générales d'une courbe gauche unicursale étant mises sous la forme

$$(1) \quad f_1 : f_2 : f_3 : f_4,$$

on voit immédiatement qu'elles renferment $4(m + 1)$ coefficients. Mais la variable indépendante t peut évidemment être remplacée par une autre τ , liée avec elle par une équation de la forme

$$a\tau + bt + c\tau + d = 0,$$

et l'on peut disposer des coefficients a , b , c et d de manière à donner à quatre des coefficients de la courbe des valeurs choisies à volonté. En d'autres termes, il n'existe dans les équations (1) que $4(m + 1) - 4 = 4m$ coefficients véritablement arbitraires; ce

qui montre qu'il faut $4m$ conditions pour déterminer une courbe gauche rationnelle d'ordre m .

9. On peut encore arriver à ce résultat de la manière suivante.

Remarquons d'abord qu'un point donné d'une courbe gauche équivaut à deux conditions. En effet, si le point (x_1, y_1, z_1, w_1) est situé sur la courbe, on pourra trouver une valeur de t satisfaisant aux relations

$$x_1 : y_1 : z_1 : w_1 = f_1 : f_2 : f_3 : f_4.$$

En éliminant t entre ces trois équations, on obtient deux relations entre les coefficients des équations de la courbe.

Ou encore, si le point donné est le sommet w du tétraèdre de référence, les équations de la courbe peuvent se mettre sous la forme

$$(1) \quad \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 : \frac{f_4}{t - \alpha},$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ étant des fonctions d'ordre $m - 1$ seulement, et l'on voit qu'elles renferment deux coefficients de moins que les équations générales.

Si α est donné, les équations ci-dessus renferment trois coefficients de moins que les équations générales. Ainsi un point donné pour une valeur donnée de la variable équivaut à trois conditions.

Ceci posé, étant donnés trois points d'une courbe, on peut faire en sorte que ces trois points correspondent à des valeurs données d'une variable indépendante convenablement choisie. Soient, en effet, t_1, t_2, t_3 les valeurs de la variable actuelle qui correspondent aux points donnés; τ la nouvelle variable à introduire; τ_1, τ_2, τ_3 les valeurs données de cette variable qui doivent correspondre aux points donnés. On établira entre t et τ une relation de la forme

$$at\tau + bt + c\tau + d = 0,$$

et l'on déterminera les coefficients a, b, c et d , à l'aide des relations

$$at_1\tau_1 + bt_1 + c\tau_1 + d = 0,$$

$$at_2\tau_2 + bt_2 + c\tau_2 + d = 0,$$

$$at_3\tau_3 + bt_3 + c\tau_3 + d = 0.$$

En éliminant a, b, c et d entre les quatre équations qui précèdent, on obtient la relation qui lie t et τ sous la forme

$$\begin{vmatrix} t\tau & t & \tau & 1 \\ t_1\tau_1 & t_1 & \tau_1 & 1 \\ t_2\tau_2 & t_2 & \tau_2 & 1 \\ t_3\tau_3 & t_3 & \tau_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

D'après cela, on peut considérer trois points donnés d'une courbe comme équivalant à neuf conditions. Comme, d'ailleurs, l'un des coefficients peut toujours être supposé égal à 1, il manque encore

$$4m + 3 - 9 = 4m - 6$$

conditions pour déterminer la courbe, soit $2m - 3$ points, qui avec les trois points donnés font en tout $2m$ points.

10. Le problème qui consiste à trouver les équations d'une courbe gauche, connaissant $4m$ conditions auxquelles cette courbe doit satisfaire, peut être impossible ou indéterminé. Il sera impossible toutes les fois que les conditions données sont incompatibles avec l'existence même de la courbe en question ou d'une courbe plane du même ordre. Le problème sera au contraire indéterminé quand les conditions données, incompatibles avec l'existence d'une courbe gauche, sont au contraire compatibles avec l'existence d'une courbe plane du même ordre. Un exemple suffira pour éclaircir la remarque qui précède.

Une cubique gauche est déterminée par six points; mais, si quatre des points donnés sont dans un même plan, le problème est impossible, puisqu'un plan ne peut pas rencontrer une cubique gauche en plus de trois points. Mais si les six points donnés sont dans un même plan, il y aura une infinité de cubiques planes satisfaisant à la question, puisqu'il faut huit points pour déterminer une cubique plane unicursale, et le problème sera indéterminé.

11. Comme application, cherchons les équations d'une cubique gauche déterminée par six points, savoir les quatre sommets du tétraèdre de référence, et les points (x_1, y_1, z_1, w_1) et (x_2, y_2, z_2, w_2) .

Les équations générales d'une cubique gauche circonscrite au tétraèdre de référence sont évidemment

$$\frac{a_1}{t-\alpha} : \frac{a_2}{t-\beta} : \frac{a_3}{t-\gamma} : \frac{a_4}{t-\delta}.$$

Nous supposerons, ce qui est permis (9), que les deux autres points doivent correspondre aux valeurs $t = \infty$ et $t = 0$ de la variable, et nous aurons

$$x_1 : y_1 : z_1 : w_1 = a_1 : a_2 : a_3 : a_4$$

$$x_2 : y_2 : z_2 : w_2 = \frac{a_1}{\alpha} : \frac{a_2}{\beta} : \frac{a_3}{\gamma} : \frac{a_4}{\delta},$$

d'où

$$a_1 = x_1, \quad a_2 = y_1, \quad a_3 = z_1, \quad a_4 = w_1;$$

$$\alpha = \frac{x_1}{x_2}, \quad \beta = \frac{y_1}{y_2}, \quad \gamma = \frac{z_1}{z_2}, \quad \delta = \frac{w_1}{w_2}.$$

De sorte que les équations de la cubique sont

$$\frac{x_1 x_2}{t x_2 - x_1} : \frac{y_1 y_2}{t y_2 - y_1} : \frac{z_1 z_2}{t z_2 - z_1} : \frac{w_1 w_2}{t w_2 - w_1}.$$

12. Cherchons encore les équations générales des quartiques qui passent par sept points donnés, savoir les quatre sommets du tétraèdre de référence et les points (x_1, y_1, z_1, w_1) , (x_2, y_2, z_2, w_2) et (x_3, y_3, z_3, w_3) .

Une quartique circonscrite au tétraèdre de référence et passant au point (x_1, y_1, z_1, w_1) pour $t = \infty$ a pour équations

$$\frac{x_1(t-\alpha_1)}{t-\alpha} : \frac{y_1(t-\beta_1)}{t-\beta} : \frac{z_1(t-\gamma_1)}{t-\gamma} : \frac{w_1(t-\delta_1)}{t-\delta}.$$

Si cette courbe doit passer au point (x_2, y_2, z_2, w_2) pour $t = 0$, on aura

$$\frac{x_1 \alpha_1}{x_2 \alpha} = \frac{y_1 \beta_1}{y_2 \beta} = \frac{z_1 \gamma_1}{z_2 \gamma} = \frac{w_1 \delta_1}{w_2 \delta} = \lambda,$$

λ étant une indéterminée, et l'on aura, pour les équations de la courbe,

$$\frac{x_1 t - \lambda \alpha x_2}{t-\alpha} : \frac{y_1 t - \lambda \beta y_2}{t-\beta} : \frac{z_1 t - \lambda \gamma z_2}{t-\gamma} : \frac{w_1 t - \lambda \delta w_2}{t-\delta}.$$

Si enfin la courbe doit passer au point (x_3, y_3, z_3, w_3) pour $t = 1$, on aura

$$\frac{\frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \alpha}}{x_3} = \frac{\frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \beta}}{y_3} = \frac{\frac{z_1 - \lambda z_2}{1 - \gamma}}{z_3} = \frac{\frac{w_1 - \lambda w_2}{1 - \delta}}{w_3} = \mu,$$

μ étant une nouvelle indéterminée. Des équations précédentes, on tire

$$\alpha = \frac{\mu x_3 - x_1}{\mu x_3 - \lambda x_2}, \quad \beta = \frac{\mu y_3 - y_1}{\mu y_3 - \lambda y_2}, \quad \gamma = \frac{\mu z_3 - z_1}{\mu z_3 - \lambda z_2}, \quad \delta = \frac{\mu w_3 - w_1}{\mu w_3 - \lambda w_2},$$

et les équations de la courbe deviennent

$$\begin{aligned} & \frac{t x_1 (\mu x_3 - \lambda x_2) - \lambda x_2 (\mu x_3 - x_1)}{t (\mu x_3 - \lambda x_2) - (\mu x_3 - x_1)} \\ & : \frac{t y_1 (\mu y_3 - \lambda y_2) - \lambda y_2 (\mu y_3 - y_1)}{t (\mu y_3 - \lambda y_2) - (\mu y_3 - y_1)} \\ & : \frac{t z_1 (\mu z_3 - \lambda z_2) - \lambda z_2 (\mu z_3 - z_1)}{t (\mu z_3 - \lambda z_2) - (\mu z_3 - z_1)} \\ & : \frac{t w_1 (\mu w_3 - \lambda w_2) - \lambda w_2 (\mu w_3 - w_1)}{t (\mu w_3 - \lambda w_2) - (\mu w_3 - w_1)}; \end{aligned}$$

elles ne renferment plus que deux coefficients inconnus : donc un point de plus suffira pour déterminer la courbe ; on reconnaît d'ailleurs sans peine qu'il passe huit quartiques gauches unicursales par huit points donnés.

13. Une courbe gauche rationnelle d'ordre n n'a point, en général, de point double, ni à plus forte raison de point multiple d'un ordre de multiplicité supérieur à 2. En effet, il faut qu'on puisse trouver deux valeurs t et τ de la variable telles qu'on ait

$$(1) \quad \frac{f_1(t)}{f_1(\tau)} = \frac{f_2(t)}{f_2(\tau)} = \frac{f_3(t)}{f_3(\tau)} = \frac{f_4(t)}{f_4(\tau)}.$$

Or ces relations fournissent trois équations distinctes entre t et τ , qui n'ont en général aucune solution.

Si on élimine t et τ entre ces équations, on obtient la condition à laquelle doivent satisfaire les coefficients des équations de la courbe pour qu'elle ait un point double. On voit donc que la con-

dition d'existence d'un point double est une condition simple.

Réciproquement, si cette condition est remplie, on pourra tirer des équations qui précèdent le système des valeurs t et τ de la variable qui correspondent au point double. Si ces valeurs sont réelles et inégales, le point correspondant est un véritable point double, c'est-à-dire un point de croisement de deux branches réelles de la courbe. Si ces valeurs sont imaginaires, on a un point isolé. Si enfin $t = \tau$, le point correspondant est un point stationnaire ou de rebroussement. On voit, par suite, que deux conditions doivent être remplies pour que la courbe ait un point de rebroussement.

On obtient les conditions pour que la courbe ait deux points doubles en écrivant que les équations (1) ont deux systèmes de solutions communes, et ainsi de suite.

14. De même, pour que la courbe ait un point triple, il faut qu'on puisse trouver un système de trois valeurs t , τ et θ de la variable satisfaisant aux équations

$$\begin{aligned} f_1(t) : f_2(t) : f_3(t) : f_4(t) &= f_1(\tau) : f_2(\tau) : f_3(\tau) : f_4(\tau) \\ &= f_1(\theta) : f_2(\theta) : f_3(\theta) : f_4(\theta). \end{aligned}$$

Or ces relations fournissent six équations entre lesquelles on pourra éliminer t , τ et θ ; on obtiendra ainsi trois conditions auxquelles la courbe doit satisfaire.

En continuant ainsi, on voit sans peine que la condition d'existence d'un point multiple d'ordre n équivaut à

$$3(n-1) - n = 2n - 3$$

conditions simples.

15. Un point double donné d'une courbe gauche équivaut à quatre conditions ou à deux points simples. En effet, si le point double donné est le point w , les équations de la courbe pouvant se mettre sous la forme

$$\varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 : \frac{f_4}{(t-\alpha)(t-\beta)},$$

φ_1 , φ_2 , φ_3 étant des fonctions d'ordre $m-2$, et α et β pouvant

être des quantités réelles ou imaginaires; et l'on voit que ces équations renferment quatre coefficients de moins que les équations générales.

Un point triple équivaut de même à six conditions; et en général, un point multiple d'ordre n donné équivaut à $2n$ conditions, c'est-à-dire à n points simples.

16. Si le point w est un point de rebroussement, les équations de la courbe pourront se mettre sous la forme

$$\varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 : \frac{f_4}{(t-x)^2},$$

et l'on reconnaît sans peine qu'elles renferment cinq coefficients de moins que les équations générales; un point de rebroussement équivaut donc à cinq conditions.

17. Il est clair que si, dans les conditions qui doivent déterminer une courbe gauche rationnelle, on fait entrer l'existence d'un ou de plusieurs points multiples, on en pourra arriver à des cas d'impossibilité ou d'indétermination. On sait, par exemple, qu'une courbe gauche d'ordre m ne peut pas avoir un point multiple d'ordre $m-1$, puisqu'un plan mené par ce point et deux autres points de la courbe la couperait en $m+1$ points, ce qui est impossible.

Si donc, pour déterminer une courbe gauche d'ordre m , on donne un point multiple d'ordre $m-1$, le problème sera en général impossible. Mais si les conditions données conviennent à une courbe plane d'ordre m (qui peut avoir un point multiple d'ordre $m-1$), le problème deviendra, en général, indéterminé.

18. Comme nouvel exemple de détermination d'une courbe gauche, nous allons chercher les équations générales d'une quartique gauche ayant un point de rebroussement au point x , passant aux trois autres sommets du tétraèdre de référence, et en deux autres points donnés (x_1, y_1, z_1, w_1) , (x_2, y_2, z_2, w_2) .

Les équations de la courbe sont de la forme

$$\frac{a_1 t + b_1}{(t-x)^2} : \frac{a_2}{t-\beta} : \frac{a_3}{t-\gamma} : \frac{a_4}{t-\delta}.$$

Si nous supposons que les deux points donnés doivent correspondre aux valeurs $t = \infty$ et $t = 0$ de la variable, nous aurons

$$\begin{aligned} x_1 : y_1 : z_1 : w_1 &= a_1 : a_2 : a_3 : a_4, \\ x_2 : y_2 : z_2 : w_2 &= \frac{b_1}{x^2} = -\frac{y_1}{\beta} = -\frac{z_1}{\gamma} = -\frac{w_1}{\delta}; \end{aligned}$$

et l'on pourra prendre

$$\begin{aligned} a_1 &= x_1, & a_2 &= y_1, & a_3 &= z_1, & a_4 &= w_1, \\ b_1 &= x^2 x_2, & \beta &= -\frac{y_1}{y_2}, & \gamma &= -\frac{z_1}{z_2}, & \delta &= -\frac{w_1}{w_2}. \end{aligned}$$

Les équations de la courbe deviennent alors

$$\frac{x_1 t + x^2 x_2}{(t - x)^2} : \frac{y_1}{t + \frac{y_1}{y_2}} : \frac{z_1}{t + \frac{z_1}{z_2}} : \frac{w_1}{t + \frac{w_1}{w_2}};$$

on voit qu'elles ne renferment plus qu'un seul coefficient indéterminé x .

La forme même de ces équations montre que toutes les quartiques qu'elles représentent sont situées sur un même cône quadrique

$$y : z : w = \frac{y_1}{t + \frac{y_1}{y_2}} : \frac{z_1}{t + \frac{z_1}{z_2}} : \frac{w_1}{t + \frac{w_1}{w_2}},$$

ayant son sommet au point stationnaire.

19. La condition de rencontrer une droite donnée est une condition simple, car si la droite donnée est l'arête xy du tétraèdre de référence, les équations de la courbe sont de la forme

$$f_1 : f_2 : (t - x) \varphi_1 : (t - x) \varphi_2,$$

et l'on voit qu'elles contiennent un coefficient de moins que les équations générales. Par exemple, les équations d'une cubique gauche rencontrant les six arêtes du tétraèdre de référence sont

$$\begin{aligned} a_1(t - x)(t - \beta)(t - \gamma) : a_2(t - x)(t - \delta)(t - \varepsilon) \\ : a_3(t - \beta)(t - \delta)(t - \tau) : a_4(t - \gamma)(t - \varepsilon)(t - \tau). \end{aligned}$$

et elles ne renferment plus que six coefficients réellement indéterminés.

La condition de toucher un plan est de même une condition simple; car si le plan donné est la face $x = 0$ du tétraèdre de référence, les équations de la courbe seront de la forme

$$(t - \alpha)^2 \varphi_1 : f_2 : f_3 : f_4,$$

et elles ne renferment que $4m + 3$ coefficients.

Ainsi les équations d'une conique tangente aux quatre faces du tétraèdre de référence sont

$$a_1(t - \alpha)^2 : a_2(t - \beta)^2 : a_3(t - \gamma)^2 : a_4(t - \delta)^2.$$

Les points de contact ont pour coordonnées

$$\begin{array}{cccc} 0 & a_2(\alpha - \beta)^2, & a_3(\alpha - \gamma)^2, & a_4(\alpha - \delta)^2, \\ a_1(\beta - \alpha)^2, & 0, & a_3(\beta - \gamma)^2, & a_4(\beta - \delta)^2, \\ a_1(\gamma - \alpha)^2, & a_2(\gamma - \beta)^2, & 0, & a_4(\gamma - \delta)^2, \\ a_1(\delta - \alpha)^2, & a_2(\delta - \beta)^2, & a_3(\delta - \gamma)^2, & 0, \end{array}$$

et l'on vérifie sans peine que ces quatre points sont situés dans un même plan.

Si l'on donne en outre deux points de la conique, elle sera complètement déterminée. Soient, en effet,

$$(x_1, y_1, z_1, w_1), \quad (x_2, y_2, z_2, w_2)$$

les deux points donnés, et supposons qu'ils doivent correspondre aux valeurs $t = \infty$ et $t = 0$ de la variable. Nous aurons

$$\begin{aligned} x_1 : y_1 : z_1 : w_1 &= a_1 : a_2 : a_3 : a_4, \\ x_2 : y_2 : z_2 : w_2 &= a_1 \alpha^2 : a_2 \beta^2 : a_3 \gamma^2 : a_4 \delta^2, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} a_1 &= x_1, \quad a_2 = y_1, \quad a_3 = z_1, \quad a_4 = w_1, \\ \alpha &= \pm \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}, \quad \beta = \pm \sqrt{\frac{y_2}{y_1}}, \quad \gamma = \pm \sqrt{\frac{z_2}{z_1}}, \quad \delta = \pm \sqrt{\frac{w_2}{w_1}}, \end{aligned}$$

et les équations de la conique sont

$$x_1 \left(t \mp \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} \right)^2 : y_1 \left(t \mp \sqrt{\frac{y_2}{y_1}} \right)^2 : z_1 \left(t \mp \sqrt{\frac{z_2}{z_1}} \right)^2 : w_1 \left(t \mp \sqrt{\frac{w_2}{w_1}} \right)^2.$$

Ces équations ne représentent en réalité que huit coniques distinctes, car deux systèmes d'équations dans lesquels les radicaux correspondants ont des signes contraires représentent évidemment la même courbe.

Les plans de ces huit coniques ont pour équation générale

$$\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & w_2 \\ \sqrt{x_1 x_2} & \pm \sqrt{y_1 y_2} & \pm \sqrt{z_1 z_2} & \pm \sqrt{w_1 w_2} \end{vmatrix} = 0.$$

Ces plans ont entre eux des relations de position très intéressantes, mais que nous ne pouvons étudier ici sans nous écarter un peu trop de notre sujet.

20. Cherchons encore les équations d'une conique qui rencontre les quatre côtés d'un quadrilatère gauche et qui passe par deux points donnés. Si les côtés du quadrilatère donné sont quatre arêtes du tétraèdre de référence, et si l'un des points donnés (x_1, y_1, z_1, w_1) correspond à la valeur $t = \infty$ de la variable, les équations de la conique seront de la forme

$$x_1(t - \alpha)(t - \beta) : y_1(t - \beta)(t - \gamma) : z_1(t - \gamma)(t - \delta) : w_1(t - \delta)(t - \alpha).$$

Supposons maintenant que le second point doive correspondre à la valeur 0 de la variable, on aura

$$x_1 \alpha \beta = x_2,$$

$$y_1 \beta \gamma = y_2,$$

$$z_1 \gamma \delta = z_2,$$

$$w_1 \delta \alpha = w_2;$$

et ces équations montrent immédiatement que les deux points donnés ne peuvent pas être quelconques; elles donnent en effet

$$(1) \quad \frac{x_2 z_2}{x_1 z_1} = \frac{y_2 w_2}{y_1 w_1};$$

ce qui montre que, le point (x_1, y_1, z_1, w_1) étant donné, le second point doit être situé sur la surface du second ordre, qui a pour équation

$$(2) \quad \frac{xz}{x_1 z_1} = \frac{yw}{y_1 w_1}.$$

C'est qu'en effet toutes les coniques qui passent par le point (x_1, y_1, z_1, w_1) , et qui rencontrent les côtés du quadrilatère gauche donné, sont situées sur la surface du second ordre déterminée par le quadrilatère et le point, et qui est représentée par l'équation (2).

Ainsi, en général, le problème est impossible; mais, si la condition (1) est satisfaite, il devient indéterminé.

III. — Tangente.

21. Les coordonnées d'un point d'une courbe gauche étant

$$f_1, f_2, f_3, f_4,$$

celles d'un point infiniment voisin seront

$$f_1 + f'_1 dt, f_2 + f'_2 dt, f_3 + f'_3 dt, f_4 + f'_4 dt,$$

f' désignant la dérivée de la fonction f prise par rapport à la variable t . Or ces deux points sont situés sur la droite qui a pour équations

$$(1) \quad uf_1 + vf'_1 : uf_2 + vf'_2 : uf_3 + vf'_3 : uf_4 + vf'_4,$$

dans lesquelles on regarde t comme une constante et le rapport $\frac{u}{v}$ comme une variable arbitraire. Les équations (1) sont donc celles de la tangente à la courbe au point t .

Le point (f'_1, f'_2, f'_3, f'_4) est évidemment un point de la tangente; il correspond à $u = 0$.

22. Les équations

$$(1) \quad x : y : z = uf_1 + vf'_1 : uf_2 + vf'_2 : uf_3 + vf'_3$$

représentent le plan mené par la tangente à la courbe gauche et le point w , c'est-à-dire le plan tangent au cône projetant la courbe sur le plan $w = 0$.

L'équation de ce plan, mise sous la forme ordinaire, est

$$(2) \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ f'_1 & f'_2 & f'_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Les équations (1) peuvent être considérées comme représentant la tangente à la courbe plane, perspective de la courbe gauche sur le plan $w = 0$, l'œil étant placé au sommet opposé du tétraèdre de référence.

Si dans l'équation (2) on regarde x , y et z comme les coordonnées d'un point donné, elle donnera les points de contact des tangentes menées de ce point à la courbe plane. Or cette équation est évidemment de degré $2(m-1)$ en t ; donc une courbe plane unicursale d'ordre m et de la classe $2(m-1)$.

Cette expression donne également le nombre des tangentes de la courbe gauche qui rencontrent une droite donnée, ou enfin l'ordre de sa développable osculatrice.

23. Les tangentes en un point double ou en un point multiple d'ordre quelconque s'obtiennent sans difficulté. Il suffit pour cela de remplacer, dans les équations générales de la tangente, t par les valeurs de cette variable qui correspondent au point double ou au point multiple.

Soit, par exemple, une courbe d'ordre m ayant un point triple, au sommet w du tétraèdre de référence. Ses équations seront de la forme

$$\varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 : \frac{f_4}{(t-\alpha)(t-\beta)(t-\gamma)},$$

et, en appliquant la règle précédente, on reconnaît sans peine que les points où les tangentes au point triple rencontrent le plan $w = 0$ ont respectivement pour coordonnées

$$\begin{aligned} \varphi_1(\alpha), \quad \varphi_2(\alpha), \quad \varphi_3(\alpha), \quad 0; \\ \varphi_1(\beta), \quad \varphi_2(\beta), \quad \varphi_3(\beta), \quad 0; \\ \varphi_1(\gamma), \quad \varphi_2(\gamma), \quad \varphi_3(\gamma), \quad 0. \end{aligned}$$

En sorte que les équations des tangentes sont, sous la forme ordinaire,

$$\frac{x}{\varphi_1(\alpha)} = \frac{y}{\varphi_2(\alpha)} = \frac{z}{\varphi_3(\alpha)},$$

$$\frac{x}{\varphi_1(\beta)} = \frac{y}{\varphi_2(\beta)} = \frac{z}{\varphi_3(\beta)};$$

et

$$\frac{x}{\varphi_1(\gamma)} = \frac{y}{\varphi_2(\gamma)} = \frac{z}{\varphi_3(\gamma)}.$$

Soit encore une quartique gauche ayant un point de rebroussement au point x et passant par les autres sommets du tétraèdre de référence. Les équations sont de la forme

$$\frac{a_1 t + b_1}{(t - \alpha)^2} : \frac{a_2}{t - \beta} : \frac{a_3}{t - \gamma} : \frac{a_4}{t - \delta},$$

et l'on reconnaît sans peine que la tangente au point de rebroussement rencontre la face opposée en un point qui a pour coordonnées

$$0, \quad \frac{a_2}{\alpha - \beta}, \quad \frac{a_3}{\alpha - \gamma}, \quad \frac{a_4}{\alpha - \delta}.$$

Dans le cas où la quartique considérée passe par deux autres points fixes, $a_2, a_3, a_4, \beta, \gamma$ et δ sont des quantités connues, et α est un coefficient variable (18). Dans ce cas, le lieu du point où la tangente de rebroussement perce le plan $x = 0$ a pour équations

$$y : z : w = \frac{a_2}{t - \beta} : \frac{a_3}{t - \gamma} : \frac{a_4}{t - \delta}.$$

C'est donc une conique circonscrite à la face du tétraèdre de référence située dans ce plan.

24. La condition de toucher une droite donnée est une condition triple. Si, par exemple, la droite zw est tangente à une courbe gauche rationnelle, les deux fonctions f_1, f_2 auront en commun un facteur $(t - \alpha)^2$; de sorte que les équations de la courbe pourront se mettre sous la forme

$$(t - \alpha)^2 \varphi_1 : (t - \alpha)^2 \varphi_2 : f_3 : f_4,$$

et elles contiennent trois coefficients de moins que les équations générales. Une tangente donnée avec son point de contact équivaut à quatre conditions, puisqu'alors on connaît la valeur de α qui entre dans les équations précédentes.

Les équations

$$a_1(t - \alpha)^2(t - \beta)^2 : a_2(t - \beta)^2(t - \gamma)^2 : a_3(t - \gamma)^2(t - \delta)^2 : a_4(t - \delta)^2(t - \alpha)^2$$

représentent évidemment une quartique gauche inscrite dans un

quadrilatère gauche ayant les mêmes sommets que le tétraèdre de référence.

Les points de contact ont pour coordonnées

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & a_3(\beta - \gamma)^2 & a_4(\alpha - \beta)^2 \\ a_1(\beta - \gamma)^2 & 0 & 0 & a_4(\gamma - \delta)^2 \\ a_1(\alpha - \delta)^2 & a_1(\gamma - \delta)^2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2(\alpha - \beta)^2 & a_3(\alpha - \delta)^2 & 0 \end{array}$$

et l'on a

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & (\beta - \gamma)^2 & (\alpha - \beta)^2 \\ (\beta - \gamma)^2 & 0 & 0 & (\gamma - \delta)^2 \\ (\alpha - \delta)^2 & (\gamma - \delta)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha - \beta)^2 & (\alpha - \delta)^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 :$$

donc ces quatre points sont situés dans un même plan.

Deux autres points donnés suffiront pour déterminer la courbe ; mais il est facile de voir qu'elle a nécessairement un point double, et que, par suite, quinze conditions suffisent pour la déterminer. Donc les deux points donnés ne pourront pas être quelconques, et il devra exister entre leurs coordonnées une relation qu'il est facile de trouver.

Soient en effet (x_1, y_1, z_1, w_1) , (x_2, y_2, z_2, w_2) les coordonnées des points donnés, que nous supposons devoir correspondre aux valeurs $t = \infty$ et $t = 0$ de la variable. Nous aurons

$$\begin{aligned} x_1 : y_1 : z_1 : w_1 &= a_1 : a_2 : a_3 : a_4 \\ x_2 : y_2 : z_2 : w_2 &= a_1 \alpha^2 \beta^2 : a_2 \beta^2 \gamma^2 : a_3 \gamma^2 \delta^2 : a_4 \delta^2 \alpha^2, \end{aligned}$$

d'où, en éliminant $a_1, a_2, a_3, a_4, \alpha, \beta, \gamma$ et δ ,

$$\frac{x_2 z_2}{x_1 z_1} = \frac{y_2 w_2}{y_1 w_1},$$

résultat qu'on peut énoncer de la manière suivante : Toutes les quartiques gauches unicursales inscrites dans un quadrilatère gauche et passant en un point donné sont situées sur la quadrique déterminée par le quadrilatère et le point (*).

(*) *Note de la Rédaction.* — Ce résultat est immédiat si l'on remarque que, par l'une de ces courbes, passe une quadrique, et une seule, qui est évidemment celle de l'énoncé, puisque cette surface et la courbe considérée ont neuf points communs.

IV. — *Plan osculateur.*

25. Le plan osculateur au point t de la courbe gauche C est le plan mené par les trois points infiniment voisins

$$\begin{aligned} & (f_1, f_2, f_3, f_4), \\ & (f_1 + f'_1 dt, f_2 + f'_2 dt, f_3 + f'_3 dt, f_4 + f'_4 dt), \\ & (f_1 + 2f'_1 dt + f''_1 dt^2, f_2 + 2f'_2 dt + f''_2 dt^2, \dots). \end{aligned}$$

Or ces trois points sont situés dans le plan qui a pour équations

$$(1) \quad \begin{cases} f_1 + uf'_1 + vf''_1 \\ : f_2 + uf'_2 + vf''_2 : f_3 + uf'_3 + vf''_3 : f_4 + uf'_4 + vf''_4, \end{cases}$$

ou bien, sous forme ordinaire,

$$(2) \quad \begin{vmatrix} x & y & z & w \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ f'_1 & f'_2 & f'_3 & f'_4 \\ f''_1 & f''_2 & f''_3 & f''_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Les équations (1) ou (2) sont donc celles du plan osculateur.

Les points (f'_1, f'_2, f'_3, f'_4) , $(f''_1, f''_2, f''_3, f''_4)$ sont deux points du plan osculateur de la courbe gauche au point (f_1, f_2, f_3, f_4) .

26. On voit immédiatement que le plan osculateur au point $t = \alpha$ de la courbe

$$\frac{f_1}{t - \alpha} : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4$$

a pour équation

$$\begin{vmatrix} y & z & w \\ \varphi_2(\alpha) & \varphi_3(\alpha) & \varphi_4(\alpha) \\ \varphi'_2(\alpha) & \varphi'_3(\alpha) & \varphi'_4(\alpha) \end{vmatrix} = 0.$$

De même, les plans osculateurs au point double ($t = \alpha$, $t = \beta$) de la courbe

$$\frac{f_1}{(t - \alpha)(t - \beta)} : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4$$

ont respectivement pour équations

$$\begin{vmatrix} y & z & w \\ \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \\ \varphi_2'(x) & \varphi_3'(x) & \varphi_4'(x) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} y & z & w \\ \varphi_2(\beta) & \varphi_3(\beta) & \varphi_4(\beta) \\ \varphi_2'(\beta) & \varphi_3'(\beta) & \varphi_4'(\beta) \end{vmatrix} = 0.$$

Le plan osculateur au point de rebroussement ($t = x$) de la courbe

$$\frac{f_1}{(t-x)^2} : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4$$

a de même pour équation

$$\begin{vmatrix} y & z & w \\ \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \\ \varphi_2'(x) & \varphi_3'(x) & \varphi_4'(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Soient, par exemple, la quartique gauche (23)

$$\frac{a_1 t + b_1}{(t-x)^2} : \frac{a_2}{t-\beta} : \frac{a_3}{t-\gamma} : \frac{a_4}{t-\delta}.$$

Le plan osculateur au point de rebroussement ($t = x$) a pour équation

$$\begin{vmatrix} y & z & w \\ \frac{1}{x-\beta} & \frac{1}{x-\gamma} & \frac{1}{x-\delta} \\ \frac{1}{(x-\beta)^2} & \frac{1}{(x-\gamma)^2} & \frac{1}{(x-\delta)^2} \end{vmatrix} = 0.$$

ou bien, en développant,

$$z(x-\gamma)^2(\delta-\beta) + w(x-\delta)^2(\beta-\gamma) + y(x-\beta)^2(\gamma-\delta) = 0.$$

Si cette quartique passe en deux points donnés, x est un coefficient variable, et l'on voit que le plan osculateur au point de rebroussement enveloppe une cône quartique, dont la base sur le plan $x=0$ est une conique circonscrite à la face du tétraèdre de référence située dans ce plan.

Le plan osculateur au point $t = x$ de la courbe

$$f_1 : f_2 : (t-x)^2 \varphi_3 : (t-x)^2 \varphi_4$$

tangente à l'arête xy du tétraèdre de référence a pour équations

$$\begin{vmatrix} z & w \\ \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Soit, par exemple (24), une quartique unicursale tangente à un quadrilatère gauche ayant mêmes sommets que le tétraèdre de référence

$$a_1(t-\alpha)^2(t-\beta)^2 \\ : a_1(t-\beta)^2(t-\gamma)^2 : a_2(t-\gamma)^2(t-\delta)^2 : a_2(t-\delta)^2(t-\alpha)^2;$$

les plans osculateurs de la courbe en ses points de contact avec les côtés du quadrilatère ont pour équations

$$\frac{x}{a_1(\alpha-\beta)^2} = \frac{y}{a_2(\beta-\gamma)^2}; \quad \frac{y}{a_2(\beta-\gamma)^2} = \frac{z}{a_3(\gamma-\delta)^2}; \\ \frac{z}{a_3(\gamma-\delta)^2} = \frac{w}{a_4(\alpha-\delta)^2}; \quad \frac{w}{a_4(\alpha-\delta)^2} = \frac{x}{a_1(\alpha-\beta)^2};$$

ces quatre plans se coupent donc en un même point.

27. Si x, y, z et w sont les coordonnées d'un point donné de l'espace, l'équation

$$(1) \quad \begin{vmatrix} x & y & z & w \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ f'_1 & f'_2 & f'_3 & f'_4 \\ f''_1 & f''_2 & f''_3 & f''_4 \end{vmatrix} = 0,$$

résolue par rapport à t , donnera les points de contact des plans osculateurs menés à la courbe par ce point. Il est facile de voir que, dans le cas d'une courbe unicursale d'ordre m , cette équation est d'ordre $3(m-2)$ en t .

Désignons en effet par Δf la fonction définie par l'équation suivante :

$$\Delta f = mf - tf;$$

la fonction dérivée Δf est d'ordre $m-1$ en t .

De même la fonction $\Delta^2 f$, définie par l'équation

$$\Delta^2 f = \Delta(\Delta f) = (m-1)(mf - tf') - t(mf - tf')' \\ = m(m-1)f - 2(m-1)tf'' + t^2f''',$$

sera d'ordre $m-2$, et ainsi de suite.

Ceci posé, on reconnaît immédiatement qu'on a

$$\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ f'_1 & f'_2 & f'_3 & f'_4 \\ f''_1 & f''_2 & f''_3 & f''_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z & w \\ \Delta^2 f_1 & \Delta^2 f_2 & \Delta^2 f_3 & \Delta^2 f_4 \\ \Delta f'_1 & \Delta f'_2 & \Delta f'_3 & \Delta f'_4 \\ f''_1 & f''_2 & f''_3 & f''_4 \end{vmatrix},$$

ce qui montre que l'équation (1) est d'ordre $3(m-2)$ en t . Telle est la classe d'une courbe gauche unicursale d'ordre m .

28. Quand une courbe gauche unicursale a un point de rebroussement, sa classe diminue de deux unités. Soient, en effet,

$$f_1 : t^2 \varphi_2 : t^2 \varphi_3 : t^2 \varphi_4$$

les équations d'une courbe gauche ayant un point de rebroussement pour $t=0$, au point x . L'équation générale du plan osculateur est

$$\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ f_1 & t^2 \varphi_2 & t^2 \varphi_3 & t^2 \varphi_4 \\ f'_1 & (t^2 \varphi_2)' & (t^2 \varphi_3)' & (t^2 \varphi_4)' \\ f''_1 & (t^2 \varphi_2)'' & (t^2 \varphi_3)'' & (t^2 \varphi_4)'' \end{vmatrix} = 0.$$

Je dis que t^2 est facteur dans le premier membre de cette équation. Il suffit pour s'en assurer de vérifier que t^2 est facteur dans le déterminant

$$\begin{vmatrix} y & z & w \\ (t^2 \varphi_2)' & (t^2 \varphi_3)' & (t^2 \varphi_4)' \\ (t^2 \varphi_2)'' & (t^2 \varphi_3)'' & (t^2 \varphi_4)'' \end{vmatrix}$$

ou simplement dans le déterminant

$$\begin{vmatrix} (t^2 \varphi_3)' & (t^2 \varphi_4)' \\ (t^2 \varphi_3)'' & (t^2 \varphi_4)'' \end{vmatrix},$$

et on le reconnaît très simplement en développant les termes de ce déterminant.

On démontrerait de même que si une courbe gauche unicursale d'ordre m a un point multiple pour lequel p branches de la courbe ont la même tangente, la classe de la courbe est égale à

$$3(m-2) - 2(p-1).$$

29. Un plan osculateur donné d'une courbe équivaut à deux conditions. On exprime en effet que le plan

$$lx + my + nz + pw = 0$$

osculé la courbe C, en écrivant les conditions pour que l'équation

$$lf_1 + mf_2 + nf_3 + pf_4 = 0$$

ait trois racines égales.

Autrement, les équations

$$(t - \alpha)^3 : f_1 : f_2 : f_3 : f_4$$

représentent évidemment une courbe ayant un contact du second ordre avec le plan $x = 0$, et l'on voit que ces équations renferment deux coefficients de moins que l'équation générale.

30. Cherchons, comme exemple, les équations d'une cubique gauche dont on donne six plans osculateurs, savoir les quatre faces du tétraèdre de référence et les deux plans

$$lx + my + nz + pw = 0,$$

$$l_1x + m_1y + n_1z + p_1w = 0.$$

Les équations de la courbe seront de la forme

$$a_1(t - \alpha)^3 : a_2(t - \beta)^3 : a_3(t - \gamma)^3 : a_4(t - \delta)^3,$$

et nous achèverons de les déterminer en exprimant que chacune des équations

$$l a_1(t - \alpha)^3 + m a_2(t - \beta)^3 + n a_3(t - \gamma)^3 + p a_4(t - \delta)^3 = 0,$$

$$l_1 a_1(t - \alpha)^3 + m_1 a_2(t - \beta)^3 + n_1 a_3(t - \gamma)^3 + p_1 a_4(t - \delta)^3 = 0$$

a trois racines égales.

Pour simplifier les calculs, nous supposerons, ce qui est permis, que la racine triple de la première équation doit être égale à 0, et celle de la seconde à l'infini.

Nous aurons alors les relations

$$\begin{aligned} l a_1 x + m a_2 \beta + n a_3 \gamma + p a_4 \delta &= 0, \\ l a_1 x^2 + m a_2 \beta^2 + n a_3 \gamma^2 + p a_4 \delta^2 &= 0, \\ l a_1 x^3 + m a_2 \beta^3 + n a_3 \gamma^3 + p a_4 \delta^3 &= 0, \\ l_1 a_1 + m_1 a_2 + n_1 a_3 + p_1 a_4 &= 0, \\ l_1 a_1 x + m_1 a_2 \beta + n_1 a_3 \gamma + p_1 a_4 \delta &= 0, \\ l_1 a_1 x^2 + m_1 a_2 \beta^2 + n_1 a_3 \gamma^2 + p_1 a_4 \delta^2 &= 0. \end{aligned}$$

Des trois premières on tire

$$\begin{aligned} \frac{l a_1 x}{(\beta - \gamma)(\gamma - \delta)(\delta - \beta)} &= - \frac{m a_2 \beta}{(\gamma - \delta)(\delta - x)(x - \gamma)} \\ &= \frac{n a_3 \gamma}{(\delta - x)(x - \beta)(\beta - \delta)} = - \frac{p a_4 \delta}{(x - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - x)}. \end{aligned}$$

Les trois dernières donnent de même

$$\begin{aligned} \frac{l_1 a_1}{(\beta - \gamma)(\gamma - \delta)(\delta - \beta)} &= \frac{-m_1 a_2}{(\gamma - \delta)(\delta - x)(x - \gamma)} \\ &= \frac{n_1 a_3}{(\delta - x)(x - \beta)(\beta - \delta)} = \frac{-p_1 a_4}{(x - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - x)}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{l x}{l_1} = \frac{m \beta}{m_1} = \frac{n \gamma}{n_1} = \frac{p \delta}{p_1};$$

d'où

$$\begin{aligned} x &= \frac{l_1}{l}, \quad \beta = \frac{m_1}{m}, \quad \gamma = \frac{n_1}{n}, \quad \delta = \frac{p_1}{p}, \\ a_1 &= \frac{(\beta - \gamma)(\gamma - \delta)(\delta - \beta)}{l x} = \frac{(m_1 n)(n_1 p)(p_1 m)}{l_1 m^2 n^2 p^2} \\ &= \frac{p}{l_1} (m_1 n)(n_1 p)(p_1 m) \frac{1}{p m^2 n^2 p^2}, \end{aligned}$$

en posant $(m_1 n) = m_1 n - m n_1 \dots$, avec des expressions analogues pour a_2, a_3, a_4 ; les équations de la courbe sont donc enfin

$$\begin{aligned} &\frac{l_2}{l_1} (m_1 n)(n_1 p)(p_1 n) \left(t - \frac{l_1}{l}\right)^3 \\ &\quad : - \frac{m_2}{m_1} (n_1 p)(p_1 l)(l_1 n) \left(t - \frac{m_1}{m}\right)^3 \\ &\quad : \frac{n_2}{n_1} (p_1)(l_1 m)(n_1 p) \left(t - \frac{n_1}{n}\right)^3 \\ &\quad : - \frac{p_2}{p_1} (l m_1)(m_1 n)(n_1 l) \left(t - \frac{p_1}{p}\right). \end{aligned}$$

31. Cherchons encore les équations d'une cubique gauche osculatrice aux quatre faces du tétraèdre de référence et passant en deux points donnés (x_1, y_1, z_1, w_1) , (x_2, y_2, z_2, w_2) pour $t = \infty$ et $t = 0$, respectivement.

Les équations de la courbe seront de la forme

$$a_1(t - \alpha)^3 : a_2(t - \beta)^3 : a_3(t - \gamma)^3 : a_4(t - \delta)^3,$$

et l'on aura

$$\begin{aligned} a_1 : a_2 : a_3 : a_4 &= x_1 : y_1 : z_1 : w_1; \\ a_1 \alpha^3 : a_2 \beta^3 : a_3 \gamma^3 : a_4 \delta^3 &= x_2 : y_2 : z_2 : w_2; \end{aligned}$$

les équations de la courbe sont donc

$$\begin{aligned} x_1 \left(t - \sqrt[3]{\frac{x_2}{x_1}} \right)^3 : y_1 \left(t - \sqrt[3]{\frac{y_2}{y_1}} \right)^3 \\ : z_1 \left(t - \sqrt[3]{\frac{z_2}{z_1}} \right)^3 : w_1 \left(t - \sqrt[3]{\frac{w_2}{w_1}} \right)^3. \end{aligned}$$

Il y a 81 solutions, dont une seule est réelle.

32. Les équations d'une courbe gauche étant

$$f_1 : f_2 : f_3 : f_4,$$

nous avons vu que les équations

$$(1) \quad x : y : z = f_1 : f_2 : f_3$$

sont celles de la courbe plane perspective de la courbe gauche sur le plan $w = 0$, l'œil étant placé au point w . Or, il est évident que les points de contact des plans osculateurs de la courbe gauche qui passent par l'œil se projettent suivant les points d'inflexion de la courbe plane; ces points sont donc déterminés par l'équation

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f'_1 & f'_2 & f'_3 \\ f''_1 & f''_2 & f''_3 \end{vmatrix} = 0;$$

cette équation exprime ainsi que trois points infiniment voisins de la courbe gauche plane sont en ligne droite.

Dans le cas d'une courbe rationnelle d'ordre m , l'équation ci-

dessus peut être remplacée par la suivante (27)

$$\begin{vmatrix} \Delta^2 f_1 & \Delta^2 f_2 & \Delta^2 f_3 \\ \Delta f_1' & \Delta f_2' & \Delta f_3' \\ \Delta f_1'' & \Delta f_2'' & \Delta f_3'' \end{vmatrix} = 0;$$

elle est donc d'ordre $3(m-2)$; ainsi, une courbe plane unicursale d'ordre m a $3(m-2)$ points d'inflexion. Un point de rebroussement diminue ce nombre de deux unités, et, en général, un point multiple, dont p tangentes coïncident, le diminue de $2(p-1)$ unités.

V. — Plans osculateurs stationnaires.

33. La condition pour que quatre points consécutifs d'une courbe gauche soient dans un même plan s'obtient en substituant dans l'équation du plan osculateur, qui contient trois points consécutifs de la courbe, les coordonnées d'un quatrième point voisin, savoir

$$(f_1 + 3f_1' dt + 3f_1'' dt^2 + f_1''' dt^3, \dots),$$

ce qui donne

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ f_1' & f_2' & f_3' & f_4' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' & f_4'' \\ f_1''' & f_2''' & f_3''' & f_4''' \end{vmatrix} = 0;$$

telle est l'équation qui détermine les points de contact des plans osculateurs stationnaires.

Si la courbe donnée est une courbe unicursale, l'équation ci-dessus peut être remplacée par la suivante (27) :

$$\begin{vmatrix} \Delta^3 f_1 & \Delta^3 f_2 & \Delta^3 f_3 & \Delta^3 f_4 \\ \Delta^2 f_1' & \Delta^2 f_2' & \Delta^2 f_3' & \Delta^2 f_4' \\ \Delta f_1'' & \Delta f_2'' & \Delta f_3'' & \Delta f_4'' \\ f_1''' & f_2''' & f_3''' & f_4''' \end{vmatrix} = 0.$$

Donc elle est d'ordre $4(m-3)$ en t , et l'on voit qu'une courbe unicursale d'ordre m a, en général, $4(m-3)$ plans osculateurs stationnaires.

34. On démontre très simplement que si une courbe a un point de rebroussement, le nombre des plans stationnaires diminue de trois unités, de sorte que, si une courbe a k points de rebroussement, et si $R = 0$ est l'équation d'ordre k en t qui détermine ces points, l'équation qui donne les plans stationnaires prend la forme

$$R^3 \Delta = 0,$$

et alors l'équation

$$\Delta = 0$$

est une équation d'ordre $4(m-3) - 3k$ qui détermine les points de contact des plans stationnaires véritables.

De même, si une courbe gauche unicursale a un point multiple pour lequel p branches de courbes ont la même tangente, le nombre des plans stationnaires diminue de $3(p-1)$ unités.

Ainsi une quartique gauche a, en général, quatre plans osculateurs stationnaires; si elle a un point de rebroussement, elle n'a plus qu'un seul plan stationnaire. Une quintique gauche ayant deux points de rebroussement a deux plans stationnaires; une sextique gauche ayant quatre points de rebroussement est de la quatrième classe et elle n'a aucun plan stationnaire.

35. Un plan stationnaire donné d'une courbe gauche équivaut à trois conditions.

On obtient, en effet, la condition pour que le plan

$$lx + my + nz + pw = 0$$

soit un plan osculateur stationnaire d'une courbe donnée, en exprimant que l'équation

$$lf_1 + mf_2 + nf_3 + pf_4 = 0$$

a quatre racines égales, ce qui donne trois conditions. Autrement les équations

$$(t-x)^4 : f_1 : f_2 : f_3 : f_4$$

représentent évidemment une courbe ayant pour plan osculateur stationnaire $x = 0$, et l'on voit qu'elles renferment trois coefficients de moins que les équations générales.

Par exemple, les équations

$$a_1(t-x)^4 : a_2(t-\beta)^4 : a_3(t-\gamma)^4 : a_4(t-\delta)^4,$$

sont les équations générales d'une quartique gauche rapportée à ses plans osculateurs stationnaires supposés réels.

Soient (x_1, y_1, z_1, w_1) , (x_2, y_2, z_2, w_2) deux point donnés de la courbe correspondant aux valeurs $t = \infty$, et $t = 0$ de la variable, nous aurons

$$\begin{aligned} x_1 : y_1 : z_1 : w_1 &= a_1 : a_2 : a_3 : a_4; \\ x_2 : y_2 : z_2 : w_2 &= a_1 \alpha^4 : a_2 \beta^4 : a_3 \gamma^4 : a_4 \delta^4, \end{aligned}$$

et les équations de la courbe sont

$$\begin{aligned} x_1 \left(t - \sqrt[4]{\frac{x_2}{x_1}} \right)^4 : y_1 \left(t - \sqrt[4]{\frac{y_2}{y_1}} \right)^4 \\ : z_1 \left(t - \sqrt[4]{\frac{z_2}{z_1}} \right)^4 : w_1 \left(t - \sqrt[4]{\frac{w_2}{w_1}} \right)^4. \end{aligned}$$

Il y a 128 solutions. Si les quatre quotients $\frac{x_2}{x_1}, \frac{y_2}{y_1}, \frac{z_2}{z_1}, \frac{w_2}{w_1}$ sont de même signe, 64 solutions sont réelles et 64 sont imaginaires. Dans le cas contraire, il n'y a aucune solution réelle.

Si, au lieu de donner deux points pour achever de déterminer la courbe, on donne deux plans osculateurs,

$$\begin{aligned} l x + m y + n z + p w &= 0, \\ l_1 x + m_1 y + n_1 z + p_1 w &= 0, \end{aligned}$$

nous aurons à exprimer que chacune des équations

$$\begin{aligned} l a_1 (t - \alpha)^4 + m a_2 (t - \beta)^4 + n a_3 (t - \gamma)^4 + p a_4 (t - \delta)^4 &= 0, \\ l_1 a_1 (t - \alpha)^4 + m_1 a_2 (t - \beta)^4 + n_1 a_3 (t - \gamma)^4 + p_1 a_4 (t - \delta)^4 &= 0 \end{aligned}$$

a une racine triple.

Si, pour simplifier les calculs, nous supposons que ces racines soient zéro et l'infini, nous aurons

$$\begin{aligned} l a_1 \alpha^2 + m a_2 \beta^2 + n a_3 \gamma^2 + p a_4 \delta^2 &= 0; \\ l a_1 \alpha^3 + m a_2 \beta^3 + n a_3 \gamma^3 + p a_4 \delta^3 &= 0; \\ l a_1 \alpha^4 + m a_2 \beta^4 + n a_3 \gamma^4 + p a_4 \delta^4 &= 0; \\ l_1 a_1 + m_1 a_2 + n_1 a_3 + p_1 a_4 &= 0; \\ l_1 a_1 \alpha + m_1 a_2 \beta + n_1 a_3 \gamma + p_1 a_4 \delta &= 0; \\ l_1 a_1 \alpha^2 + m_1 a_2 \beta^2 + n_1 a_3 \gamma^2 + p_1 a_4 \delta^2 &= 0. \end{aligned}$$

Les trois premières équations donnent

$$\begin{aligned} \frac{la_1\alpha^2}{(\beta-\gamma)(\gamma-\delta)(\delta-\beta)} &= \frac{-ma_2\beta^2}{(\gamma-\delta)(\delta-\alpha)(\alpha-\gamma)} \\ &= \frac{na_3\gamma^2}{(\delta-\alpha)(\alpha-\beta)(\beta-\delta)} = \frac{-pa_4\delta^2}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}. \end{aligned}$$

Les trois dernières donnent de même

$$\begin{aligned} \frac{l_1a_1}{(\beta-\gamma)(\gamma-\delta)(\delta-\beta)} &= \frac{-m_1a_2}{(\gamma-\delta)(\delta-\alpha)(\alpha-\gamma)} \\ &= \frac{n_1a_3}{(\delta-\alpha)(\alpha-\beta)(\beta-\delta)} = \frac{-p_1a_4}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}. \end{aligned}$$

On déduit de là

$$\frac{l\alpha^2}{l_1} = \frac{m\beta^2}{m_1} = \frac{n\gamma^2}{n_1} = \frac{p\delta^2}{p_1},$$

d'où

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{l_1}{l}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{m_1}{m}}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{n_1}{n}}, \quad \delta = \sqrt{\frac{p_1}{p}}, \\ a_1 &= \frac{(\beta-\gamma)(\gamma-\delta)(\delta-\beta)}{l_1} = \frac{l}{l_1} \frac{(\sqrt{m_1n})(\sqrt{n_1p})(\sqrt{p_1m})}{lmnp}, \end{aligned}$$

en posant

$$\sqrt{m_1n} - \sqrt{mn_1} = (\sqrt{m_1n}) \dots$$

avec des valeurs analogues pour a_2, a_3, a_4 . Les équations de la courbe sont donc

$$\begin{aligned} &\frac{l}{l_1} (\sqrt{m_1n})(\sqrt{n_1p})(\sqrt{p_1m}) \left(t - \sqrt{\frac{l_1}{l}}\right)^4 \\ &\quad : \frac{m_1}{m_1} (\sqrt{p_1n})(\sqrt{l_1p})(\sqrt{n_1l}) \left(t - \frac{m_1}{m}\right)^4 \\ &\quad : \frac{n}{n_1} \sqrt{p_1l} (\sqrt{l_1m})(\sqrt{m_1p}) \left(t - \sqrt{\frac{n_1}{n}}\right)^4 \\ &\quad : \frac{p}{p_1} (\sqrt{l_1n})(\sqrt{n_1m})(\sqrt{m_1l}) \left(t - \frac{p_1}{p}\right)^4. \end{aligned}$$

VI. — Points d'inflexion linéaire et tangentes singulières.

36. Cherchons maintenant les conditions pour qu'il existe sur une courbe gauche un point d'inflexion linéaire, c'est-à-dire un

point tel que les deux points infiniment voisins de la courbe soient situés avec lui sur une même ligne droite.

Les conditions qui expriment que trois points de la courbe sont en ligne droite peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ f'_1 & f'_2 & f'_3 & f'_4 \\ f''_1 & f''_2 & f''_3 & f''_4 \end{vmatrix} = 0,$$

le premier membre de cette équation représentant le système de déterminants qu'on obtient en omettant successivement une colonne. On a ainsi deux équations distinctes entre lesquelles on éliminera t pour obtenir la condition cherchée.

37. Les équations du paragraphe précédent expriment qu'en un point d'inflexion linéaire, le plan osculateur est indéterminé. Si donc il existe sur une courbe un point d'inflexion linéaire, α , l'équation générale du plan osculateur est divisible par $t - \alpha$, et par suite, elle n'est plus que du degré $3(m-1)-1$ en t . Ainsi l'existence d'un point d'inflexion linéaire diminue d'une unité la classe de la courbe. Une quartique gauche ayant un point d'inflexion linéaire est de la cinquième classe; elle est de la quatrième classe seulement si elle a deux points d'inflexion.

Les équations

$$(t - \alpha)^3 \varphi_1 : (t - \alpha)^3 \varphi_2 : f_3 : f_4$$

représentent évidemment une courbe ayant un point d'inflexion linéaire pour $t = \alpha$; la tangente d'inflexion est l'arête zw du tétraèdre de référence. Il résulte de là qu'une tangente d'inflexion linéaire donnée d'une courbe gauche équivaut à cinq conditions; si le point de contact est donné, la tangente d'inflexion équivaut à six conditions.

38. Un plan mené par une tangente d'inflexion d'une courbe gauche et un point infiniment voisin est un plan stationnaire, puisqu'il contient quatre points infiniment voisins de la courbe. Je dis qu'un tel plan compte pour deux dans le nombre des plans stationnaires de la courbe gauche.

Soient en effet

$$t^3 \varphi_1 : t^3 \varphi_2 : f_3 : f_4$$

les équations d'une courbe gauche ayant un point d'inflexion pour $t = 0$. Les plans stationnaires sont donnés par l'équation

$$\begin{vmatrix} t^3 \varphi_1 & t^3 \varphi_2 & f_3 & f_4 \\ (t^3 \varphi_1)' & (t^3 \varphi_2)' & f_3' & f_4' \\ (t^3 \varphi_1)'' & (t^3 \varphi_2)'' & f_3'' & f_4'' \\ (t^3 \varphi_1)''' & (t^3 \varphi_2)''' & f_3''' & f_4''' \end{vmatrix} = 0.$$

Pour reconnaître que t^2 est facteur dans le premier membre de cette équation, il suffit de vérifier qu'il est facteur dans le déterminant

$$\begin{vmatrix} (t^3 \varphi_1)'' & (t^3 \varphi_2)'' \\ (t^3 \varphi_1)''' & (t^3 \varphi_2)''' \end{vmatrix},$$

ce qui ne présente aucune difficulté.

Ainsi, une quartique gauche ayant deux points d'inflexion linéaire n'a pas d'autre plan stationnaire que les plans osculateurs en ces deux points.

39. Plus généralement, les équations

$$(t - \alpha)^n \varphi_1 : (t - \alpha)^n \varphi_2 : f_3 : f_4$$

représentent une courbe unicusale ayant un contact d'ordre $n - 1$, pour $t = \alpha$, avec l'arête zw du tétraèdre de référence; la classe de cette courbe est égale à $3(m - 2) - (n - 2)$, et le nombre de ses plans osculateurs stationnaires est égal à

$$4(m - 3) - 2(n - 2).$$

En outre de ces plans, il existe un plan ayant avec la courbe un contact d'ordre n au point $t = \alpha$; l'équation de ce plan est

$$\frac{x}{\varphi_1(\alpha)} = \frac{y}{\varphi_2(\alpha)};$$

il compte pour $2(n - 2)$ plans stationnaires ordinaires.

40. Par exemple, les équations

$$\begin{aligned} & (t - \alpha)^n (t - \beta)^n \\ & : (t - \beta)^n (t - \gamma)^n : (t - \gamma)^n (t - \delta)^n : (t - \delta)^n (t - \alpha)^n \end{aligned}$$

représentent une courbe gauche d'ordre $2n$, ayant un contact d'ordre $n - 1$ avec les côtés du quadrilatère gauche $xyzw$. Les points de contact ont respectivement pour coordonnées

$$\begin{array}{cccc} 0 & (\alpha - \beta)^n & (\alpha - \delta)^n & 0 \\ 0 & 0 & (\beta - \gamma)^n & (\beta - \alpha)^n \\ (\gamma - \beta)^n & 0 & 0 & (\gamma - \delta)^n \\ (\delta - \alpha)^n & (\delta - \gamma)^n & 0 & 0 \end{array}$$

et l'on a

$$\begin{vmatrix} 0 & (\alpha - \beta)^n & (\alpha - \delta)^n & 0 \\ 0 & 0 & (\beta - \gamma)^n & (\beta - \alpha)^n \\ (\gamma - \beta)^n & 0 & 0 & (\gamma - \delta)^n \\ (\delta - \alpha)^n & (\delta - \gamma)^n & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Donc ces quatre points sont situés dans un même plan.

Les plans osculateurs de la courbe en ces points ont respectivement pour équations

$$\frac{x}{(\alpha - \beta)^n} = \frac{w}{(\alpha - \delta)^n},$$

$$\frac{y}{(\beta - \gamma)^n} = \frac{x}{(\beta - \alpha)^n},$$

$$\frac{y}{(\gamma - \beta)^n} = \frac{z}{(\gamma - \delta)^n},$$

$$\frac{z}{(\gamma - \delta)^n} = \frac{w}{(\delta - \alpha)^n};$$

et l'on voit qu'ils se coupent en un même point ayant pour coordonnées

$$(\alpha - \beta)^n, (\gamma - \beta)^n, (\gamma - \delta)^n, (\alpha - \delta)^n.$$

Les résultats obtenus précédemment (24) et (26) pour la quartique gauche sont des cas particuliers des théorèmes qui précèdent.

VII. — Plans surosculateurs.

41. On obtient d'une manière générale les conditions pour que le plan

$$lx + my + nz + pw = 0,$$

ait, avec la courbe gauche unicursale C , un contact d'ordre $n - 1$, en exprimant que l'équation

$$lf_1 + mf_2 + nf_3 + pf_4 = 0$$

a n racines égales, ce qui donnera $n - 1$ conditions.

Il est évident que les équations

$$(t - \alpha)^n \varphi_1 : f_2 : f_3 : f_4$$

représentent une courbe ayant avec le plan $x = 0$ un contact d'ordre $n - 1$ pour $t = \alpha$; et l'on voit qu'un plan donné ayant avec la courbe un contact d'ordre $n - 1$ équivaut à $n - 1$ conditions.

Par exemple, les équations

$$a_1(t - \alpha)^m : a_2(t - \beta)^m : a_3(t - \gamma)^m : a_4(t - \delta)^m$$

représentent une courbe unicursale d'ordre m ayant avec chacune des faces du tétraèdre de référence un contact d'ordre $m - 1$.

Les points de contact ont pour coordonnées

0	$a_2(\alpha - \beta)^m$	$a_3(\alpha - \gamma)^m$	$a_4(\alpha - \delta)^m$
$a_1(\beta - \alpha)^m$	0	$a_3(\beta - \gamma)^m$	$a_4(\beta - \delta)^m$
$a_1(\gamma - \alpha)^m$	$a_2(\gamma - \beta)^m$	0	$a_4(\gamma - \delta)^m$
$a_1(\delta - \alpha)^m$	$a_2(\delta - \beta)^m$	$a_3(\delta - \gamma)^m$	0

Si m est un nombre impair, on a

$$\begin{vmatrix} 0 & a_3(\beta - \gamma)^m & a_4(\beta - \delta)^m \\ a_2(\gamma - \beta) & 0 & a_4(\gamma - \delta)^m \\ a_2(\delta - \beta) & a_3(\delta - \gamma)^m & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui montre que les points de contact de trois des faces du tétraèdre sont dans un même plan avec le sommet correspondant. Comme cas particulier, les points de contact de trois plans osculateurs d'une cubique gauche sont dans un même plan avec leur point d'intersection.

42. Deux points donnés, (x_1, y_1, z_1, w_1) , (x_2, y_2, z_2, w_2) de la courbe suffisent pour la déterminer complètement. On peut supposer en effet que ces points correspondent aux valeurs $t = \infty$ et

$t = 0$ de la variable, et les équations de la courbe sont

$$\begin{aligned} x_1 \left(t - \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} \right)^m &: y_1 \left(t - \sqrt{\frac{y_2}{y_1}} \right)^m \\ &: z_1 \left(t - \sqrt{\frac{z_2}{z_1}} \right)^m : w_1 \left(t - \sqrt{\frac{w_2}{w_1}} \right)^m. \end{aligned}$$

43. Le plan osculateur de la courbe a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ a_1(t-\alpha)^m & a_2(t-\beta)^m & a_3(t-\gamma)^m & a_4(t-\delta)^m \\ a_1(t-\alpha)^{m-1} & a_2(t-\beta)^{m-1} & a_3(t-\gamma)^{m-1} & a_4(t-\delta)^{m-1} \\ a_1(t-\alpha)^{m-2} & a_2(t-\beta)^{m-2} & a_3(t-\gamma)^{m-2} & a_4(t-\delta)^{m-2} \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien, en développant le premier membre,

$$\begin{aligned} &\frac{x(\beta-\gamma)(\gamma-\delta)(\delta-\beta)}{a_1(t-\alpha)^{m-2}} + y \frac{(\gamma-\delta)(\delta-\alpha)(\alpha-\gamma)}{a_2(t-\beta)^{m-2}} \\ &+ z \frac{(\delta-\alpha)(\alpha-\beta)(\beta-\delta)}{a_3(t-\gamma)^{m-2}} + w \frac{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}{a_4(t-\delta)^{m-2}} = 0, \end{aligned}$$

équation du degré $3(m-2)$, ainsi que cela doit être.

Les plans osculateurs stationnaires de la courbe sont donnés par l'équation

$$\begin{vmatrix} (t-\alpha)^m & (t-\beta)^m & (t-\gamma)^m & (t-\delta)^m \\ (t-\alpha)^{m-1} & (t-\beta)^{m-1} & (t-\gamma)^{m-1} & (t-\delta)^{m-1} \\ (t-\alpha)^{m-2} & (t-\beta)^{m-2} & (t-\gamma)^{m-2} & (t-\delta)^{m-2} \\ (t-\alpha)^{m-3} & (t-\beta)^{m-3} & (t-\gamma)^{m-3} & (t-\delta)^{m-3} \end{vmatrix} = 0,$$

qui, développée, devient simplement

$$(t-\alpha)^{m-3}(t-\beta)^{m-3}(t-\gamma)^{m-3}(t-\delta)^{m-3} = 0;$$

la courbe n'a donc pas d'autre plan stationnaire que ses plans surosculateurs. L'on voit en outre, et il est facile de démontrer directement, qu'un plan surosculateur ayant avec la courbe un contact d'ordre $m-1$ tient la place de $m-3$ plans stationnaires.

VIII. — *Développable osculatrice.*

44. Si, dans les équations générales de la tangente

$$f_1 + uf'_1 : f_2 + uf'_2 : f_3 + uf'_3 : f_4 + uf'_4,$$

on regarde t et u comme des variables indépendantes, ces équations représenteront la développable osculatrice de la courbe gauche C .

Nous obtiendrons la section de cette surface par le plan $w = 0$, en faisant $u = -\frac{f_4}{f'_4}$, ce qui donne

$$x : y : z = (f_1 f'_4) : (f_2 f'_4) : (f_3 f'_4).$$

Chacun des déterminants qui entrent dans cette équation est d'ordre $2(m-1)$ en t ; donc la section plane de la développable osculatrice et par suite la développable elle-même sont d'ordre $2(m-1)$ (22).

La classe de la développable est égale à celle de la courbe elle-même, c'est-à-dire, en général, à $3(m-2)$.

Un point de rebroussement diminue d'une unité l'ordre de la développable, et de deux unités sa classe.

Un point multiple tel que p branches de courbe qui s'y croisent ont la même tangente diminue l'ordre de la développable osculatrice de $p-1$ unités et sa classe de $2(p-1)$.

Aussi, la développable osculatrice d'une cubique gauche est du quatrième ordre et de la troisième classe; celle d'une quartique unicursale générale est du sixième ordre et de la sixième classe; celle d'une quartique ayant un point de rebroussement est du cinquième ordre et de la quatrième classe; celle d'une quintique ayant deux points de rebroussement est du sixième ordre et de la sixième classe, etc.

45. La section plane de la développable osculatrice étant une courbe unicursale d'ordre $2m-2$, elle a en général

$$\frac{(2m-3)(2m-4)}{2} = 2m^2 - 7m + 6$$

points doubles ou points de rebroussement. Or il est facile de voir que les points de la courbe gauche situés dans le plan de la section sont des points de rebroussement de cette section. Soient, par exemple,

$$f_1 : t\varphi_2 : t\varphi_3 : t\varphi_4$$

les équations d'une courbe gauche qui passe par le sommet x du tétraèdre de référence, pour $t = 0$. Les équations de la section de la développable osculatrice par le plan $w = 0$ étant, en général,

$$(f_1 f'_4) : (f_2 f'_4) : (f_3 f'_4),$$

on reconnaîtra sans peine que les deux déterminants contiennent t^2 en facteur.

Donc une section plane de la développable osculatrice a en général

$$2m^2 - 8m + 6 = 2(m-1)(m-3)$$

points doubles autres que ses points de rencontre avec son arête de rebroussement. Il existe donc sur la développable une courbe double d'ordre $2(m-1)(m-3)$.

Ainsi la développable osculatrice d'une cubique gauche n'a pas de courbe double; celle d'une quartique gauche unicursale a une courbe double du sixième ordre, etc.

46. Si la courbe gauche a k points de rebroussement, l'ordre de sa développable osculatrice est égal à

$$2m - 2 - k,$$

et l'ordre de sa courbe double est égal à

$$\begin{aligned} & \frac{(2m - k - 3)(2m - k - 4)}{2} - m \\ &= 2(m-1)(m-3) - \frac{k(4m - k - 7)}{2}. \end{aligned}$$

Un point de rebroussement diminue donc de $2m - 4$ unités l'ordre de la courbe double de la développable osculatrice d'une courbe gauche unicursale; deux points de rebroussement diminuent cet ordre de $4m - 9$ unités, etc. Ainsi la développable os-

culatrice d'une quintique gauche ayant un point de rebroussement a une conique double; la courbe double de la développable osculatrice d'une quintique gauche ayant deux points de rebroussement est du cinquième ordre; celle relative à une sextique gauche ayant quatre points de rebroussement est du quatrième ordre, etc.

47. Une tangente d'inflexion linéaire d'une courbe gauche est une arête de rebroussement de la développable osculatrice.

En effet, les équations de la courbe étant

$$t^3 \varphi_1 : t^3 \varphi_2 : f_3 : f_4,$$

celles de la développable osculatrice sont

$$t^3 \varphi_1 + u(t^3 \varphi_1)' : t^3 \varphi_2 + u(t^3 \varphi_2)' : f_3 + u f_3' : f_4 + u f_4',$$

et la section par le plan quelconque $w = 0$ a des équations de la forme

$$t^3 \psi_1 : t^3 \psi_2 : \psi_3.$$

Il en résulte qu'un point d'inflexion linéaire diminue d'une unité l'ordre de la courbe double de la développable osculatrice. Par exemple, la développable osculatrice d'une quartique gauche ayant deux points d'inflexion linéaire a une courbe double du quatrième ordre. Une section plane de cette surface a quatre points doubles et six points stationnaires.

IX. — *Nombre maximum des points doubles d'une courbe gauche.*

48. Nous avons vu qu'une courbe unicursale d'ordre m a $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles apparents dont plusieurs peuvent devenir des points doubles effectifs ou des points de rebroussement. Nous allons chercher quel est le nombre maximum des points doubles effectifs d'une courbe unicursale d'ordre m ⁽¹⁾.

(¹) *Note de la Rédaction.* — Il est évident que ce maximum aura lieu, lorsque le nombre des points doubles apparents atteindra son minimum. Or, M. Halphen a établi (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXX, p. 381) que ce dernier est égal, pour une courbe gauche quelconque, au plus grand

Une telle courbe peut toujours être considérée comme l'intersection partielle de deux surfaces algébriques, d'ordre μ et ν respectivement. Ces deux surfaces se coupent en outre suivant une courbe C' d'ordre m' , et l'on a

$$(1) \quad m + m' = \mu\nu.$$

Si, d'ailleurs, on désigne par h et h' les nombres des points doubles apparents des courbes C et C' respectivement, on a (SALMON, *Geometry of three dimensions*, seconde édition, p. 273)

$$h = h' + \frac{(m - m')(\mu - 1)(\nu - 1)}{2}.$$

Le maximum du nombre des points doubles effectifs de la courbe B correspond évidemment au minimum de h . Or on a, en remplaçant ν par sa valeur tirée de l'équation (1),

$$h = h' + \frac{(m - m')(\mu - 1) \left(\frac{m + m'}{\mu} - 1 \right)}{2}.$$

Cherchons le minimum du produit

$$(2) \quad (\mu - 1) \left(\frac{m + m'}{\mu} - 1 \right)$$

pour une valeur connue de m' . Si l'on prend la dérivée de ce produit par rapport à μ , et qu'on l'égalé à zéro, il vient

$$\frac{m + m'}{\mu} - 1 - (\mu - 1) \frac{m + m'}{\mu^2} = 0,$$

ou

$$\mu^2 = m + m'$$

et

$$\mu = \pm \sqrt{m + m'}.$$

entier contenu dans $\left(\frac{m-1}{2} \right)^2$. Voir également, à ce sujet, notre *Mémoire sur les courbes gauches algébriques* (*Bulletin*, t. I, p. 269.) Il suit de là que le nombre cherché est égal au plus grand entier contenu dans

$$\frac{1}{2} (m - 1) (m - 2) - \frac{1}{4} (m - 1)^2 + \frac{1}{4}.$$

H. P.

Il est facile de voir que la valeur négative de μ correspond à un minimum, et la valeur positive à un maximum. Et comme μ est nécessairement un nombre entier positif, on voit qu'on obtiendra le minimum de l'expression (2) et, par suite, celui de h , en faisant $\mu = 2$. (Nous excluons le cas de $\mu = 0$, qui ne signifie rien, et celui de $\mu = 1$, qui est relatif aux courbes planes.)

Donc le nombre minimum des points doubles apparents d'une courbe gauche unicursale et, par suite, le nombre maximum de ses points doubles effectifs correspondent au cas où la courbe est tracée sur une quadrique.

Or, si une courbe gauche d'ordre m tracée sur une quadrique rencontre en p points les génératrices de cette surface et en q points ses directrices, le nombre des points apparents de cette courbe a pour expression (CHASLES)

$$h = \frac{p(p-1) + 2(q-1)}{2},$$

avec la relation

$$p + q = m.$$

Si m est un nombre pair, le minimum de h s'obtient en faisant $p = q = \frac{m}{2}$, et il est égal à

$$H = \frac{m(m-2)}{4}.$$

Si m est impair, le minimum a lieu pour

$$p = \frac{m+1}{2}, \quad q = \frac{m-1}{2},$$

et il a pour expression

$$H_1 = \frac{(m-1)^2}{4}.$$

On a d'ailleurs

$$\begin{aligned} \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \frac{m(m-2)}{4} &= \frac{(m-2)^2}{4}, \\ \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \frac{(m-1)^2}{4} &= \frac{(m-1)(m-3)}{4}. \end{aligned}$$

Donc, enfin, le nombre maximum des points doubles effectifs

d'une courbe gauche unicursale d'ordre m a pour expression

$$\delta = \frac{(m-2)^2}{4}$$

lorsque m est un nombre pair, et

$$\delta_1 = \frac{(m-1)(m-3)}{4}$$

lorsque m est un nombre impair.

Ainsi une quartique gauche a, au plus, un point double; une quintique gauche deux, une sextique gauche quatre, et ainsi de suite.

L'équation (1) montre que, si m est pair, on pourra prendre pour m' un nombre pair quelconque pour obtenir une courbe ayant le plus grand nombre possible de points doubles effectifs; de même, si m est un nombre impair, on pourra prendre pour m' un nombre impair quelconque. La quantité h' a pour minimum dans le premier cas

$$\frac{m'(m'-2)}{4},$$

et dans le second cas

$$\frac{(m'-1)^2}{4}.$$

X. — Divisions homographiques tracées sur une courbe gauche unicursale.

49. Soient

$$\begin{aligned} f_1(t) : f_2(t) : f_3(t) : f_4(t), \\ \varphi_1(\tau) : \varphi_2(\tau) : \varphi_3(\tau) : \varphi_4(\tau) \end{aligned}$$

les équations de deux courbes gauches unicursales, d'ordres m et m' respectivement. Les équations de la droite qui joint deux points t et τ de ces courbes sont

$$(1) f_1(t) + u \varphi_1(\tau) : f_2(t) + u \varphi_2(\tau) : f_3(t) + u \varphi_3(\tau) : f_4(t) + u \varphi_4(\tau).$$

Si l'on établit entre t et τ une relation quelconque, les équations (1) représenteront une surface gauche qui contient les deux courbes données.

Si la relation entre t et τ est de la forme

$$(2) \quad t\tau + At + B\tau + C = 0,$$

à un point de la première courbe correspondra un seul point de la seconde et réciproquement. Nous dirons alors que les points t et τ forment sur les deux courbes des divisions homographiques.

Dans ce cas, les équations (1) représentent une surface réglée d'ordre $m + m'$.

On obtient en effet les équations de la section de cette surface par le plan $w = 0$ en faisant

$$u = - \frac{f_4(t)}{\varphi_4(\tau)},$$

ce qui donne

$$x : y : z = f_1(t)\varphi_1(\tau) - f_4(t)\varphi_4(\tau) : \dots,$$

et si l'on remplace τ par sa valeur en fonction de t tirée de l'équation (2), les équations ci-dessus seront d'ordre $m + m'$ en t .

Ainsi la droite qui joint les points correspondants de deux divisions homographiques formées sur deux droites quelconques engendre une quadrique.

Si les divisions sont faites sur une droite et sur une conique, la surface réglée est du troisième ordre, etc.

50. Le plan tangent de la surface gauche en un point t de la première courbe a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) & f_4(t) \\ f'_1(t) & f'_2(t) & f'_3(t) & f'_4(t) \\ \varphi_1(\tau) & \varphi_2(\tau) & \varphi_3(\tau) & \varphi_4(\tau) \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est évidemment d'ordre $2m + m' - 2$ en t ; donc le plan tangent en question enveloppe une surface développable de la classe $2m + m' - 2$.

De même les plans tangents de la surface gauche aux différents points de la seconde courbe enveloppent une surface développable de la classe $2m' + m - 2$.

51. Soient maintenant deux points t et τ d'une même courbe

gauche C liés entre eux par la relation d'homographie

$$t\tau + At + B\tau + C = 0;$$

nous dirons que ces points forment sur la courbe deux divisions homographiques.

Quand on a ainsi, sur une même courbe, deux systèmes de points homographiques, il existe deux points doubles, c'est-à-dire deux points tels que chacun d'eux, considéré comme appartenant à l'un des systèmes, coïncide avec son homologue dans l'autre.

Si l'on fait, en effet, dans l'équation (1), $t = \tau$, il vient

$$t^2 + (A + B)t + C = 0,$$

équation du second degré, dont chaque racine fournit un point double.

52. La droite qui joint les points correspondants de deux divisions homographiques formées sur une même courbe unicursale d'ordre m engendre une surface gauche Σ dont l'ordre est égal à $2(m - 1)$.

En effet, cette surface a pour équations

$$f_1(t) + uf_1(\tau) : f_2(t) + uf_2(\tau) : \dots$$

Ses points d'intersection avec la droite

$$a_1\theta + b_1 : a_2\theta + b_2 : a_3\theta + b_3 : a_4\theta + b_4$$

sont donnés par l'équation

$$\begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) & f_4(t) \\ f_1(\tau) & f_2(\tau) & f_3(\tau) & f_4(\tau) \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = 0,$$

dans laquelle les termes de l'ordre le plus élevé sont de la forme

$$A(t^m\tau^{m-1} - t^{m-1}\tau^m) = A(t - \tau)t^{m-1}\tau^{m-1}.$$

Mais le premier membre est divisible par $t - \tau$. Si l'on fait la division, le terme de l'ordre le plus élevé prend la forme $At^{m-1}\tau^{m-1}$. Si donc on remplace ensuite τ par sa valeur en fonction de t ,

tirée de l'équation d'homographie, on obtient une équation d'ordre $2(m-1)$ en t .

La surface Σ contient évidemment les tangentes à la courbe aux points doubles des divisions homographiques.

§3. La courbe C est évidemment une courbe double de la surface gauche Σ ; en chaque point a de cette courbe, la surface a deux plans tangents qui ont respectivement pour équations

$$\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ f_1(a) & f_2(a) & f_3(a) & f_4(a) \\ f'_1(a) & f'_2(a) & f'_3(a) & f'_4(a) \\ f_1(b) & f_2(b) & f_3(b) & f_4(b) \end{vmatrix} = 0,$$

et

$$\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ f_1(a) & f_2(a) & f_3(a) & f_4(a) \\ f'_1(a) & f'_2(a) & f'_3(a) & f'_4(a) \\ f_1(c) & f_2(c) & f_3(c) & f_4(c) \end{vmatrix} = 0,$$

b et c étant les homologues du point a considéré comme appartenant successivement au premier et au second système des divisions homographiques.

Aux points doubles des divisions homographiques, ces deux plans se confondent en un seul; donc, les points en question sont des points de rebroussement de la surface gauche, les plans tangents de rebroussement sont les plans osculateurs de la courbe.

§4. Si deux divisions homographiques formées sur une courbe sont telles que deux points homologues t et τ sont réciproques, on dit que les divisions sont en involution. L'équation d'homographie est alors

$$t\tau + A(t + \tau) + B = 0;$$

elle ne contient que deux coefficients arbitraires, de sorte que deux groupes de points conjugués, par exemple les deux points doubles, suffisent pour définir une involution.

La droite qui joint deux points homologues d'une involution formée sur une courbe gauche unicursale d'ordre m est une surface gauche Σ d'ordre $m-1$.

On verrait en effet, comme précédemment, que les points d'intersection de la surface avec une droite quelconque sont donnés par une équation du degré $2(m-1)$ en t ; mais, si t est une racine de cette équation, le point homologue τ en sera évidemment une autre, et il est clair que ce couple de racines ne donnera qu'une génératrice de Σ , et, par suite, qu'un seul point d'intersection avec la droite considérée. On n'a donc que $m-1$ points d'intersection en tout, et tel est par suite l'ordre de Σ .

Ainsi, la droite qui joint les points homologues d'une involution sur une cubique gauche engendre une quadrique. Une seconde division en involution déterminera une seconde quadrique; mais on reconnaît sans peine que deux divisions en involution sur une même courbe ont un couple de points homologues communs; donc les deux quadriques ont une droite commune.

Deux involutions formées sur une quartique unicursale déterminent de même deux surfaces réglées du troisième ordre ayant une droite commune. L'intersection de ces deux surfaces, qui est du neuvième ordre, comprend donc cette droite, la courbe donnée et une seconde quartique.

La surface gauche Σ contient évidemment les tangentes de la courbe C aux points doubles de l'involution; ses plans tangents en ces deux points sont les plans osculateurs de la courbe.

55. Les plans tangents de la surface Σ aux différents points de la courbe C enveloppent une surface développable Δ dont je vais calculer la classe.

L'un de ces plans tangents a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) & f_4(t) \\ f_1(\tau) & f_2(\tau) & f_3(\tau) & f_4(\tau) \\ f_1(\tau) & f_2(\tau) & f_3(\tau) & f_4(\tau) \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est d'ordre $2(m-1)$ en t et d'ordre m en τ ; mais on reconnaît sans peine que son premier membre est divisible par $(t-\tau)^2$. Si donc on supprime ce facteur et qu'on remplace τ par sa valeur en fonction de t , on obtiendra une équation d'ordre $3(m-2)$ en t ; donc l'ordre de la développable Δ est égal à $3(m-2)$.

56. Si une courbe gauche a un point double et que les valeurs t_1 et t_2 de la variable qui correspondent à ce point soient un groupe d'une involution formée sur la courbe, la surface gauche engendrée par les droites qui joignent deux points homologues de l'involution est d'ordre $m - 2$. En effet, dans ce cas, l'équation d'ordre $2(m - 1)$ en t , qui détermine les génératrices de la surface gauche situées dans un même plan avec une droite donnée est évidemment satisfaite pour $t = t_1$ et $t = t_2$; en supprimant de cette équation les facteurs $t - t_1$, $t - t_2$, son degré devient égal à $2(m - 2)$, ce qui montre que l'ordre de la surface gauche est égal à $m - 2$.

Si, par exemple, on a sur une quartique gauche à point double un système de points en involution, dont le point double forme un groupe, la droite qui joint deux points homologues de l'involution engendre une quadrique.

Il en est de même évidemment si le point double est remplacé par un point de rebroussement qui soit un point double de l'involution considérée.

La présence de deux points doubles parmi les groupes d'une involution formée sur une courbe réduira de même à $m - 3$ le degré de la surface gauche engendrée par la droite qui réunit deux points correspondants de l'involution. Ainsi, dans le cas d'une involution déterminée sur une quintique gauche ayant deux points doubles, par ces points doubles eux-mêmes, la surface engendrée est une quadrique.

57. Cherchons enfin l'ordre de la surface gauche Σ engendrée par une droite qui rencontre en trois points une courbe gauche unicursale d'ordre m .

Soient t et τ deux des points de rencontre de la droite mobile, dans l'une de ses positions, avec la courbe donnée. Les points de rencontre de la surface Σ avec une droite quelconque

$$a_1\theta + b_1 : a_2\theta + b_2 : a_3\theta + b_3 : a_4\theta + b_4$$

seront donnés par l'équation

$$(1) \quad \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) & f_4(t) \\ f_1(\tau) & f_2(\tau) & f_3(\tau) & f_4(\tau) \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Mais, t étant un point donné de la courbe, le cône qui a son sommet en ce point et s'appuie sur la courbe est d'ordre $m - 1$, et il a

$$\frac{(m-2)(m-3)}{2}$$

arêtes doubles. Chacune de ces droites rencontre la courbe en deux points τ ; donc l'équation qui lie les valeurs t et τ de la variable qui entrent dans l'équation (1) est d'ordre $(m-2)(m-3)$ par rapport à τ , et, comme elle est évidemment symétrique par rapport à t et τ , elle est de la forme

$$(2) \quad A(t-\tau)^{(m-2)(m-3)} + \dots = 0,$$

les termes négligés étant d'ordre inférieur au premier.

Mais l'équation (1) est elle-même symétrique en t et τ et de la forme

$$(3) \quad A'(t-\tau)^{m-1} + \dots = 0.$$

Il est facile maintenant de trouver le degré de l'équation en t résultant de l'élimination de τ entre les équations (2) et (3).

Considérons en effet dans ces équations t et τ comme des coordonnées cartésiennes. L'équation (2) représentera alors une courbe plane d'ordre $2(m-2)(m-3)$ ayant un point multiple d'ordre $(m-2)(m-3)$ à l'infini, dans la direction de chacun des axes.

De même l'équation (3) représentera une courbe d'ordre $2(m-1)$ ayant des points multiples d'ordre $m-1$ à l'infini sur les axes.

Ces courbes ont

$$4(m-1)(m-2)(m-3)$$

points communs.

Mais de ce nombre il y a lieu de retrancher les points à l'infini, qui représentent

$$2(m-1)(m-2)(m-3)$$

points de rencontre ordinaires; il reste donc seulement

$$2(m-1)(m-2)(m-3)$$

points de rencontre à distance finie.

Remarquons en outre que, les deux courbes étant symétriques par

rapport à la bissectrice de l'angle positif des axes, à un point de rencontre (t, τ) en correspond un autre (τ, t) ; il n'y a donc en réalité que $(m-1)(m-2)(m-3)$ points de rencontre donnant des génératrices distinctes de la surface gauche. Comme d'ailleurs chaque génératrice rencontre la courbe en trois points, on n'obtient en réalité que

$$\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{3}$$

points de rencontre de la droite considérée avec la surface gauche Σ . Tel est, par suite, l'ordre de cette surface ⁽¹⁾. Par exemple, une corde qui s'appuie en trois points d'une quartique gauche unicursale décrit une quadrique; les cordes triples d'une quintique gauche unicursale générale engendrent une surface gauche du huitième ordre, ayant la quintique pour courbe triple.

58. Si une courbe unicursale d'ordre m a un point double, le cône d'ordre $m-2$, qui a son sommet en ce point et s'appuie sur la courbe, fait évidemment partie du lieu des cordes triples; donc l'ordre de la surface gauche Σ est diminué de $m-2$ pour chaque point double. Ainsi, pour une quartique gauche à point double, Σ est d'ordre zéro, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'autres cordes triples que celles qui passent au point double. Pour une quartique gauche ayant deux points doubles, Σ est une quadrique; pour une sextique

⁽¹⁾ *Note de la Rédaction.* — Plus généralement, on sait que le degré de la surface, lieu des sécantes triples d'une courbe gauche du degré m , à h points doubles apparents, est égal à

$$(m-2) \left[h - \frac{1}{6} m(m-1) \right],$$

l'ordre de multiplicité de la courbe étant d'ailleurs $h-m+2$.

Pour $h = \frac{1}{2} (m-1)(m-2)$, on a résolu le problème posé par l'auteur. On peut aussi, si l'on veut, chercher le nombre des sécantes quadruples d'une courbe gauche unicursale du degré m . Il est égal, en général, à

$$\frac{1}{2} h(h-4m+11) - \frac{1}{24} m(m-2)(m-3)(m-13).$$

Pour $h = \frac{1}{2} (m-1)(m-2)$, on trouve

$$\frac{1}{12} (m-2)(m-3)^2(m-4).$$

H. P.

gauche ayant quatre points doubles, Σ est une surface gauche du quatrième ordre, etc.

Dans un prochain Mémoire, nous étudierons les propriétés des courbes gauches unicursales du quatrième et du cinquième ordre.

Note sur une formule de Gauss; par M. N. SONINE.

(Séance du 15 juillet 1881.)

La propriété fondamentale et la plus simple de la fonction $\Gamma(x)$, définie pour des valeurs à partie réelle positive de la variable x par l'intégrale

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt,$$

consiste dans l'équation aux différences finies

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

On en tire aisément le théorème célèbre de Gauss.

En effet, en désignant par n un nombre entier positif, on aura

$$\Gamma\left(\frac{x+n}{n}\right) = \Gamma\left(\frac{x}{n} + 1\right) = \frac{x}{n} \Gamma\left(\frac{x}{n}\right),$$

et, si l'on élimine x entre ces deux équations, on obtient

$$(1) \quad \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = n \frac{\Gamma\left(\frac{x+n}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)}.$$

Mais le rapport de l'expression $\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}$ se réduit aisément au produit des rapports dans lesquels les valeurs de la variable ne diffèrent que de l'unité, à savoir

$$\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x+n-1)} \frac{\Gamma(x+n-1)}{\Gamma(x+n-2)} \dots \frac{\Gamma(x+2)}{\Gamma(x+1)} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}.$$

Cette transformation, appliquée au second membre de l'équa-

tion (1), conduit au résultat suivant

$$\frac{\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right)}{\Gamma(x)} \\ = n \frac{\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x+2}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+n}{n}\right)}{\Gamma(x+1)},$$

ou, en posant

$$(2) \quad \frac{\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right)}{\Gamma(x)} = \varphi_n(x), \\ \varphi_n(x) = n\varphi_n(x+1).$$

Cette dernière équation admet pour solution particulière $\varphi_n(x) = A^x$ ou $A = \frac{1}{n}$, et la solution générale sera

$$\varphi_n(x) = n^{-x}\theta_n(x),$$

$\theta_n(x)$ étant une fonction périodique telle que $\theta_n(x) = \theta_n(x+1)$.
D'après cela, l'équation (2) devient

$$(3) \quad \theta_n(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right)}{\Gamma(x)} n^x.$$

Remplaçons-y n par le produit mn de deux nombres entiers, ce qui fournit

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_{mn}(x) \\ = \frac{\Gamma\left(\frac{x}{mn}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{mn}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+m-1}{mn}\right)\Gamma\left(\frac{x+m}{mn}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+mn-1}{mn}\right)}{\Gamma(x)} m^x n^x, \end{array} \right.$$

et composons le produit

$$\theta_n\left(\frac{x}{m}\right)\theta_n\left(\frac{x+1}{m}\right)\dots\theta_n\left(\frac{x+m-1}{m}\right) \\ = \frac{\Gamma\left(\frac{x}{mn}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{mn}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+m}{mn}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+mn-1}{mn}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{m}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{m}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+m-1}{m}\right)} n^{x+\frac{m-1}{2}},$$

dans lequel le numérateur du second membre est égal à

$$\theta_{mn}(x) \Gamma(x) m^{-x} n^{-x},$$

en vertu de l'équation (4), tandis que le dénominateur s'exprime par

$$\theta_m(x) \Gamma(x) m^{-x},$$

en vertu de l'équation (3). En substituant ces valeurs, on aura

$$\theta_m(x) \theta_n\left(\frac{x}{m}\right) \theta_n\left(\frac{x+1}{m}\right) \dots \theta_n\left(\frac{x+m-1}{m}\right) = \theta_{mn}(x) n^{\frac{m-1}{2}},$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{\theta_m(x)}{\sqrt{m}} \frac{\theta_n\left(\frac{x}{m}\right)}{\sqrt{n}} \frac{\theta_n\left(\frac{x+1}{m}\right)}{\sqrt{n}} \dots \frac{\theta_n\left(\frac{x+m-1}{m}\right)}{\sqrt{n}} = \frac{\theta_{mn}(x)}{\sqrt{mn}},$$

et si l'on désigne $\frac{\theta_n(x)}{\sqrt{n}}$ par $\sigma_n(x)$, on trouve définitivement

$$(5) \quad \sigma_m(x) = \frac{\sigma_{mn}(x)}{\sigma_n\left(\frac{x}{m}\right) \sigma_n\left(\frac{x+1}{m}\right) \dots \sigma_n\left(\frac{x+m-1}{m}\right)},$$

où naturellement $\sigma_n(x) = \sigma_n(x+1)$. Pour $n = \infty$, la fonction $\sigma_n(x)$ ne pourra dépendre que de x , et, en posant $\lim \sigma_n(x) = \frac{1}{f(x)}$, l'équation (5) fournira, pour $n = \infty$,

$$(6) \quad \sigma_m(x) = \frac{f\left(\frac{x}{m}\right) f\left(\frac{x+1}{m}\right) \dots f\left(\frac{x+m-1}{m}\right)}{f(x)},$$

où $f(x) = f(x+1)$. On s'assure aisément que cette expression de $\sigma_m(x)$ satisfait identiquement à l'équation (5), pour chaque valeur de m et de n . C'est donc l'expression la plus générale de la fonction $\sigma_m(x)$.

D'après cela, l'équation (3) pourra prendre la forme

$$\begin{aligned} & \Gamma\left(\frac{x}{n}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right) \\ &= n^{\frac{1}{2}-x} \Gamma(x) \frac{f\left(\frac{x}{n}\right) f\left(\frac{x+1}{n}\right) \dots f\left(\frac{x+n-1}{n}\right)}{f(x)}. \end{aligned}$$

Mais le premier membre ne devient assurément infini pour aucune valeur de x , à partie réelle positive et finie; quant au second membre, le facteur $n^{\frac{1}{2}-x}\Gamma(x)$ possède la même propriété; donc, ou le second facteur

$$\frac{f\left(\frac{x}{n}\right)f\left(\frac{x+1}{n}\right)\dots f\left(\frac{x+n-1}{n}\right)}{f(x)},$$

qui est une fonction périodique, ne doit pas non plus devenir infini, et par conséquent ne sera qu'une constante a_n , indépendante de x ; ou les infinis de ce facteur doivent coïncider *tous* avec les zéros de $\Gamma(x)$, de sorte que le produit de ce facteur par $\Gamma(x)$ reste toujours fini : mais alors les infinis dont il s'agit, et la manière dont se comporte la fonction périodique dans ces infinis, seraient indépendants de n ; ce qui est évidemment inadmissible. On doit donc admettre définitivement

$$\frac{f\left(\frac{x}{n}\right)f\left(\frac{x+1}{n}\right)\dots f\left(\frac{x+n-1}{n}\right)}{f(x)} = a_n.$$

On tire de là, en remplaçant x successivement par $\frac{x}{m}$, $\frac{x+1}{m}$, ..., $\frac{x+m-1}{m}$ et faisant la multiplication des résultats,

$$\frac{f\left(\frac{x}{mn}\right)f\left(\frac{x+1}{mn}\right)\dots f\left(\frac{x+mn-1}{mn}\right)}{f\left(\frac{x}{m}\right)f\left(\frac{x+1}{m}\right)\dots f\left(\frac{x+m-1}{m}\right)} = a_n^m,$$

où le premier membre est évidemment égal à $\frac{a_{mn}}{a_m}$. Donc, en échangeant entre elles les lettres m , n , on trouve

$$a_{mn} = a_m a_n^m = a_n a_m^n,$$

et on en conclut aisément

$$n^{-1}\sqrt[n]{a_n} = m^{-1}\sqrt[m]{a_m} = \text{constante absolue } a.$$

c'est-à-dire $a_n = a^{n-1}$. La formule (1), devenue maintenant

$$\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2}-x}\Gamma(x)a^{n-1}.$$

permet de déterminer a par les valeurs $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$: il suffit d'admettre $x = 1$, $n = 2$, et on trouve

$$a = \sqrt{2\pi}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

A notre connaissance, on n'a pas encore cherché le terme complémentaire dans le produit qui représente $\Gamma(x)$. En nous bornant au cas de la variable réelle, nous avons trouvé, au moyen d'une méthode générale, le résultat suivant

$$\Gamma(x+1) = \frac{1 \cdot 2 \dots n}{(x+1)(x+2) \dots (x+n)} (n+1)^x \\ \times \frac{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{x+n}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{x+1}} \left[\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^x} \right]^{\theta},$$

où $0 < \theta < 1$.

Sur les courbes de Clebsch dont les coordonnées s'expriment en fonction elliptique d'un paramètre; par M. G. HUMBERT.

(Séance du 18 novembre 1881.)

Considérons les cinq fonctions

$$\begin{aligned} P_1(z) &= \theta_1(z), \\ P_2(z) &= \theta_1\left(z + \frac{\omega}{5}\right), \\ P_3(z) &= \theta_1\left(z + \frac{2\omega}{5}\right), \\ P_4(z) &= \theta_1\left(z + \frac{3\omega}{5}\right), \\ P_5(z) &= \theta_1\left(z + \frac{4\omega}{5}\right). \end{aligned}$$

Les fonctions θ_i sont formées avec les périodes ω, ω' .

Les fonctions $P(z)$ satisfont aux relations

$$\begin{aligned} P_{m+1}(z + \omega) &= P_{m+1}(z), \\ P_{m+1}(z + \omega') &= P_{m+1}(z) e^{\frac{-2i\pi z}{\omega}} q^{-1} e^{\frac{-2m\pi i}{5}}. \end{aligned}$$

On en conclut aisément les cinq relations suivantes, du second degré,

$$(1) \quad \begin{cases} P_1^2 = aP_2P_3 + bP_3P_1, \\ P_2^2 = aP_3P_1 + bP_1P_2, \\ P_3^2 = aP_1P_2 + bP_2P_1, \\ P_1^2 = aP_2P_3 + bP_1P_2, \\ P_2^2 = aP_1P_2 + bP_2P_3. \end{cases}$$

a est une constante qui dépend de q , et $b = -\frac{1}{a}$.

On a aussi une équation de troisième degré, de la forme

$$(2) \quad P_2^3 + \lambda P_1P_2P_3 = \mu P_1P_1^2 + \nu P_2P_3^2,$$

que l'on ne peut déduire d'une combinaison linéaire des précédentes, multipliées par des facteurs du premier degré en $P_1, P_2, \dots, P_3$.

Dans cette dernière équation, λ, μ et ν sont des constantes faciles à exprimer en fonction de a .

On a ainsi six équations, entre lesquelles on éliminera $P_1^2, P_2^2, P_1P_3, P_1P_2, P_2P_3$; on obtiendra ainsi une relation entre les trois fonctions P_1, P_2 et P_3 .

Le résultat de cette élimination est évidemment le déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & bP_3 & aP_2 & P_1^2 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & P_2^2 - P_1P_3 \\ 0 & 0 & 0 & aP_2 & bP_1 & P_3^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -aP_3 & bP_1P_2 \\ 0 & 0 & 1 & -aP_1 & 0 & bP_2P_3 \\ 0 & 0 & 0 & \mu P_1^2 & \nu P_3^2 & P_2^3 + \lambda P_1P_2P_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Effectuant, on trouve aisément

$$0 = P_1^5 + P_3^5 + a^5 P_2^5 + P_1^2 P_1^2 P_2 \left(3a^2 + \frac{1}{a^3} \right) - P_2^2 P_1 P_3 (2a + a^6).$$

On a formé ainsi une équation homogène, du cinquième degré en P_1, P_2, P_3 ; il est clair qu'on formerait de la même manière une équation analogue entre trois quelconques des fonctions P .

Il y a plus : je dis qu'il existe une relation de même nature

Des équations (1') on tirera des valeurs de P_1^2 , P_2^2 , P_1 , P_2 , de la forme

où f_1, f_1, ξ_1 sont des fonctions de X, Y, Z , homogènes et de degré marqué par l'indice.

En portant ces valeurs dans (2'), on ramènera cette équation à la forme

Si, entre les équations (1') et (3'), on élimine $P_1^2, P_3^2, P_1 P_3, P_1$ et P_3 , on trouvera une relation homogène et du cinquième degré en X, Y et Z .

Dans cette relation entreront les six arbitraires, m, n, m', n', m'', n'' et aussi α .

Or, soient x et y deux fonctions doublement périodiques d'une variable t , ayant cinq infinis et les mêmes, dans le parallélogramme des périodes, qui seront $5\omega'$ et ω .

On aura, d'après une proposition connue,

$$x = \frac{A_1 P_1(t + \alpha) + A_2 P_2(t + \alpha) + \dots + A_5 P_5(t + \alpha)}{C_1 P_1(t + \alpha) + \dots + C_5 P_5(t + \alpha)},$$

$$y = \frac{B_1 P_1(t + \alpha) + \dots + B_5 P_5(t + \alpha)}{C_1 P_1(t + \alpha) + \dots + C_5 P_5(t + \alpha)}.$$

On aura, d'après le théorème précédent, une relation du cinquième degré homogène entre les fonctions

$$A_1 P_1(t + \alpha) + \dots,$$

$$B_1 P_1(t + \alpha) + \dots$$

$$C_1 P_1(t + \alpha) + \dots$$

c'est-à-dire une équation du cinquième degré entre x et y , que l'on saura former.

Ainsi les coordonnées x et y de la *courbe de Clebsch*, du cinquième ordre, que l'on peut mettre sous la forme

$$x = a_0 + a_1 \frac{H'}{H}(t - \beta_1) + \dots + a_5 \frac{H'}{H}(t - \beta_5),$$

$$y = b_0 + b_1 \frac{H'}{H}(t - \beta_1) + \dots + b_5 \frac{H'}{H}(t - \beta_5),$$

avec $a_1 + \dots + a_5 = 0$ et $b_1 + \dots + b_5 = 0$, sont les coordonnées d'une courbe du cinquième degré, dont l'équation s'obtiendra en suivant la marche qu'on vient d'indiquer.

On sait que Clebsch a démontré que cette courbe du cinquième degré a son maximum de points doubles moins 1.

On peut déduire de ce qui précède une propriété de cette courbe.

Considérons quatre fonctions linéaires et homogènes de $P_1, P_2, \dots, P_5$.

On pourra, en les combinant linéairement, écrire

$$\begin{aligned} X &= P_1 - p \ P_3, \\ Y &= P_2 - p' \ P_3, \\ Z &= P_3 - p'' \ P_3, \\ T &= P_4 - p''' \ P_3. \end{aligned}$$

Portons les valeurs de P_1, P_2, P_3, P_4 , déduites de ces équations, dans les relations (1).

Elles prendront la forme

$$\begin{aligned} P_3^2 + P_3 F_1 + F_2 &= 0, \\ P_3^2 + P_3 F'_1 + F'_2 &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ P_3^2 + P_3 F''_1 + F''_2 &= 0. \end{aligned}$$

$F_1, F_2, F'_1, \dots, F''_2$ étant des fonctions homogènes de X, Y, Z, T de degré marqué par l'indice.

On en déduira, en éliminant P_3^2 et P_3 , les trois relations

$$\begin{vmatrix} 1 & F_1 & F_2 \\ 1 & F'_1 & F'_2 \\ 1 & F''_1 & F''_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & F_1 & F_2 \\ 1 & F'_1 & F'_2 \\ 1 & F''_1 & F''_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & F_1 & F_2 \\ 1 & F'_1 & F'_2 \\ 1 & F''_1 & F''_2 \end{vmatrix} = 0.$$

On a aussi trois relations du troisième degré et homogènes en X, Y, Z, T , mais qui doivent se réduire à deux, car, si elles étaient distinctes, on en tirerait des valeurs constantes pour $\frac{X}{T}, \frac{Y}{T}, \frac{Z}{T}$, ce qui est impossible.

Ces équations peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \Phi_3 + F''_1 \Phi_2 + F''_2 \Phi_1 &= 0, \\ \Phi_3 + F''_1 \Phi_2 + F''_2 \Phi_1 &= 0, \\ \Phi_3 + F''_1 \Phi_2 + F''_2 \Phi_1 &= 0. \end{aligned}$$

On ne conservera que les deux suivantes :

$$(4) \quad \begin{aligned} & \Phi_2 (F''_1 - F''_1) + \Phi_1 (F''_2 - F''_2) = 0, \\ & \Phi_2 (F''_1 - F''_1) + \Phi_1 (F''_2 - F''_2) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi les fonctions X, Y, Z, T satisfont à deux équations homo-

gènes de troisième degré; ou bien la courbe

$$x = a_0 + a_1 \frac{\Pi'}{\Pi} (t - \beta_1) + \dots + a_s \frac{\Pi'}{\Pi} (t - \beta_s),$$

$$y = b_0 + b_1 \frac{\Pi'}{\Pi} (t - \beta_1) + \dots + b_s \frac{\Pi'}{\Pi} (t - \beta_s),$$

$$z = c_0 + c_1 \frac{\Pi'}{\Pi} (t - \beta_1) + \dots + c_s \frac{\Pi'}{\Pi} (t - \beta_s),$$

où l'on a

$$a_1 + \dots + a_s = 0,$$

$$b_1 + \dots + b_s = 0,$$

$$c_1 + \dots + c_s = 0,$$

est l'intersection de deux surfaces de troisième ordre qui ont une conique commune, car les équations (4) sont vérifiées par

$$\Phi_2 = 0, \quad \Phi_1 = 0.$$

Si entre les équations (4) on élimine Z, on trouvera en X, Y et T l'équation homogène et du cinquième degré dont nous avons parlé. Le résultat de l'élimination sera en réalité une équation du neuvième degré, qui se décomposera en une équation du cinquième et deux du second, puisqu'il y a une conique dans l'intersection.

Donc on peut dire que la courbe de Clebsch du cinquième degré est la perspective d'une partie de l'intersection de deux surfaces du troisième ordre qui ont une conique commune. Une étude plus approfondie permet de conclure que ces deux surfaces sont tangentes tout le long de cette conique, qui contient d'ailleurs le point de rencontre des directrices rectilignes de chaque surface, situées dans son plan (1).

(1) *Note de la Rédaction.* — Les formules relatives aux courbes gauches, intersection complète ou partielle de deux surfaces algébriques, montrent facilement que, si deux surfaces cubiques sont tangentes tout le long d'une conique, elles se coupent en outre suivant une quintique, qui est en général du genre *deux*. Ce genre s'abaisse à *un* si le point de rencontre des directrices rectilignes de chaque surface, situées dans le plan de la conique, est sur la conique; d'où il faut conclure que ce fait a lieu comme l'indique l'auteur. On sait d'ailleurs que la quintique du genre *un* est l'intersection partielle de deux surfaces cubiques qui ont déjà une courbe gauche du quatrième degré commune à trois points doubles apparents: comme cas particulier, la quintique est encore du genre *un*, si les deux surfaces passent l'une et l'autre par deux coniques qui aient, sur la droite d'inter-

Remarque. — Le procédé de calcul donné plus haut pour former une relation entre trois des fonctions $P_1, P_2, \dots, P_3$ peut aisément se généraliser.

On arrive ainsi à former l'équation d'ordre n qui lie les coordonnées x et y des courbes de Clebsch à n transcendentes.

Théorème d'Arithmétique; par M. WEILL.

(Séance du 3 décembre 1881.)

Si un nombre N est décomposé en plusieurs parties, de manière que l'on ait

$$N = \alpha + \beta + \dots + pq + p_1q_1 + \dots + rst,$$

l'expression $(1.2.3 \dots N)$ est divisible par le produit

$$(1.2.3 \dots \alpha)(1.2.3 \dots \beta) \dots (1.2.3 \dots p)^q (1.2.3 \dots q) \dots (1.2.3 \dots p_1)^{q_1} \\ \times (1.2.3 \dots q_1) \dots (1.2.3 \dots r)^t (1.2.3 \dots s)^t (1.2.3 \dots t).$$

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

SÉANCE DU 3 JUIN 1881.

PRÉSIDENCE DE M. LACRÉPPE.

Élections : MM. Bréguet, Briot (F.), Defforges, Lecomte, Pellat, Schoute, présentés dans la dernière séance par MM. Picquet et Fouret, sont élus membres de la Société.

Section de leur pôle, on peut reconnaître ce qui arrive lorsque, sur chaque surface, on trace deux courbes orthogonales, situées dans deux plans respectifs, et se rencontrant aux

E. P.

Communication :

M. Stephanos : *Sur la représentation des cercles par des points de l'espace.*

SÉANCE DU 17 JUIN 1881.

PRÉSIDENTE DE M. LEMONNIER.

Communications :

M. Jordan : *Sur les conditions de convergence de certaines séries multiples.*

M. Halphen : *Sur un Mémoire de Riemann.*

SÉANCE DU 1^{er} JUILLET 1881.

PRÉSIDENTE DE M. LEMONNIER.

Élections : MM. Gruey, Ducup de St-Paul, Sonine, Starkoff, présentés dans la dernière séance par MM. Lemonnier et Picquet, sont élus membres de la Société.

M. Genty adresse un Mémoire *Sur les courbes gauches unicursales.*

Communication :

M. Jordan : *Sur la réduction des formes quadratiques.*

SÉANCE DU 13 JUILLET 1881.

PRÉSIDENTE DE M. LAGUERRE.

Élections : MM. Amigues, Astor, Lacor, de Longchamps, Ribot, présentés dans la dernière séance par MM. Lemonnier et Picquet, sont élus membres de la Société.

M. Sonine adresse une Note *Sur une formule de Gauss.*

Communication :

M. Stephanos : *Sur certaines figures déterminées par six points d'une conique.*

OUVRAGES ET MÉMOIRES REÇUS DEPUIS LE 20 MAI 1881.

M. Catalan : *Note sur les nombres premiers.*

M. Pellet : *Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Paris.* Clermond-Ferrand, 1878.

Tijdschrift voor vormleer rekenkunde en de beginselen der Wiskunde. Groningue. Versluys, 1880.

Archiv for Mathematik og Naturvidenskal (Université royale de Norvège, à Christiania).

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME IX.

	Pages.
État de la Société mathématique de France au mois de janvier 1881	5
Note sur le nombre des marches rentrantes que l'on peut obtenir en remplis- sant successivement les deux demi-échiquiers rectangulaires ayant pour frontière commune l'une des médianes de l'échiquier total; par M. E. LA- QUIÈRE	11
Note sur la marche du cavalier dans un échiquier; par M. DE POLIGNAC.....	17
Sur une généralisation de la théorie des fractions continues algébriques (suite); par M. G. HUMBERT	24
Formules et considérations diverses se rapportant à la théorie des ramifica- tions (suite); par M. DE POLIGNAC	30
Sur une formule de M. Hermite; par M. G. HUMBERT.....	42
Remarque sur le frottement d'une corde sur un cylindre, lorsque tous deux tournent avec une grande vitesse; par M. LÉAUTÉ.....	46
Sur certaines directions de transversales des courbes algébriques qui corres- pondent aux axes des coniques; par M. STEPHANOS.	49
Sur la fonction $(x-1)^a$; par M. G. HUMBERT.....	56
Sur la représentation analytique des substitutions; par M. DE POLIGNAC.....	59
Sur la règle de multiplication des déterminants; par M. LE PAIGE.....	67
Démonstrations élémentaires des lois fondamentales de la probabilité des écarts dans les méthodes expérimentales; par M. E. LAQUIÈRE.....	69
Extraits des procès-verbaux (séances du 6 novembre 1880 au 20 mai 1881)..	89
Problème concernant les courbes planes du troisième degré; par M. HALPHEN.	96
Sur les conditions de convergence de certaines séries multiples; par M. JOR- DAN.....	113
Étude sur les courbes gauches unicursales; par M. GENTY	115
Note sur une formule de Gauss; par M. N. SONINE.....	162
Sur les courbes de Clebsch dont les coordonnées s'expriment en fonction el- liptique d'un paramètre; par M. G. HUMBERT.....	166
Énoncé d'un théorème d'arithmétique; par M. WEILL.....	172
Extraits des procès-verbaux (Séances du 3 juin au 15 juillet 1881).....	172

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME IX.



BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE.

COMMISSION D'IMPRESSION.

(ART. 30 DU RÈGLEMENT ADMINISTRATIF.)

MM. PICQUET,	{	Secrétaires de la Société.
POLIGNAC (nd).		
COLLIGNON,	{	Membres du Conseil.
HATON DE LA GOUPILLIÈRE,		
JORDAN,		
MANHEIM.		

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE,

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME DIXIÈME. — ANNÉE 1881-82.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1882

REVUE

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE BRUXELLES

CHATELAIN

1881

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU MOIS DE JANVIER 1882 (').

Les initiales S. P. désignent les Sociétaires perpétuels.

Président.....	M. HALPHEN.
Vice-Présidents	{ M. ANDRÉ (Désiré). M. FOURET. M. LUCAS. M. PERRIN.
Secrétaires	{ M. PICQUET. M. POLIGNAC (DE).
Vice-Secrétaires.....	{ M. HUMBERT. M. WEILL.
Archiviste	M. STEPHANOS.
Trésorier.....	M. CLAUDE-LAFONTAINE.
Membres du Conseil	{ M. OSSIAN BONNET. M. CLAYEUX. M. COLLIGNON. M. DARBOUX. M. FABRE. M. DE LA GOURNERIE. M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. M. JORDAN. M. LAGUERRE. M. LAISANT. M. MANNHEIM. M. ROUCHÉ.
Membres du Conseil non résidents..	{ M. AOUST (l'abbé). M. CREMONA. M. LEMONNIER. M. WEYR (Émile).

(') MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

- ACHARD**, directeur-adjoint de la Compagnie d'assurances sur la vie *la Foncière*, rue de Chabrol, 40, à Paris.
- AMIGUES**, professeur de Mathématiques spéciales, au Lycée, boulevard du Musée, 66, à Marseille.
- ANDRÉ** (Désiré), docteur ès Sciences, rue Gay-Lussac, 25, à Paris.
- ANTOINE** (Charles), ingénieur de la Marine, à Brest.
- Aoust** (l'abbé), professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille.
- APPELL**, maître de conférences à l'École Normale supérieure, rue Soufflot, 22, à Paris.
- ARON** (Henri), banquier, rue de Grammont, 14, à Paris.
- ASSELIN**, élève externe à l'École des Mines, rue Notre-Dame-des-Champs, 83, à Paris.
- ASTOR**, professeur de Mathématiques spéciales, au Lycée, rue Rancher, 2, à Nice.
- BENOIST** (Adolphe), docteur en droit, place du Châtelet, à Chalon.
- BERDELLE**, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).
- BERTRAND** (Joseph), secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, rue de Seine, 6, à Paris.
- BISCHOFFSHEIM**, banquier, rue Taitbout, 3, à Paris, S. P.
- BIENAYMÉ** (Arthur), ingénieur de la Marine, à Toulon (Var).
- BIENAYMÉ**, membre de l'Institut (décédé), S. P.
- BONCOMPAGNI** (le prince Balthazar), place Colonna, palais Piombino, à Rome.
- BONNET** (Ossian), membre de l'Institut, boulevard Saint-Michel, 80, à Paris.
- BORCHARDT**, membre de l'Académie des Sciences de Berlin (décédé), S. P.
- BOUCHER**, ancien directeur de l'École préparatoire des Sciences et Lettres, rue du Pin, 9, à Angers.
- BOULANGER**, professeur de Mathématiques, boulevard Saint-Michel, 103, à Paris.
- BRAULT** (A.), négociant à Pons (Charente-Inférieure).
- BRÉGUET**, membre de l'Institut, quai de l'Horloge, 39, à Paris.
- BRÉHARD**, architecte, boulevard Malesherbes, 16, à Paris.
- BRIOT** (F.), capitaine d'infanterie de la Marine, à Cherbourg.
- BRISSE** (A.), ingénieur du dessèchement du lac Fucino, Abruzzes (Italie).
- BRISSE** (Ch.), répétiteur à l'École Polytechnique, rue Denfert-Rochereau, 22, à Paris.
- BROCARD**, capitaine du Génie, à Alger, S. P.
- CARON**, professeur de Géométrie descriptive, rue Claude-Bernard, 52, à Paris.
- CATALAN**, professeur à l'Université, à Liège (Belgique).
- CHARLES**, membre de l'Institut (décédé), S. P.
- CHEMIN**, ingénieur des Ponts et Chaussées, rue de Rennes, 89, à Paris.
- CIVIALE**, rue de la Tour-des-Dames, 2, à Paris.
- CLAYEUX**, intendant divisionnaire, avenue de Clichy, 52, à Paris.
- CLAUDE-LAFONTAINE**, banquier, rue de Trévise, 32, à Paris, S. P.
- COLLET**, professeur à la Faculté des Sciences, à Grenoble.
- COLLIGNOV**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, rue des Saints-Pères, 28, à Paris.
- COMBEROUSSE** (DE), professeur à l'École Centrale, rue Blanche, 45, à Paris.
- COURCELLES**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, rue de Rennes, 68, à Paris.
- CREMONA**, directeur de l'École des Ingénieurs, à Rome.
- CRETIN**, professeur au lycée Saint-Louis, rue de Seine, 63, à Paris.
- DARBOUX**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.
- DEFFORGES**, capitaine d'infanterie, attaché à l'Etat-major du Ministre de la Guerre, rue de Grenelle Saint-Germain, 123, à Paris.
- DESQ**, capitaine d'Artillerie, à Besançon.
- DEWULF**, lieutenant-colonel, chef du Génie, à Montpellier.
- DOSTOR**, docteur ès sciences, rue de Rennes, 121, à Paris.
- DURRANDE**, professeur à la Faculté des Sciences, à Poitiers.
- ESCARY**, professeur au Prytanée militaire, à la Flèche (Sarthe).
- FABRE**, ancien élève de l'École Polytechnique, avenue Trudaine, 26, à Paris.
- FLOQUET**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Jeanne-d'Arc, 9, à Nancy.
- FLYE SAINTE-MARIE**, répétiteur à l'École Polytechnique, rue du Sommerard, 12, à Paris.
- FONTÈS**, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Villefranche (Haute-Garonne).

- FOURET**, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Washington, 16, à Paris.
- GARIEL**, ingénieur des Ponts et Chaussées, agrégé de la Faculté de Médecine, rue Joffroy, 39, à Paris-Batignolles.
- GAUTHIER-VILLANS**, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris, S. P.
- GENTY**, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Oran.
- GERONO**, rue Hallé, 40 et 42, à Paris.
- GIROD (A.)**, ingénieur des Manufactures de l'État, rue de Vaugirard, 23, à Paris.
- COFFART**, boulevard des Batignolles, 84, à Paris.
- GOURNERIE (DE LA)**, membre de l'Institut, boulevard Saint-Michel, 75, à Paris.
- COURSAT**, professeur à la Faculté des Sciences, boulevard d'Arcole, 16, à Toulouse.
- GRAINDORGE**, professeur à l'Université, rue Paradis, 92, à Liège (Belgique).
- GRUEY**, doyen de la Faculté des Sciences, à Clermont-Ferrand.
- GUCCIA (Jean)**, via Ruggiero Settimo, 28, à Palerme (Sicile).
- GUELOT**, chef de bataillon, commandant le 10^e bataillon de chasseurs à pied, à Saint-Dié (Vosges).
- GUNTHER (Dr Sigismond)**, député au Reichstag allemand, à Ansbach (Bavière).
- HAAG**, répétiteur à l'École Polytechnique, avenue de Villars, 15, à Paris.
- HALPUEN**, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Sainte-Anne, 51, à Paris, S. P.
- HATON DE LA GOUPILLIÈRE**, ingénieur en chef des Mines, rue Garancière, 8, à Paris, S. P.
- HATT**, ingénieur hydrographe, rue de l'Université, 13, à Paris.
- HENRY**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Privas (Ardèche).
- HERMARY**, chef d'escadrons au 17^e régiment d'Artillerie, à Douai (Nord).
- HERMITE**, membre de l'Institut, rue de la Sorbonne, 2, à Paris, S. P.
- HILAIRE**, professeur de Mathématiques, rue d'Arras, 4, à Douai (Nord).
- HIRST**, directeur des études de l'École navale, à Greenwich (Angleterre), S. P.
- HOLST (Elling)**, stipendiat de l'Université, à Christiania (Norvège).
- HOUBIGANT**, chef de bataillon du Génie en retraite, rue Lecourbe, 88, à Paris.
- HUGO (Comte L.)**, traducteur au Ministère des Travaux publics, rue des Saints-Pères, 14, à Paris.
- HUNBERT**, élève-ingénieur des Mines, rue Notre-Dame-des-Champs, 83, à Paris.
- HUYOT**, ingénieur des Mines, rue du Cirque, 10, à Paris.
- IMBER**, répétiteur à l'École centrale, boulevard Beaumarchais, 109, à Paris.
- JACQUIER**, ingénieur des Ponts et Chaussées, cours Saint-Jean, 170, à Bordeaux.
- JANIN**, capitaine au 32^e régiment d'Artillerie, à Orléans.
- JAVARY**, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, rue du Cardinal-Le-moine, 28, à Paris.
- JORDAN**, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique, rue de Varannes, 48, à Paris, S. P.
- JOUFFRET**, chef d'escadron d'Artillerie, à Palaiseau (Seine-et-Oise).
- JUNG**, professeur à l'Institut technique supérieur, à Milan (Italie).
- KANTOR (S.)**, privat-docent à l'École polytechnique allemande, à Prague.
- KÜHLER**, directeur de l'École préparatoire de Sainte-Barbe, rue de Reims, 6, à Paris.
- KÖNIGS**, élève à l'École Normale supérieure, rue d'Ulm, 45, à Paris.
- LACOR**, chargé de cours à la Faculté libre des Sciences, rue des Pyramides, 4, à Lille.
- LAFFON DE LADÉBAT**, amiral (décédé), S. P.
- LAGUERRE**, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Michel, 61, à Paris.
- LAISANT**, député, rue de l'Aqueduc, 5, à Paris.
- LAQUIÈRE**, administrateur de la commune mixte de la Mekerra, à Gidi-bel-Abbès (Algérie).
- LAUTH**, manufacturier, à Thann (Alsace).
- LAVEISSIÈRE**, élève externe à l'École des Mines, rue de la Verrerie, 58, à Paris.
- LÉAUTÉ**, directeur des études à l'école Monge, 145, boulevard Malesherbes, à Paris.
- LEBON (Ernest)**, professeur au lycée Charlemagne, rue Monge, 121, à Paris.
- LECORNU**, ingénieur des Mines, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Caen (Calvados).

- LEFÈVRE, professeur au lycée, place Reggio, 7, à Bar-le-Duc.
LEMOINE, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Cherche-Midi, 55, à Paris.
LENOXIER, professeur à la Faculté des Sciences, rue des Carrières Saint-Gilles, 11, à Caen.
LE PIAGE, professeur à l'Université, rue des Anges, 21, à Liège (Belgique).
LESPAILLY, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux.
LEVY (Maurice), professeur à l'École Centrale, boul. Saint-Germain, 138, à Paris.
LEZ (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
LINIÈRE, professeur à l'Université, à Odessa (Russie).
LINDEMANN, professeur à l'Université, Mottkestrasse, 13, à Fribourg-en-Brisgau (Allemagne).
LOVICHAMPS (GONNIERE DE), professeur de Mathématiques spéciales au lycée Charlemagne, rue Gay-Lussac, 35, à Paris.
LOREN, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du faubourg Saint-Honoré, 185, à Paris.
LUCAS, professeur au lycée Saint-Louis, rue du Bellay, 2, à Paris.
MALLEY, professeur au collège Stanislas, avenue de Montsouris, 2, à Paris.
MALLON, rue de l'Estrapade, 11, à Paris.
MILNSTRÉN, conseiller d'État, à Upsal (Suède).
MAYMIEU, professeur à l'École Polytechnique, rue de la Pompe, 11, à Paris-Passy, S. P.
MARSILLY (le général de), rue Chante-Pinot, à Auxerre.
MATHIEU (Emile), professeur à la Faculté des Sciences, rue du Faubourg-Saint-Jean, 11, à Nancy.
MIGNON, chef d'escadron d'Artillerie, chef d'état-major de l'Artillerie du 19^e corps, à Vincennes.
MITTIG-LEFFLER, professeur à l'Université, à Helsingfors (Finlande).
MONTAUD, examinateur à l'École Polytechnique, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
MURRO (Enrico de'), professeur à l'Université, piazza Statuto, 17, à Turin.
PARMENTIER (le général), membre du Comité des fortifications, rue du Cirque, 5, à Paris.
PIERRE, ingénieur des Mines, avenue de l'Opéra, 16, à Paris.
PIRELLI, professeur à la Faculté des Sciences, à Clermont-Ferrand.
PIRELLI, capitaine d'Artillerie, à l'École spéciale militaire, à Saint-Cyr.
PIRELLI, ingénieur des Mines, rue de Grenelle, 80, à Paris.
PIRELLI (Joseph), avenue d'Emberg, 7, à Paris, S. P.
PIRELLI, secrétaire de la Faculté des Sciences, à la Sorbonne, à Paris.
PIRELLI (Emile), professeur suppléant à la Faculté des Sciences, rue Michelet, 13, à Paris.
PIRELLI, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Michel, 103, à Paris.
PIRELLI DE, capitaine d'Artillerie, rue Monthourin, 20, à Versailles.
PIRELLI, prince C. de, rue Mironneuil, 11, à Paris, S. P.
PIRELLI, professeur au lycée, à Poitiers.
PIRELLI DE, sous-intendant militaire, à Evreux.
PIRELLI (Bartholomée), professeur à l'Université, à Oxford (Angleterre).
PIRELLI, membre de l'Institut, boulevard Saint-Michel, 51, à Paris.
PIRELLI le général, commandant l'École d'application de l'Artillerie et du Génie, à Fontainebleau (Seine-et-Marne).
PIRELLI, rue de Tournon, 11, à Paris.
PIRELLI DE, directeur-général de la Compagnie d'assurances le Soleil, rue de Châteaudun, 11, à Paris.
PIRELLI (baron de), banquier, rue de la Bourse, 1, à Paris.
PIRELLI Casimir, professeur à l'École régimentaire du Génie, boulevard de la Reine, 23, à Versailles.
PIRELLI, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Aix (Bouches-du-Rhône).
PIRELLI, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, rue Jacotot, 1, à Dijon.
PIRELLI, ingénieur à la Manufacture des tabacs, quai d'Orsay, à Paris.
PIRELLI, membre de l'Institut, au Ministère des Finances, à Paris.

ROUART, ingénieur civil, boulevard Voltaire, 137, à Paris.
ROUCHÉ (Eugène), professeur à l'École Centrale, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 213, à Paris.
ROUSSELIN, professeur au lycée Fontanes, rue de la Ferme-des-Mathurins, 5, à Paris.
ROUX, architecte, rue de l'Arcade, 25, à Paris.
SAINT-PAUL (DECCY DE), capitaine au 36^e régiment d'Artillerie, à Clermont-Ferrand.
SALTEL (Louis), maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Bordeaux.
SARRAU, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Bondy, 24, à Paris.
SARTIAUX, ingénieur des Ponts et Chaussées, à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
SCHLEGEL (Dr Victor), à Waren (Allemagne).
SCHOUTE, professeur à Groningue (Hollande).
SCHUBERT, professeur, Steindam, 89, à Hambourg (Allemagne).
SÉGUY, rue Pascal, 2, à Paris.
SIVERING (Jos.), ingénieur en chef des travaux publics, place du Saint-Esprit, 9, à Luxembourg.
SONINE (Nicolas), professeur à l'Université, à Varsovie (Russie).
STARNOFF (Alexis), professeur à l'École de Commerce, rue Forgowaia, 49, à Odessa (Russie).
STEPHAN, directeur de l'Observatoire, à Marseille.
STEPHANOS (Dr Cyparissos), rue de l'Arbalète, 28, à Paris.
STUDNICKA, professeur à l'Université, à Prague (Bohême).
TANNERY (Paul), ingénieur des Manufactures de l'État, au Havre, S. P.
TANNERY, professeur suppléant à la Faculté des Sciences, boulevard Saint-Michel, 141, à Paris.
TERRIER, professeur de Mathématiques, rue Monsieur-le-Prince, 18, à Paris.
TISSOT, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, à Pont-de-Claix (Isère).
TISSERAND, membre de l'Institut, avenue de l'Observatoire, 5, à Paris.
TRESCA, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Saumur (Maine-et-Loire).
TURQUAN, docteur ès sciences, rue Volney, 2, à Angers.
VACQUANT, inspecteur général de l'Université, boulevard Saint-Michel, 12, à Paris.
VANECEK, professeur au lycée, à Jicin (Bohême).
VAZELLE, ancien élève de l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 26, à Paris.
VICAIRE, ingénieur des Mines, rue Gay-Lussac, 30, à Paris.
VOLLOT (Jules), professeur de Mathématiques au lycée, à Alger.
WALCKENAER, élève-ingénieur des Mines, boulevard Haussmann, 135, à Paris.
WEILL, professeur de Mathématiques, rue de Rome, 14, à Paris.
WEYR (Dr Édouard), professeur à l'École Polytechnique, à Prague (Bohême).
WEYR (Dr Émile), professeur à l'Université, Marokkanergasse, 1, à Vienne (Autriche).
WORMS DE ROMILLY, ingénieur des Mines, rue de Balzac, 7, à Paris.
ZEUTHEN, professeur à l'Université, Citadelsvej, 9, à Copenhague.

Modifications survenues depuis le 1^{er} janvier 1881.

DÉCÉDÉS.

BIENAYMÉ (Alexis), chef de bataillon du Génie.
SAINTÉ CLAIRE-DEVILLE, membre de l'Institut.

DÉMISSIONNAIRES.

BACH, doyen de la Faculté des Sciences, à Nancy.
BOUFFET, ingénieur des Ponts et Chaussées.

BOURGET, recteur de l'Académie d'Aix (art. 42 du règlement administratif).
BRIOSCHI, directeur de l'Ecole polytechnique de Milan (art. 42 du règlement administratif).
CABERT (Maurice).
LEFEBURE DE FOURCY.
MONTIGNY (de), capitaine du Génie.
NICOLAÏDES, professeur à l'Université d'Athènes (art. 42 du règlement administratif).
SVILOKOSSITCH, ingénieur (art. 42 du règlement administratif).
THERY, professeur au lycée de Douai.
WELSCHE, capitaine d'Artillerie (art. 42 du règlement administratif).

NOUVEAUX MEMBRES.

AMIGUES, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Marseille.
ASSELIN, élève externe à l'Ecole des Mines.
ASTOR, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Nice.
BONCOMPAGNI (le prince Balthazar).
BRAULT, négociant.
BREQUET, membre de l'Institut.
BRIOT (F.), capitaine d'Infanterie de la Marine.
CHEMIN, ingénieur des Ponts et Chaussées.
DEFFORGES, capitaine d'Infanterie.
ESCARY, professeur au Prytanée militaire.
FLOQUET, professeur à la Faculté des Sciences de Nancy.
GOERSAT, professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.
GRUEY, doyen de la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand.
GUNTHER (Dr Sigismond), député au Reichstag allemand.
IMBER, répétiteur à l'Ecole centrale des Arts et Manufactures.
LACOR, chargé de cours à la Faculté libre des Sciences de Lille.
LAVEISSIÈRE, élève externe à l'Ecole des Mines.
LECORNU, ingénieur des Mines, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Caen.
LONGCHAMPS (GONNIERE DE), professeur de Mathématiques spéciales au lycée Charlemagne.
MALMSTÉY, conseiller d'Etat, à Upsal.
PELLET, professeur à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand.
PEROTT (Joseph), S. P.
PRICE (Bartholoméo), professeur à l'Université d'Oxford.
RIBOT, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Dijon.
SAINT-PAUL (DEUXIÈME), capitaine d'Artillerie.
SCHLEGEL (Dr Victor), professeur à Waren.
SCHOUTE, professeur à Groningue.
SONINK (N.), professeur à l'Université de Varsovie.
STIRKOFF (Alexis), professeur à l'Ecole de commerce d'Odessa.
ZLUTHEN, professeur à l'Université de Copenhague.

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.
Académie des Sciences de Berlin.

Académie des Sciences de l'Institut de Bologne.
Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, à Bruxelles.
Académie des Arts et des Sciences du Connecticut (Etats-Unis d'Amérique).
Académie des Sciences de Paris.
Académie Impériale des Sciences de Saint-Petersbourg.
Académie des Sciences de Prague.
Académie Royale des *Lincei*, à Rome.
Académie Impériale des Sciences de Vienne.
American Journal of Mathematics (rédacteur M. Sylvester, à Baltimore).
Annali di Matematica (rédacteur M. Brioschi, à Milan).
Archiv for Mathematik og Naturvidenskab (rédacteurs MM. S. Lie et W. Muller, à Christiania).
Casopis pro pestování matematiky a fysiky (rédacteur M. Studnicka, à Prague).
École Royale Normale supérieure de Pise.
Giornale di Matematiche (rédacteur M. Battaglini, à Naples).
Institut Royal de Luxembourg.
Institut Royal lombard des Sciences et Lettres de Milan.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (rédacteur M. Carl Ohrtmann, à Berlin).
Jornal de Sciencias Matematicas e Astronomicas (rédacteur M. Gomes Teixeira, à Coimbre).
Journal de l'École Polytechnique.
Journal für die reine und angewandte Mathematik, à Berlin.
Mathematische Annalen (rédacteur M. Felix Klein, à Leipzig).
Mathesis (rédacteurs MM. Mansion et Neubourg, à Gand).
Réunion des officiers, à Lille.
Société mathématique d'Amsterdam.
Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.
Société Royale d'Édimbourg.
Société des Sciences de Finlande, à Helsingfors.
Société Royale des Sciences de Goettingue.
Société mathématique de Hambourg.
Société hollandaise des Sciences, à Harlem (Hollande).
Société mathématique de Kharkoff (Russie).
Société astronomique de Londres.
Société mathématique de Londres.
Société Royale de Londres.
Société mathématique de Moscou.
Société mathématique d'Odessa (Russie).
Société philomathique de Paris.
Société mathématique de Prague.
Société Royale des Sciences de Saxe, à Leipzig.
Société Royale des Sciences d'Upsal.
Société des Sciences naturelles de Zurich.
Université Royale de Pise.
Tidskrift for Mathematik (rédacteur M. Zeuthen, à Copenhague).
Tijdschrift voor Vormleer rekenkunde en de beginselen der Viskunde (rédacteur M. Versluys, à Groningue).



STATUTS DE LA SOCIÉTÉ.

ARTICLE PREMIER. — La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et par la publication des mémoires de ses membres. Son siège est à Paris.

ART. 2. — Aucune communication ou discussion ne peut avoir lieu sur des objets étrangers aux Mathématiques.

ART. 3. — La Société se compose de membres résidents et de membres non résidents.

Les Français et les Étrangers peuvent également en faire partie.

ART. 4. — Les conditions à remplir pour devenir membre de la Société sont les suivantes : 1° être présenté par deux membres qui auront adressé une demande signée; 2° obtenir à l'une des séances suivantes les suffrages de la majorité des membres présents.

ART. 5. — Le nombre des membres résidents et non résidents est illimité.

ART. 6. — L'administration de la Société est confiée à un conseil composé :

1° Des membres du bureau;

2° De douze autres membres résidents de la Société désignés par l'élection;

3° De quatre membres non résidents désignés par l'élection; ils auront voix délibérative dans le conseil lors de leur présence à Paris.

ART. 7. — Le conseil est présidé par le président de la Société.

ART. 8. — Le bureau est composé de :

- 1 président;
- 4 vice-présidents;
- 2 secrétaires;
- 2 vice-secrétaires;
- 1 trésorier;
- 1 archiviste.

ART. 9. — Le président est élu pour un an.
Les vice-présidents sont nommés pour deux ans.
Deux d'entre eux sont remplacés chaque année.
Les secrétaires et les vice-secrétaires sont élus pour deux ans.
Le trésorier et l'archiviste pour trois ans.

ART. 10. — Le président n'est pas rééligible immédiatement dans les mêmes fonctions.

ART. 11. — Parmi les douze membres du conseil qui résident à Paris et qui ne font pas partie du bureau, quatre sont remplacés chaque année à tour de rôle.

ART. 12. — Tous les membres de la Société sont appelés à participer à l'élection du président, soit directement, soit par correspondance.

ART. 13. — Les autres membres du bureau et les membres du conseil sont élus à la majorité absolue des membres présents.

ART. 14. — Les ressources de la Société se composent : 1° de la cotisation annuelle des membres résidents et non résidents, et dont le montant est fixé par le règlement administratif de la Société; 2° du revenu du capital formé par les droits d'admission, les souscriptions perpétuelles, le produit de la vente des ouvrages édités par la Société et les dons qu'elle pourra recevoir.

ART. 15. — La Société règle annuellement le budget de ses dépenses.

Dans la première séance de chaque année, le compte détaillé des recettes et dépenses de l'année révolue sera soumis à l'approbation de la Société; ce compte rendu sera publié dans le *Bulletin*.

RÈGLEMENT ADMINISTRATIF.

CHAPITRE PREMIER.

CONDITIONS D'ADMISSION.

1. Les conditions à remplir pour devenir membre de la Société sont :
 - 1° D'être présenté par deux membres qui auront adressé une demande signée :

2° D'obtenir, à l'une des séances suivantes, les suffrages de la majorité des membres présents (art. 4 des statuts).

2. Le diplôme délivré est signé par le président, l'un des secrétaires et le trésorier, et porte le sceau de la Société.

Le trésorier remet le diplôme après l'acquittement du droit d'admission, montant à 10 francs, et de la cotisation annuelle.

CHAPITRE II.

TRAVAUX ET PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ.

Tenue des séances.

3. La Société tient ses séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances : août, septembre et octobre.

4. La première séance de janvier est consacrée spécialement aux élections pour le remplacement des membres sortants du bureau et du conseil.

5. Le tableau des jours de réunion est imprimé sur une carte adressée aux membres résidant à Paris.

Elle sera également envoyée aux membres non résidents sur leur demande personnelle.

Les membres sont convoqués à domicile pour les séances extraordinaires.

6. Pour assister à la séance, les personnes étrangères à la Société doivent être introduites, chaque fois, par un de ses membres.

7. La présence du président ou d'un vice-président, assisté d'un des secrétaires ou vice-secrétaires, suffit pour constituer le bureau à chaque séance.

8. En cas d'absence du président ou des vice-présidents, le trésorier, ou à son défaut l'archiviste, occupe le fauteuil.

En cas d'absence de tous les membres du bureau, les fonctions du président sont remplies par le plus âgé des membres du conseil présents à la séance.

En cas d'absence des secrétaires et vice-secrétaires, le président du jour désigne un des membres du conseil pour en remplir les fonctions.

9. Les procès-verbaux des séances sont rédigés dans l'intervalle d'une séance à l'autre.

Chaque séance commence par la lecture du procès-verbal de la séance précédente et de l'ordre du jour.

10. Les communications faites par les membres de la Société ont lieu dans l'ordre de leur inscription; les communications des personnes étran-

gères à la Société ont lieu après celles des membres, sauf les cas d'urgence qui seront appréciés par le bureau.

Les membres qui auront fait des communications verbales ou pris part aux discussions devront remettre des notes au secrétaire pour la rédaction du procès-verbal.

11. Dans les séances ordinaires, on ne peut traiter aucune question relative à l'administration, à moins d'une demande du conseil.

12. Toutes les observations relatives à l'administration sont adressées par écrit au président, qui en réfère au conseil, à sa plus prochaine réunion.

Bulletin.

13. La Société, préoccupée des avantages qu'elle peut offrir à tous ses membres, a décidé que le recueil intitulé : *Bulletin de la Société mathématique*, qui rend compte des mémoires présentés à la Société, sera distribué gratuitement à tous les membres résidents ou non résidents.

14. Les conventions stipulées entre le conseil de la Société et les éditeurs chargés de la publication du *Bulletin* devront être soumises à l'approbation de la Société.

Réimpression des ouvrages anciens et publication des mémoires originaux.

15. La Société, voulant concourir aux progrès des Mathématiques par tous les moyens compatibles avec son mode d'organisation, avisera aux moyens de publier successivement, et d'une manière aussi complète qu'il sera possible ou utile de le faire, les œuvres des anciens mathématiciens français ou étrangers.

La Société se réserve la faculté de publier les mémoires originaux trop étendus pour paraître dans le *Bulletin*.

16. Les publications émanant de la Société, autres que le *Bulletin*, sont délivrées à prix réduit à tous les membres de la Société résidents ou non résidents.

CHAPITRE III.

ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ.

17. Chaque élection a lieu au scrutin secret, sur un seul bulletin, et, s'il est nécessaire, au moyen de deux tours, dont le second est de ballottage. Dans le cas d'égalité de voix, le plus âgé l'emporte.

18. L'élection du président seule donne lieu au vote de tous les membres résidents ou non résidents. Tout membre qui ne peut assister à la réunion

électorale est invité à envoyer au secrétaire, avant la première séance de janvier, son suffrage individuel dans un bulletin cacheté et enfermé dans une lettre signée de lui.

Ce bulletin ne peut être ouvert qu'au moment du dépouillement du scrutin.

19. Les secrétaires ou, à leur défaut, les vice-secrétaires rédigent les procès-verbaux des séances de la Société et des séances du conseil.

20. Une commission d'impression, composée des secrétaires et de quatre membres nommés par le conseil, dirige la publication du *Bulletin* et l'impression des mémoires et communications.

21. Sous la direction du président, les secrétaires sont chargés de la correspondance pour ce qui concerne les travaux et les affaires de la Société autres que les affaires de finances : ils convoquent la Société, le conseil et les commissions quand il y a lieu, et préparent les ordres du jour.

22. La Société forme une bibliothèque et échange ses publications contre les journaux et les recueils consacrés aux Mathématiques pures et appliquées, publiés en France et à l'étranger.

23. L'archiviste est chargé de la garde des archives de la Société; il en dresse un inventaire.

Il a sous sa direction la bibliothèque; il dresse le catalogue des livres et brochures imprimés, et tient un registre des manuscrits envoyés.

Enfin, il a sous sa garde tous les documents appartenant à la Société.

24. Le trésorier est chargé du recouvrement des sommes dues à la Société.

25. Il tient un registre des recettes et des dépenses, que tous les membres ont le droit de consulter.

26. Le trésorier ne peut faire aucun emploi extraordinaire des fonds de la Société sans une délibération spéciale du conseil.

Conseil et commissions.

27. Le président convoque le conseil toutes les fois que les affaires de la Société le réclament.

28. Il suffit d'une demande motivée, signée par cinq membres du conseil et adressée au président, pour qu'une convocation du conseil soit obligatoire.

29. A chaque séance du conseil, les noms des membres présents sont consignés au procès-verbal.

30. Il faut au moins sept membres présents pour prendre des décisions en conseil.

31. Sur la proposition de cinq membres, le vote peut avoir lieu au scrutin secret.

32. Sur la demande de cinq membres, il peut être fait appel à la Société des décisions qui n'auraient pas été prises aux deux tiers des voix au sein du conseil.

33. Les procès-verbaux des séances du conseil doivent être transcrits sur un registre coté et parafé par le secrétaire; il doivent être signés par le président et le secrétaire qui a tenu la plume; les renvois doivent être parafés et les mots rayés approuvés.

34. Le conseil se réunit dans la dernière quinzaine de décembre pour examiner l'état des affaires de la Société, nommer la commission de comptabilité chargée de vérifier la gestion du trésorier, et la commission des archives chargée de vérifier celle de l'archiviste.

35. Ces deux commissions ne peuvent être composées de moins de trois membres; elles font leur rapport dans la première séance de janvier.

36. Le conseil désigne annuellement, à la même époque, les membres qui, adjoints aux deux secrétaires, composent la commission permanente d'impression pour la publication du *Bulletin* et l'insertion des notes et mémoires des membres de la Société.

Cette commission veille à ce qu'il ne s'introduise dans les publications rien d'étranger à la Science.

37. Les membres élus de la commission d'impression sont nommés pour trois ans.

Les membres de la commission d'impression peuvent être pris indistinctement dans la Société ou dans le conseil.

CHAPITRE IV.

PROPRIÉTÉS, REVENUS ET DÉPENSES DE LA SOCIÉTÉ.

38. Les versements des membres résidents et non résidents se composent :

1° Du droit d'admission, montant à 10 francs;

2° De la cotisation annuelle.

39. Pour les membres résidents, cette cotisation annuelle s'élève à 20 francs, payables d'avance, et, pour les membres non résidents, à 15 francs, également payables d'avance.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leurs occupations habituelles, ou y exercent habituellement leurs fonctions.

40. Les nouveaux membres devront payer la totalité de la cotisation, quelle que soit l'époque de leur admission.

41. Les publications ne seront adressées qu'après le versement de la cotisation annuelle.

42. Tout membre qui n'aura pas acquitté la cotisation d'une année sera, après avertissement préalable du trésorier, considéré comme démissionnaire.

43. La cotisation annuelle peut, au choix de chaque membre, être remplacée par une somme de 300 francs une fois payée.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

44. Les dons faits à la Société sont inscrits au *Bulletin des séances* avec le nom des donateurs.

45. Les dépenses sont divisées en ordinaires et extraordinaires.

Les dépenses ordinaires se composent de frais de bureau et d'imprimés, ports de lettres, frais d'entretien, loyer du local, appointements des employés et frais d'impression du *Bulletin*. Le chiffre des dépenses ordinaires ne peut excéder les $\frac{2}{3}$ des ressources annuelles.

Les dépenses extraordinaires sont votées par la Société sur la proposition du conseil.

46. La Société ne s'engage jamais dans aucune dépense excédant son avoir.

CHAPITRE V.

REVISION DES STATUTS CONSTITUTIFS OU DU RÈGLEMENT ADMINISTRATIF.

47. Toute proposition de revision des statuts constitutifs ou du règlement administratif ne pourra être prise en considération que si elle est signée collectivement par vingt membres.

48. Le président fera, dans ce cas, procéder à un scrutin pour la nomination d'une commission de revision, qui sera composée de quatre membres du conseil et de trois membres pris en dehors.

49. La discussion du projet exigera la présence de la moitié plus un des membres résidant à Paris.

Tous les membres sont convoqués par lettres spéciales.

50. Si le nombre ci-dessus n'est pas atteint, la discussion aura lieu dans la séance suivante, quel que soit le nombre des membres présents.

AVIS.

La Rédaction a l'honneur de prévenir MM. les Auteurs que le Conseil de la Société mathématique, dans sa séance du 16 décembre 1881, a pris les décisions suivantes :

1^o *La Société prendra à sa charge la moitié de la dépense des tirages à part d'auteur, pour cinquante exemplaires et au-dessous.*

2^o *Pour plus de cinquante exemplaires, la Société payera la moitié du prix de cinquante exemplaires, au tarif fixé pour le tirage à cinquante exemplaires.*

Il résulte de là que les auteurs auront à déboursier les sommes suivantes :

NOMBRE DES EXEMPLAIRES.	25.	50.	100.	200.	300.	400.	500.	1000.
Pour $\frac{1}{4}$ feuille	3,65	4,25	6,75	13,25	19,75	26,25	32,75	65,25
» $\frac{1}{3}$ »	4,15	5,00	8,50	16,00	23,50	31,00	38,50	76,00
» $\frac{1}{2}$ »	6,15	7,25	11,25	20,75	30,25	39,75	49,25	96,75
» 1 »	6,90	8,25	12,75	23,75	34,75	45,75	56,75	111,75

dont ils seront facturés directement par l'imprimerie Gauthier-Villars.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Sur les courbes d'un système linéaire trois fois infini qui touchent une courbe algébrique donnée par un contact du troisième ordre ; par M. LINDEMANN.

(Séance du 6 janvier 1882.)

Le problème dont nous allons nous occuper demande d'effectuer l'élimination des paramètres κ, λ, μ , des variables homogènes x_1, x_2, x_3 , des différentielles dx_1, dx_2, dx_3 , des différentielles du second ordre d^2x_1, d^2x_2, d^2x_3 et des différentielles du troisième ordre d^3x_1, d^3x_2, d^3x_3 , entre les équations suivantes, dans lesquelles $\varphi, \psi, \chi, \omega$ désignent des fonctions entières et homogènes d'un même ordre et f une telle fonction d'un ordre égal ou différent, savoir :

$$\begin{aligned}\varphi + \kappa\psi + \lambda\chi + \mu\omega &= 0, \\ d\varphi + \kappa d\psi + \lambda d\chi + \mu d\omega &= 0, \\ d^2\varphi + \kappa d^2\psi + \lambda d^2\chi + \mu d^2\omega &= 0, \\ d^3\varphi + \kappa d^3\psi + \lambda d^3\chi + \mu d^3\omega &= 0, \\ f &= 0, \quad df = 0, \quad d^2f = 0, \quad d^3f = 0.\end{aligned}$$

Pour y arriver, nous avons dû traiter d'abord, dans I et II, les cas où il ne s'agit que des différentielles du premier ou du deuxième ordre, cas pour lesquels les résultats sont déjà connus, mais nous les présenterons sous une forme nouvelle. III est consacré au pro-

blème proposé. La marche que nous allons suivre offre cet avantage qu'elle peut s'appliquer d'une façon analogue aux cas plus compliqués; on peut, en effet, résoudre par des calculs semblables le problème relatif à un contact d'ordre γ , après avoir abordé celui qui concerne un contact d'ordre $\gamma - 1$. Le dernier paragraphe est consacré à quelques observations auxquelles donnent lieu les résultats obtenus combinés avec la loi de réciprocité de M. Brill.

M. Krey ⁽¹⁾ s'est aussi occupé du problème actuel; il a effectué l'élimination des différentielles et des paramètres; mais il n'est pas parvenu à séparer du résultat le facteur

$$k_x^3 = (k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3)^3,$$

k_1, k_2, k_3 étant des constantes qui servent à fixer, par l'identité $k_x = 1$, les valeurs absolues des coordonnées x_1, x_2, x_3 .

1. — Contact du premier ordre.

1. Désignons par n l'ordre de la courbe primitive, et supposons qu'elle soit représentée, en coordonnées homogènes, par l'équation

$$f = 0 \quad \text{ou} \quad f(x_1 x_2 x_3) = 0.$$

Les dérivées de f par rapport à x_1, x_2, x_3 , multipliées par n , seront désignées par f_1, f_2, f_3 , de sorte que

$$f_1 = \frac{1}{n} \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad f_2 = \frac{1}{n} \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad f_3 = \frac{1}{n} \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Notre premier problème est de déterminer les courbes d'un faisceau

$$(1) \quad \varphi_0(x) + \lambda \varphi_1(x) = 0$$

qui touchent la courbe primitive. A cet effet, il suffit de déterminer sur $f = 0$ les points de contact des courbes demandées; ces points sont les points de coïncidence d'une certaine correspondance qui est donnée par notre problème entre les points x et y de $f = 0$. Par chaque point y de cette dernière passe une courbe du fais-

(1) *Mathematische Annalen*, t. X, p. 331: 1876.

ceau, donnée par l'équation

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(y) & \varphi_1(y) \\ \varphi_0(x) & \varphi_1(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Pour $y_i = x_i$, cette équation est satisfaite identiquement; nous cherchons de tels points x sur $f = 0$, pour lesquels elle est encore satisfaite si l'on pose $y_i = x_i + dx_i$ ou

$$(2) \quad f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3 = 0.$$

Par cette substitution, elle devient

$$\begin{vmatrix} \sum \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i} dx_i & \sum \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} dx_i \\ \varphi_0(x) & \varphi_1(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Les quantités dx_i sont déterminées par (2) et par une identité de la forme

$$(3) \quad k_1 dx_1 + k_2 dx_2 + k_3 dx_3 = 0,$$

les k_i étant des constantes telles que

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 = 1.$$

On tire de (2) et (3)

$$(3a) \quad \begin{cases} \rho dx_1 = f_2 k_3 - k_2 f_3, \\ \rho dx_2 = f_3 k_1 - k_3 f_1, \\ \rho dx_3 = f_1 k_2 - k_1 f_2. \end{cases}$$

Par l'introduction de ces valeurs dans notre déterminant, et en désignant par $(\varphi \psi \chi)$ le déterminant des fonctions φ, ψ, χ , on trouve

$$(4) \quad \begin{vmatrix} (\varphi_0 f k) & (\varphi_1 f k) \\ \varphi_0(x) & \varphi_1(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Il s'agit de séparer du premier membre le facteur

$$k_x = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3,$$

par lequel il doit être divisible. C'est en se servant de la notation symbolique que l'on peut effectuer cette séparation de la manière la plus facile. Faisons donc, s étant l'ordre des courbes du fais-

ceau,

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad \varphi_0(x) &= \alpha_x^s, \quad \varphi_1(x) = \beta_x^s, \quad f(x) = \alpha_x^n, \\ (\varphi_0 f k) &= ns.(\alpha k) \alpha_x^{s-1} \alpha_x^{n-1}, \\ (\varphi_1 f k) &= ns.(\beta k) \beta_x^{s-1} \alpha_x^{n-1}. \end{aligned}$$

L'équation (4) devient

$$[(\alpha k) \beta_x - (\beta k) \alpha_x] \alpha_x^{n-1} \alpha_x^{s-1} \beta_x^{s-1} = 0.$$

Relativement à l'expression entre crochets, nous opérons par l'identité

$$(\alpha k) \beta_x - (\beta k) \alpha_x = (\alpha \beta k) \alpha_x - (\alpha \beta \alpha) k_x.$$

Eu égard aux conditions $\alpha_x^n = 0$, $k_x = 1$, il vient

$$(5) \quad (\alpha \beta) \alpha_x^{n-1} \alpha_x^{s-1} \beta_x^{s-1} = 0,$$

d'où il suit que *les points de contact cherchés sont les intersections de $f=0$ avec la jacobienne des trois courbes $f=0$, $\varphi_0=0$, $\varphi_1=0$; résultat qui est d'ailleurs connu* ⁽¹⁾.

II. — Contact du deuxième ordre.

3. Nous supposons donné un système linéaire dépendant de deux paramètres, savoir

$$(6) \quad \varphi + \lambda \psi + \mu \chi = 0,$$

où

$$\varphi = \alpha_x^s, \quad \psi = \beta_x^s, \quad \chi = \gamma_x^s.$$

Dans notre édition des leçons de Clebsch ⁽²⁾, nous avons fait remarquer que l'équation de la courbe d'ordre s , qui appartient au système (6) et qui touche la courbe $f=0$ en un point x , est donnée par l'équation

$$(f\psi\chi) \cdot \varphi(y) + (f\chi\varphi) \cdot \psi(y) + (f\varphi\psi) \cdot \chi(y) = 0,$$

le point variable ayant les coordonnées y_i ; ou bien, en appliquant

⁽¹⁾ Voir CLEBSCH, *Vorlesungen über Geometrie*, t. I, p. 460, note; t. II, p. 171 dans la traduction de M. Benoist.

⁽²⁾ *Ibid.*, t. I, p. 436; t. II, p. 165 dans la traduction de M. Benoist.

la notation symbolique,

$$\{(\alpha\beta\gamma)\beta_x^{t-1}\cdot\gamma_x^{t-1}\cdot\alpha_y^t + (\alpha\gamma\alpha)\gamma_x^{t-1}\alpha_x^{t-1}\cdot\beta_y^t + (\alpha\alpha\beta)\alpha_x^{t-1}\beta_x^{t-1}\cdot\gamma_y^t\}\alpha_x^{t-1} = 0$$

Cette même formule peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(7) \quad \begin{vmatrix} \varphi(y) & \psi(y) & \chi(y) & 0 \\ \varphi_1(x) & \psi_1(x) & \chi_1(x) & f_1(x) \\ \varphi_2(x) & \psi_2(x) & \chi_2(x) & f_2(x) \\ \varphi_3(x) & \psi_3(x) & \chi_3(x) & f_3(x) \end{vmatrix} = 0,$$

où nous avons posé

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{s} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad \psi_i(x) = \frac{1}{s} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \quad \chi_i(x) = \frac{1}{s} \frac{\partial \chi}{\partial x_i}.$$

Il est aisé de vérifier que l'équation (7) satisfait, en effet, aux conditions demandées. D'abord le premier membre s'évanouit identiquement pour $y = x$, car on a

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + x_3\varphi_3 \\ \psi(x) &= x_1\psi_1 + x_2\psi_2 + x_3\psi_3 \\ \chi(x) &= x_1\chi_1 + x_2\chi_2 + x_3\chi_3 \\ f(x) &= x_1f_1 + x_2f_2 + x_3f_3 = 0. \end{aligned}$$

De même, pour $y = x + dx$, l'équation (7) est satisfaite identiquement. Car si l'on en multiplie les trois dernières lignes du déterminant respectivement par x_1 , x_2 , x_3 et si l'on retranche la somme de ces produits de la première ligne, les termes de cette dernière deviennent, en vertu de $f = 0$,

$$d\varphi(x), \quad d\psi(x), \quad d\chi(x), \quad 0.$$

Si l'on multiplie ensuite les même lignes par dx_1 , dx_2 , dx_3 et si l'on retranche encore la somme de ces produits des termes de la première ligne divisés par s , ces derniers disparaissent tous en vertu de $f = 0$. La courbe représentée par (7) a donc bien un contact du premier ordre avec $f = 0$ au point x , et elle fait partie du système (6).

4. Pour trouver maintenant les points où une courbe de ce système touche la courbe $f = 0$ par un contact de deuxième ordre, nous mettons, dans l'équation (7), les quantités

$$x_i + 2dx_i + d^2x_i$$

à la place des y_i . Les équations $f = 0$, $df = 0$, $d^2f = 0$ devant être satisfaites, les termes de la première ligne horizontale du déterminant se transforment aisément en

$$(s-1)\alpha_x^{s-2}\alpha_{dx}^2, \quad (s-1)\beta_x^{s-2}\beta_{dx}^2, \quad (s-1)\gamma_x^{s-2}\gamma_{dx}^2, \quad (n-1)a_x^{n-2}a_{dx}^2,$$

les symboles c_i étant équivalents aux symboles a_i et b_i de $f(x)$. Dans ces expressions, il faut introduire les quantités k_i à l'aide de (3); on trouve, d'après une identité connue,

$$(7^a) \quad \left\{ \begin{aligned} p^2 \alpha_{dx}^2 &= (\alpha f k)^2 = (\alpha a k)(abk) a_x^{n-1} b_x^{n-1} \\ &= \frac{1}{2} (\alpha a k)^2 a_x^{n-2} b_x^2 + \frac{1}{2} (\alpha b k)^2 b_x^{n-2} a_x^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} (abk)^2 \alpha_x^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} - \frac{1}{2} (ab\alpha)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} k_x^2 \\ &\quad + (ab\alpha)(abk) a_x^{n-2} b_x^{n-2} \alpha_x k_x. \end{aligned} \right.$$

Si l'on forme trois relations analogues en remplaçant les symboles α par β , γ , c , et si l'on transforme par elles la première ligne du déterminant, dans chaque élément de cette ligne figurent cinq termes. Les deux premiers en disparaissent à cause de $f = 0$. On peut aussi faire disparaître le troisième terme qui contient les facteurs $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$, $f(x)$ respectivement, en multipliant les trois dernières lignes du déterminant par des facteurs convenables et en ajoutant ces produits aux éléments de la première ligne.

Il ne reste donc, dans chaque élément de la première ligne, que le quatrième et le cinquième terme. Pour la quatrième colonne en particulier, ce cinquième terme est égal à

$$\begin{aligned} & (n-1)(abc)(abk) a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-1} k_x \\ &= \frac{n-1}{3} k_x [(abk)c_x - (ack)b_x - (cbk)a_x] abc a_x^{n-1} b_x^{n-2} c_x^{n-2} \\ &= \frac{n-1}{3} k_x^2 abc^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-2}, \end{aligned}$$

de sorte que l'on a, en vertu de $f = 0$, $df = 0$

$$(7^b) \quad p^2 c_x^{n-2} c_{dx}^2 = -\frac{1}{6} k_x^2 abc^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-2} = -\frac{1}{6} \Delta,$$

en désignant par Δ le covariant hessien de $f(x)$.

Multiplions maintenant les trois dernières lignes du déterminant

respectivement par

$$\begin{aligned}(s-1)(ab)_1(abb)a_x^{n-2}b_x^{n-2}.k_x, \\ (s-1)(ab)_2(abb)a_x^{n-2}b_x^{n-2}.k_x, \\ (s-1)(ab)_3(abb)a_x^{n-2}b_x^{n-2}.k_x,\end{aligned}$$

où $(ab)_1 = a_2b_3 - b_2a_3, \dots$, et retranchons les produits ainsi formés des termes de la première ligne; ceux-ci deviennent alors respectivement égaux à

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}(s-1)(ab\alpha)^2a_x^{n-2}b_x^{n-2}\alpha_x^{s-2}.k_x^2, \\ -\frac{1}{2}(s-1)(ab\beta)^2a_x^{n-2}b_x^{n-2}\beta_x^{s-2}.k_x^2, \\ -\frac{1}{2}(s-1)(ab\gamma)^2a_x^{n-2}b_x^{n-2}\gamma_x^{s-2}.k_x^2, \\ -\frac{1}{6}(n-1)\Delta k_x^2 - (s-1)(abc)(abb)a_x^{n-2}b_x^{n-2}c_x^{n-1}k_x = -\frac{n+2s-3}{6}\Delta k_x^2.\end{aligned}$$

Par ce calcul, nous avons donc séparé du déterminant un facteur k_x^2 , et les grandeurs k_i ne figurent plus dans le déterminant restant, de sorte que nous pouvons énoncer ce théorème :

Les points de la courbe $f=0$ où une courbe du réseau (6) a un contact du second ordre avec elle sont donnés par ses intersections avec une courbe d'ordre $3(n+s-3)$, savoir :

$$(8) \quad \begin{vmatrix} (s-1)\Phi & (s-1)\Psi & (s-1)X & \frac{n+2s-2}{3}\Delta \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & f_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & f_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & f_3 \end{vmatrix} = 0,$$

où

$$(8a) \quad \begin{cases} \Phi = (ab\alpha)^2a_x^{n-2}b_x^{n-2}\alpha_x^{s-2}, & \Psi = (ab\beta)^2a_x^{n-2}b_x^{n-2}\beta_x^{s-2}, \\ X = (ab\gamma)^2a_x^{n-2}b_x^{n-2}\gamma_x^{s-2}, & \Delta = (abc)^2a_x^{n-2}b_x^{n-2}c_x^{n-2}. \end{cases}$$

§. Pour nous convaincre que notre résultat concorde bien avec celui de M. Brill ⁽¹⁾, nous allons le démontrer encore d'une autre manière.

Évidemment les points cherchés de $f=0$ doivent satisfaire à

⁽¹⁾ Ueber diejenigen Curven eines Büschels, welche eine gegebene Curve zweipunktig berühren (Mathematische Annalen, t. III, 1871).

l'équation

$$(9) \quad 0 = \begin{vmatrix} \varphi(x) \\ \Sigma \varphi_i dx_i \\ \Sigma \varphi_i d^2 x_i + (s-1) \Sigma \Sigma \varphi_{ik} dx_i dx_k \end{vmatrix},$$

où nous n'avons écrit que les éléments de la première colonne, les autres colonnes étant de la même forme, et le déterminant devant être du troisième ordre. C'est par des transformations identiques de ce déterminant à l'aide des équations $f=0$, $df=0$, $d^2 f=0$, que M. Brill a déterminé les intersections de la courbe (8) avec $f=0$ par l'équation

$$0 = \frac{s-1}{2} P - (n-1)Q,$$

où

$$P = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{22} & \varphi_{33} & \varphi_{23} & \varphi_{31} & \varphi_{12} \\ \psi_{11} & \psi_{22} & \psi_{33} & \psi_{23} & \psi_{31} & \psi_{12} \\ \chi_{11} & \chi_{22} & \chi_{33} & \chi_{23} & \chi_{31} & \chi_{12} \\ 2f_1 & 0 & 0 & 0 & f_2 & f_3 \\ 0 & 2f_2 & 0 & f_3 & 0 & f_1 \\ 0 & 0 & 2f_3 & f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix},$$

$$Q = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 \end{vmatrix} \cdot \Delta.$$

Nous aurons démontré l'identité des deux résultats, lorsque nous serons parvenus à déduire l'équation (8) immédiatement de (9). Or on a, par des transformations élémentaires,

$$\begin{vmatrix} \varphi & \psi & \chi \\ d\varphi & d\psi & d\chi \\ d^2 \varphi & d^2 \psi & d^2 \chi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi & \psi & \chi & 0 & 0 & 0 \\ d\varphi & d\psi & d\chi & 0 & 0 & 0 \\ d^2 \varphi & d^2 \psi & d^2 \chi & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & 1 & 0 & 0 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & 0 & 1 & 0 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ \varphi' & \psi' & \chi' & d^2 x_1 & d^2 x_2 & d^2 x_3 \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & -1 & 0 & 0 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & 0 & -1 & 0 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

si l'on pose, pour abréger,

$$\begin{aligned}\varphi'' &= (s-1) \Sigma \Sigma \varphi_{ik} dx_i dx_k, \\ \psi'' &= (s-1) \Sigma \Sigma \psi_{ik} dx_i dx_k, \quad \chi'' = (s-1) \Sigma \Sigma \chi_{ik} dx_i dx_k;\end{aligned}$$

et, en poursuivant les transformations

$$= \frac{1}{f_1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & dx_2 & dx_3 \\ \varphi'' & \psi'' & \chi'' & \Sigma f_i d^2 x_i & d^2 x_2 & d^2 x_3 \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & -f_1 & 0 & 0 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & -f_2 & -1 & 0 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & -f_3 & 0 & -1 \end{vmatrix};$$

enfin, le déterminant $x_2 dx_3 - x_3 dx_2$ étant proportionnel à f_1 (égal à σf_1),

$$= \sigma \begin{vmatrix} \varphi'' & \psi'' & \chi'' & (n-1) \Sigma \Sigma f_{ik} dx_i dx_k \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & f_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & f_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & f_3 \end{vmatrix}.$$

Par là, nous sommes en effet retombés sur l'équation (8), pourvu que l'on y ait fait la substitution

$$y_i = x_i + 2 dx_i + d^2 x_i.$$

III. — Contact du troisième ordre.

6. En partant des résultats obtenus précédemment, il est aisé d'établir l'équation d'une courbe d'ordre s qui fait partie d'un système trois fois infini, savoir :

$$\varphi(x) + \kappa \psi(x) + \lambda \chi(x) + \mu \omega(x) = 0,$$

et qui touche la courbe $f(x) = 0$ en un point donné x , par un contact d'ordre 2. Cette équation est donnée, en variables y_i , par

$$(10) \quad \begin{vmatrix} \varphi(y) & \psi(y) & \chi(y) & \omega(y) & 0 \\ (s-1)\Phi & (s-1)\Psi & (s-1)X & (s-1)\Omega & \frac{n+2s-3}{3} \Delta \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & \omega_1 & f_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & \omega_2 & f_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & \omega_3 & f_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Les quantités Φ, Ψ, X, Δ sont encore définies par (8^a), et nous avons posé

$$\Omega = (\delta ab)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} \delta_x^{s-2}, \quad \omega(x) = \delta_x^s.$$

Évidemment l'équation (10) est satisfaite pour $y = x$ et pour $y = x + dx$. Pour prouver qu'il en est de même pour

$$y = x + 2dx + d^2x,$$

il suffit de remarquer que, d'après les calculs achevés au n° 4, les termes de la deuxième ligne horizontale du déterminant peuvent être remplacés par

$$\begin{aligned} & (s-1)x_x^{s-2}x_{dx}^2, \quad (s-1)\beta_x^{s-2}\beta_{dx}^2, \\ & (s-1)\gamma_x^{s-2}\gamma_{dx}^2, \quad (s-1)\delta_x^{s-2}\delta_{dx}^2, \quad (n-1)a_x^{n-2}a_{dx}^2. \end{aligned}$$

7. Pour trouver maintenant les points de $f = 0$ où une courbe du système proposé a avec $f = 0$ un contact du troisième ordre, il nous faut mettre $x + 3dx + 3d^2x + d^3x$ à la place de y , ou bien $d^3\varphi, \dots$, à la place de $\varphi(y), \dots$. La relation $d^3f = 0$ ou

$$(11) \quad a_x^{n-1}a_{d^3x} + 3(n-1)a_x^{n-2}a_{dx}a_{d^2x} + (n-1)(n-2)a_x^{n-3}a_{dx}^2 = 0$$

devant être satisfaite, les cinq termes de la première ligne du déterminant (10) peuvent s'écrire

$$(12) \quad \begin{cases} 3(s-1)x_x^{s-2}x_{dx}x_{d^2x} + (s-1)(s-2)x_x^{s-3}x_{dx}^2, \dots \\ 3(n-1)a_x^{n-2}a_{dx}a_{d^2x} + (n-1)(n-2)a_x^{n-3}a_{dx}^2. \end{cases}$$

De la relation (7^a), on tire, par différentiation, en multipliant d'abord par x_x^{s-2} ,

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & 2\rho^2 x_x^{s-2} x_{dx} x_{d^2x} + \rho^2 (s-2) x_x^{s-3} x_{dx}^2 + 2\rho d\rho x_x^{s-2} x_{dx}^2 \\ & = -\frac{s}{2} (abk)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} x_x^{s-1} x_{dx} \\ & \quad - (n-2)(abk)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-3} b_{dx} x_x^s \\ & \quad - (n-2)(abx)^2 a_x^{n-3} b_x^{n-2} a_{dx} x_x^{s-2} k_x^2 \\ & \quad - \frac{(s-2)}{2} (abx)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} x_x^{s-3} x_{dx} k_x^2 \\ & \quad + (abx)(abk) a_x^{n-3} b_x^{n-2} x_x^{s-2} [2(n-2)x_{dx} a_{dx} \\ & \quad \quad \quad + (s-1)a_x x_{d^2x}] k_x. \end{aligned} \right.$$

Sur le quatrième et sur le dernier terme du second membre,

nous opérons par l'identité

$$(14) \quad \rho \alpha_{dx} \alpha_x = (\alpha ck) \alpha_x = [(\alpha ca) k_x + (\alpha ak) c_x + (ack) \alpha_x] c_x^{n-1}.$$

Il vient alors, en vertu de $f = c_x^n = 0$,

$$(15) \quad \begin{cases} 2\rho^3 \alpha_x^{s-2} \alpha_{dx} \alpha_{dx} + \rho^3 (s-2) \alpha_x^{s-3} \alpha_{dx}^2 + 2\rho^2 d\rho \alpha_x^{s-2} \alpha_{dx}^2 \\ = \frac{s-2}{2} k_x^2 \Phi' + \frac{2n+s-6}{2} k_x^2 \Phi'' \\ + (2n+s-5) k_x \Phi''' + (s-1) \Phi^{iv} k_x^2 + A\varphi + B d\varphi, \end{cases}$$

en désignant par A, B des quantités qui ne contiennent plus les symboles α , et en posant

$$(15^a) \quad \begin{cases} \Phi' = (ab\alpha)^2 (ac\alpha) \alpha_x^{n-3} b_x^{n-2} c_x^{n-1} \alpha_x^{s-3}, \\ \Phi'' = (ab\alpha)^2 (ack) \alpha_x^{n-3} b_x^{n-2} c_x^{n-1} \alpha_x^{s-2}, \\ \Phi''' = (ab\alpha) (abk) (ack) \alpha_x^{n-3} b_x^{n-2} c_x^{n-1} \alpha_x^{s-1} = \Sigma R_i \varphi_i, \end{cases}$$

où

$$R_i = (ab)_i (abk) (ack) \alpha_x^{n-3} b_x^{n-2} c_x^{n-1},$$

enfin

$$\begin{aligned} \Phi^{iv} &= (ab\alpha) (abk) (\alpha ca) \alpha_x^{n-3} b_x^{n-2} c_x^{n-1} \alpha_x^{s-2} \\ &= (ab\alpha) [(ab\alpha) (kca) + (abc) (\alpha ka)] c_x \Pi \\ &= -\Phi'' + \frac{1}{2} (abc) [(ab\alpha) c_x - (ac\alpha) b_x] (\alpha ka) \Pi \\ &= -\Phi'' + \frac{1}{2} (abc) [(abc) \alpha_x + (cb\alpha) \alpha_x] (\alpha ka) \Pi \\ &= -\Phi'' + \frac{1}{2} (abc)^2 (a\alpha k) \alpha_x^{n-3} b_x^{n-2} c_x^{n-2} \alpha_x^{s-1}, \end{aligned}$$

car dans le troisième terme, qui devrait figurer au second membre, les facteurs $(cb\alpha)(\alpha ka)$ peuvent être remplacés par

$$\frac{1}{3} [(cb\alpha)(\alpha ka) - (ab\alpha)(\alpha kc) - (ca\alpha)(\alpha kb)] = \frac{1}{3} (cb\alpha)(\alpha ka) = 0.$$

Ainsi le second membre de (15) devient

$$(15^b) \quad \begin{cases} \frac{s-2}{2} k_x^2 \Phi' + \frac{2n+3s-8}{2} k_x^2 \Phi'' \\ + (2n+s-5) k_x \Phi''' + \frac{s-1}{2} k_x^2 \Phi^{iv} + B\varphi + B d\varphi, \end{cases}$$

où

$$(15^c) \quad \Phi^{iv} = (abc)^2 (a\alpha k) \alpha_x^{n-3} b_x^{n-2} c_x^{n-1} \alpha_x^{s-1} = \Sigma S_i \varphi_i.$$

8. Pour achever l'élimination des différentielles, il nous faut encore étudier l'expression $\alpha_x^{s-3} \alpha_{dx}^3$.

Les équations (3^a) et (7^a) donnent

$$\begin{aligned} \rho^3 \alpha_x^{s-3} \alpha_{dx}^3 &= (\alpha a k)(\alpha b k)(\alpha c k) \alpha_x^{n-1} b_x^{n-1} c_x^{n-1} \alpha_x^{s-3} \\ &= -\frac{1}{2} k_x^3 \cdot (ab\alpha)^2 (\alpha c k) \alpha_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-1} \alpha_x^{s-2} \\ &\quad + k_x (ab\alpha) (abk) (\alpha c k) \alpha_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-1} \alpha_x^{s-2} \\ &\quad + A' \varphi + B' d\varphi, \end{aligned}$$

et, en appliquant, pour les deux premiers termes, encore l'identité (14)

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho^3 \alpha_x^{s-3} \alpha_{dx}^3 &= \frac{1}{2} k_x^3 \Phi' - \frac{1}{2} k_x^3 \Phi'' + k_x^3 \Phi''' + k_x \Phi'''' + A' \varphi + B' d\varphi \\ &= \frac{1}{2} k_x^3 \Phi' - \frac{3}{2} k_x^3 \Phi'' + \frac{1}{2} k_x^3 \Phi''' + k_x \Phi'''' + A' \varphi + B' d\varphi. \end{aligned} \right.$$

Multiplications maintenant l'équation (15) par $\frac{3}{2}(s-1)$, et retranchons-en l'équation (16), multipliée par $\frac{1}{2}(s-1)(s-2)$, en ayant égard à l'expression (15^b) pour le second membre de (15). Ainsi nous trouvons la première des quantités (12) sous la forme suivante

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} &3\rho^3(s-1)\alpha_x^{s-2}\alpha_{dx}\alpha_{dx}^2 + \rho^3(s-1)(s-2)\alpha_x^{s-2}\alpha_{dx}^3 \\ &= -3(s-1)\rho^3 d\rho \alpha_x^{s-2}\alpha_{dx}^3 + A'\varphi + B'd\varphi + \frac{(s-1)(s-2)}{2} \Phi' k_x^3 \\ &\quad - \frac{3}{2}(s-1)(n+s-3)\Phi'' k_x^3 \\ &\quad + \frac{1}{2}(s-1)(6n+2s-13)\Phi''' k_x + \frac{1}{4}(s-1)(2s-1)\Phi'' k_x^2. \end{aligned} \right.$$

D'une manière analogue, on est conduit à trois autres relations qui résultent de (17), quand on y remplace le symbole α respectivement par β , γ , δ . Enfin, on peut mettre un symbole d (où $d_x^n = \alpha_x^n$) à la place de α , pourvu que l'on mette simultanément n à la place de s . Dans ce cas, se présentent au lieu de Φ' , Φ'' , Φ''' , Φ'''' les formes

$$\begin{aligned} \Delta' &= (abd)^2 (acd) \alpha_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-1} d_x^{n-3}, \\ \Delta'' &= (abd)^2 (ack) \alpha_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-1} d_x^{n-2}, \\ \Delta''' &= (abd) (abk) (ack) \alpha_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-1} d_x^{n-1} = \Sigma R_i f_i, \\ \Delta'''' &= (abc)^2 (adk) \alpha_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-2} d_x^{n-1} = \Delta' = \Sigma S_i f_i. \end{aligned}$$

Or il est à remarquer que Δ' s'annule identiquement et que Δ''' se réduit facilement à Δ'' . En effet, Δ' change de signe, si l'on permute entre eux les symboles a et d . Quant à Δ''' , nous permutons les lettres b , d et faisons usage de l'identité

$$(abk)d_x - (adk)b_x = (abd)k_x - (bdk)a_x.$$

Il vient alors

$$\Delta''' = \frac{1}{2} k_x \Delta'' - \frac{1}{2} (abd)(ack)(bdk) a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-1} d_x^{n-2}.$$

Au deuxième terme du second membre, nous pouvons remplacer, sans altérer sa valeur, les facteurs symboliques $(ack)(bdk)$ par

$$\frac{1}{3} [(ack)(bdk) - (bck)(adk) - (cdk)(bak)] = \frac{1}{3} (acd)(bkk) = 0.$$

Il s'ensuit

$$\Delta''' = \frac{1}{2} k_x \Delta''.$$

Pour la dernière des cinq quantités (12) nous avons donc, au lieu de (17), cette relation plus simple

$$(18) \quad \begin{cases} 3\rho^2(n-1)a_x^{n-2}a_{dx}a_{d^2x} + \rho^2(n-1)(n-2)a_x^{n-2}a_{dx}^2 \\ = -3(n-1)\rho^2d\rho a_x^{n-2}a_{dx}^2 - \frac{1}{2}(n-1)(n-2)\Phi''k_x^2. \end{cases}$$

8. Les équations précédentes, (17) et (18), nous servent à transformer les expressions (12), premiers éléments du déterminant (10) après la substitution $y = x + 3dx + 3d^2x + d^3x$. D'abord nous pouvons y omettre les termes

$$-3(s-1)\rho^2d\rho x_x^{s-2}x_{dx}^2, \dots, -3(n-1)\rho^2d\rho a_x^{n-2}a_{dx}^2;$$

car, en utilisant les trois dernières lignes du déterminant, ils peuvent s'écrire de façon qu'ils deviennent, d'après les calculs du n° 4, proportionnels aux termes de la deuxième ligne. De même, nous pouvons négliger, en vertu de $f = 0$ et $df = 0$, les termes qui contiennent les facteurs φ , $d\varphi$, etc.

De plus, nous pouvons y supprimer, en vertu de la relation $\Delta''' = \Sigma R_i f_i$, les termes dans lesquels figurent les expressions

$$\Phi''' = \Sigma R_i \varphi_i, \quad \Psi''' = \Sigma R_i \psi_i, \quad X''' = \Sigma R_i \chi_i, \quad \Omega''' = \Sigma R_i \omega_i.$$

Il faut seulement retrancher en même temps, de la dernière des

quantités (12), l'expression

$$\frac{1}{2}(s-1)(6n+2s-13)\Delta''k_x = \frac{1}{4}(s-1)(6n+2s-13)\Delta^*k_x.$$

Enfin, Φ'' étant égal à $\Sigma S_i \varphi_i$, ..., on peut y supprimer les termes

$$\frac{s-1}{4}(2s-2)\Phi'', k_x^2, \dots, \frac{s-1}{4}(2s-1)\Omega''k_x^2,$$

pourvu qu'on retranche, du second membre de (18), le produit

$$\frac{s-1}{4}(2s-1)\Delta''k_x^2 - \frac{s-1}{4}(2s-1)\Delta^*k_x^2.$$

Ainsi, les éléments de la première ligne du déterminant en question se présentent sous la forme suivante

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(s-1)(s-2)\Phi'' \cdot k_x^2 - \frac{3}{2}(s-1)(n+s-3)\Phi'' \cdot k_x^2, \\ & \frac{1}{2}(s-1)(s-2)\Psi'' \cdot k_x^2 - \frac{3}{2}(s-1)(n+s-3)\Psi'' \cdot k_x^2, \\ & \frac{1}{2}(s-1)(s-2)X'' \cdot k_x^2 - \frac{3}{2}(s-1)(n+s-3)X'' \cdot k_x^2, \\ & \frac{1}{2}(s-1)(s-2)\Omega'' \cdot k_x^2 - \frac{3}{2}(s-1)(n+s-3)\Omega'' \cdot k_x^2, \\ & - \left[\frac{1}{2}(n-1)(n-2) + \frac{1}{2}(s-1)(3n+2s-7) \right] \Delta'' \cdot k_x^2. \end{aligned}$$

Ici, nous avons désigné par Ψ'' , X'' , Ω'' ce que devient Φ'' quand on y remplace α respectivement par β , γ , δ .

Le déterminant lui-même prend donc cette valeur

$$(19) \quad D = \frac{1}{2}(s-1)(s-2)k_x^2 A - \frac{3}{2}k_x^2 B,$$

où nous avons posé

$$(20) \quad A = \begin{vmatrix} \Phi' & \Psi' & X' & \Omega' & 0 \\ (s-1)\Phi & (s-1)\Psi & (s-1)X & (s-1)\Omega & \frac{n+2s-3}{3}\Delta \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & \omega_1 & f_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & \omega_2 & f_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & \omega_3 & f_3 \end{vmatrix},$$

$$B = \begin{vmatrix} \tau\Phi'' & \tau\Psi'' & \tau X'' & \tau\Omega'' & \tau\Delta'' \\ (s-1)\Phi & (s-1)\Psi & (s-1)X & (s-1)\Omega & \frac{n+2s-3}{3}\Delta \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & \omega_1 & f_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & \omega_2 & f_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & \omega_3 & f_3 \end{vmatrix}.$$

$$(20^a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma = (s-1)(n+s-3), \\ r = \frac{1}{3} [(n-1)(n-2) + (s-1)(3n+2s-7)] \\ = \sigma + \frac{1}{3}(n-1)(n-2) - \frac{1}{3}(s-1)(s-2) \\ = \sigma + \frac{1}{3}(n-s)(n+s-3). \end{array} \right.$$

Il faut encore nous occuper de l'expression B pour en séparer un facteur k_x .

9. De la dernière relation entre r et σ , on tire

$$\frac{r}{\sigma} = 1 + \frac{n-s}{3(s-1)} = \frac{n+2s-3}{3(s-1)}.$$

Par conséquent, il vient, à l'aide de (15^a),

$$B = \sigma(s-1) \begin{vmatrix} (ab\alpha)^2 & (ab\beta)^2 & (ab\gamma)^2 & (ab\delta)^2 & \frac{r}{\sigma}(abd)^2 \\ (ef\alpha)^2 & (ef\beta)^2 & (ef\gamma)^2 & (ef\delta)^2 & \frac{r}{\sigma}(efd)^2 \\ \alpha_1\alpha_x & \beta_1\beta_x & \gamma_1\gamma_x & \delta_1\delta_x & d_1d_x \\ \alpha_2\alpha_x & \beta_2\beta_x & \gamma_2\gamma_x & \delta_2\delta_x & d_2d_x \\ \alpha_3\alpha_x & \beta_3\beta_x & \gamma_3\gamma_x & \delta_3\delta_x & d_3d_x \end{vmatrix} (ack)b_x e_x f_x \Pi,$$

en faisant $e_x^n = f_x^n = d_x^n = f(x)$ et

$$(20^b) \quad \Pi = \alpha_x^{n-3} \beta_x^{n-3} \gamma_x^{n-3} \delta_x^{n-3} c_x^{n-1} d_x^{n-2} \alpha_x^{s-2} \beta_x^{s-2} \gamma_x^{s-2} \delta_x^{s-2}.$$

Cette expression sera transformée par l'identité

$$(ack)e_x = (ace)k_x + (aek)c_x + (eck)a_x.$$

Alors on obtient une somme de trois termes. Du premier se trouve séparé le facteur k_x ; le deuxième contient le facteur c_x^n et s'évanouit par conséquent; le troisième est égal, au signe près, à B, comme on le reconnaît aisément, en permutant entre elles les lettres a, e et b, f . Par suite, le premier terme de cette somme devient égal au double de la valeur de B, de sorte que

$$(21) \quad B = k_x \frac{\sigma(s-1)}{2} \begin{vmatrix} (ab\alpha)^2 & (ab\beta)^2 & (ab\gamma)^2 & (ab\delta)^2 & \frac{r}{\sigma}(abd)^2 \\ (ef\alpha)^2 & (ef\beta)^2 & (ef\gamma)^2 & (ef\delta)^2 & \frac{r}{\sigma}(efd)^2 \\ \alpha_1\alpha_x & \beta_1\beta_x & \gamma_1\gamma_x & \delta_1\delta_x & d_1d_x \\ \alpha_2\alpha_x & \beta_2\beta_x & \gamma_2\gamma_x & \delta_2\delta_x & d_2d_x \\ \alpha_3\alpha_x & \beta_3\beta_x & \gamma_3\gamma_x & \delta_3\delta_x & d_3d_x \end{vmatrix} (ace)b_x f_x \Pi.$$

La substitution des valeurs (20) et (21) dans (19) conduit au théorème suivant, dont la démonstration était le but principal de nos recherches, savoir :

Les points où une courbe algébrique d'ordre, n , $f(x) = 0$, est touchée par une courbe d'ordre s du système linéaire

$$\varphi(x) + \alpha\psi(x) + \lambda\chi(x) + \mu\omega(x) = 0,$$

suivant un contact du troisième ordre, sont ses points d'intersection avec la courbe

$$(22) \quad (s-1)(s-2)A - 3B_0 = 0,$$

$B_0 k_x$ étant égal à B , et A , B étant définis par les équations (20) et (21), dans lesquelles r , σ sont donnés par (20^a), Π par (20^b), Φ' par (15^a) et Ψ' , X' , Ω' par des formations analogues, et où l'on a posé

$$\varphi(x) = \alpha_x^s, \quad \psi(x) = \beta_x^s, \quad \chi(x) = \gamma_x^s, \quad \omega(x) = \delta_x^s,$$

$$f(x) = a_x^n = b_x^n = c_x^n = d_x^n = e_x^n = f_x^n.$$

La courbe (22) est de l'ordre

$$4(n-3) + 2n - 3 + 4(s-2) + 6 = 4 \left[s + \frac{3}{2}(n-3) \right],$$

ce qui concorde avec une proposition générale que nous avons obtenue, par voie récurrente, dans notre édition des *Leçons de Clebsch* (1).

IV. — Sur la loi de réciprocité de M. BRILL.

10. Remarquons la forme sous laquelle se présente, dans (10), l'équation d'une courbe qui fait partie du système linéaire proposé et qui touche la courbe $f = 0$, à un point donné x , par un contact du deuxième ordre. Cette équation peut s'écrire (en coordonnées y_i)

$$(23) \quad \varphi(y)D_\varphi(x) + \psi(y)D_\psi(x) + \chi(y)D_\chi(x) + \omega(y)D_\omega(x) = 0,$$

(1) *Loc. cit.*, t. I, p. 735; t. III de la traduction de M. Benoist, p. 95.

pourvu que $D_{\gamma}(x) = 0$ soit la courbe qui détermine par ses intersections avec $f = 0$ les points où celle-ci touche une courbe du système

$$\psi(\gamma) + \lambda \chi(\gamma) + \mu \omega(\gamma) = 0$$

par un contact du second ordre, etc.

Par là se trouve vérifiée, pour le cas actuel, la loi générale de réciprocité, due à M. Brill, et concernant d'une part les courbes $\varphi_i = 0$ d'un système linéaire γ fois infini et, d'autre part, les courbes $\Phi_i = 0$ qui déterminent dans un système partiel $(\gamma - 1)$ fois infini, contenu dans le premier système, les courbes touchant $f = 0$ par un contact d'ordre $\gamma - 1$. En effet, on sait ⁽¹⁾ que la forme de l'équation (23) reste la même pour le cas général, de sorte que

$$(24) \quad \varphi_0(\gamma) \Phi_0(x) + \varphi_1(\gamma) \Phi_1(x) + \dots + \varphi_{\gamma}(\gamma) \Phi_{\gamma}(x) = 0$$

est, en variables γ , l'équation d'une courbe qui touche $f = 0$ au point x , par un contact d'ordre $\gamma - 1$; et j'ai démontré que cette équation donne précisément le contenu de la loi que M. Brill avait obtenue d'une autre manière ⁽²⁾.

Une remarque analogue a lieu à l'égard d'un système quatre fois infini

$$(25) \quad \varphi(x) + \kappa \psi(x) + \lambda \chi(x) + \mu \omega(x) + \nu \Xi(x) = 0.$$

Du résultat obtenu au n° 9, on déduit immédiatement que la courbe du système (25) qui touche $f = 0$ au point x par un contact du troisième ordre est représentée, en variables γ , par l'équation

$$(26) \quad (s - 2)P - \frac{3}{2}(n + s - 3)Q = 0,$$

⁽¹⁾ *Op. cit.*, p. 472; t. II, p. 185 dans la traduction de M. Benoist.

⁽²⁾ *Mathematische Annalen*, t. IV, p. 527; 1871. Cette loi peut aussi être démontrée par l'application des intégrales abéliennes et des fonctions Θ ; voir mon Mémoire *Ueber eine Verallgemeinerung des Jacobi'schen Umkehrproblems der Abelschen Integrale* (*Berichte der naturforschenden Gesellschaft zu Freiburg i. Br.*, Bd. VII).

où, si $\mathfrak{Z}(x) = \varepsilon_x$,

$$P = \begin{vmatrix} \varphi(y) & \psi(y) & \chi(y) & \omega(y) & \mathfrak{Z}(y) & 0 \\ \Phi' & \Psi' & X' & \Omega' & \Theta' & 0 \\ \Phi & \Psi & X & \Omega & \Theta & \frac{n+2s-3}{3(s-1)} \Delta \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & \omega_1 & \mathfrak{Z}_1 & f_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & \omega_2 & \mathfrak{Z}_2 & f_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & \omega_3 & \mathfrak{Z}_3 & f_3 \end{vmatrix},$$

$$Q = \begin{vmatrix} \varphi(y) & \psi(y) & \chi(y) & \omega(y) & \mathfrak{Z}(y) & 0 \\ (ab\alpha)^2 & (ab\beta)^2 & (ab\gamma)^2 & (ab\delta)^2 & (ab\varepsilon)^2 & \frac{n+2s-3}{3(s-1)} (abd)^2 \\ (ef\alpha)^2 & (ef\beta)^2 & (ef\gamma)^2 & (ef\delta)^2 & (ef\varepsilon)^2 & \frac{n+2s-3}{3(s-1)} (efd)^2 \\ \alpha_1 \alpha_x & \beta_1 \beta_x & \gamma_1 \gamma_x & \delta_1 \delta_x & \varepsilon_1 \varepsilon_x & d_1 d_x \\ \alpha_2 \alpha_x & \beta_2 \beta_x & \gamma_2 \gamma_x & \delta_2 \delta_x & \varepsilon_2 \varepsilon_x & d_2 d_x \\ \alpha_3 \alpha_x & \beta_3 \beta_x & \gamma_3 \gamma_x & \delta_3 \delta_x & \varepsilon_3 \varepsilon_x & d_3 d_x \end{vmatrix} (ace)$$

$$\times (a_x e_x)^{n-2} (b_x f_x d_x)^{n-2} c_x^{n-1} (\alpha_x \beta_x \gamma_x \delta_x \varepsilon_x)^{s-2}.$$

La loi de réciprocité nous permet de plus d'énoncer, à l'égard de l'expression D dans (19) ou du premier membre de (22), la proposition suivante,

Désignons par $\Phi^0, \Psi^0, X^0, \Omega^0$ les quantités qui multiplient, dans (10), respectivement les fonctions $\varphi(y), \psi(y), \chi(y), \omega(y)$, de sorte que, par exemple,

$$\Omega^0 = -(s-1) \begin{vmatrix} \Phi & \Psi & X & \frac{n+2s-3}{3(s-1)} \Delta \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & f_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & f_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & f_3 \end{vmatrix}.$$

Si l'on remplace dans Ω^0 les courbes φ, ψ, χ par Φ^0, Ψ^0, X^0 , on obtient une nouvelle expression ω^0 , savoir

$$\omega^0 = -(\tau-1) \begin{vmatrix} \varphi' & \psi' & \chi' & \frac{n+2\tau-3}{3(\tau-1)} \Delta \\ \Phi_1^0 & \Psi_1^0 & X_1^0 & f_1 \\ \Phi_2^0 & \Psi_2^0 & X_2^0 & f_2 \\ \Phi_3^0 & \Psi_3^0 & X_3^0 & f_3 \end{vmatrix},$$

où $\tau = 3(n + s - 3)$, et en faisant $\Phi^0 = \Phi_x^s, \dots$

$$\begin{aligned}\varphi' &= (\Phi ab)^2 \Phi_x^{s-2} a_x^{n-2} b_x^{n-2}, \quad \psi' = (\Psi ab)^2 \Psi_x^{s-2} a_x^{n-2} b_x^{n-2}, \\ \gamma'_i &= X(ab)^2 X_x^{s-2} a_x^{n-2} b_x^{n-2}, \quad \Phi_i^0 = \Phi_x^{s-2} \Phi_i, \quad \dots\end{aligned}$$

En vertu de $f = 0$, la fonction ω^0 doit être, à un facteur numérique près, égale à $\omega(x)$ multiplié par la deuxième puissance de l'expression $(s-1)(s-2)A - 3B_0$, qui figure au premier membre de (22).

11. A l'occasion de certaines recherches sur la théorie des correspondances, nous avons été conduit à considérer une courbe $M = 0$ ⁽¹⁾, dont les intersections avec $f = 0$ jouissent de cette propriété qu'une courbe d'un système linéaire γ fois infini y a un point double tel que l'une de ses deux branches y touche la courbe $f = 0$ par un contact d'ordre $\gamma - 2$. L'équation de cette courbe s'obtient si l'on pose, dans l'équation (24), $x = y$ et si l'on sépare du résultat un facteur f , de sorte que

$$\varphi_0(x)\Phi_0(x) + \varphi_1(x)\Phi_1(x) + \dots + \varphi_\gamma(x)\Phi_\gamma(x) = M.f.$$

Pour les cas les plus simples, nous sommes maintenant à même d'indiquer la formation analytique de ce facteur M .

Pour $\gamma = 2$, on sait que la courbe $M = 0$ est la jacobienne du réseau proposé.

Pour $\gamma = 3$, il faut partir de l'équation (10). La substitution $y = x$ faite, on peut aisément transformer le déterminant de façon que les éléments de la première ligne horizontale prennent les valeurs

$$0, 0, 0, 0, \dots f(x).$$

La courbe d'ordre $2n + 4s - 7$,

$$\begin{vmatrix} \Phi & \Psi & X & \Omega \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & \omega_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & \omega_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & \omega_3 \end{vmatrix} = 0$$

(¹) *Op. cit.*, p. 737; t. III, p. 97 dans la traduction de M. Benoist.

détermine donc sur $f=0$ les points où une courbe du système

$$\varphi(x) + \alpha\psi(x) + \lambda\chi(x) + \mu\omega(x) = 0$$

a un point double tel que l'une de ses branches y touche la courbe $f=0$ par un contact du premier ordre.

Pour $\gamma=4$, les déterminants P et Q, qui figurent au premier membre de (26), se transforment d'une manière analogue quand on a fait $y=x$. Les points de $f=0$, où une courbe du système (25) a un point double tel que l'une de ses branches y touche la courbe $f=0$ par un contact du deuxième ordre, sont les intersections de $f=0$ avec la courbe

$$(s-2)R - \frac{3}{2}(n+s-3)S = 0,$$

en posant

$$R = \begin{vmatrix} \Phi' & \Psi' & X' & \Omega' & \Theta' \\ \Phi & \Psi & X & \Omega & \Theta \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & \omega_1 & \varpi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & \omega_2 & \varpi_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & \omega_3 & \varpi_3 \end{vmatrix},$$

$$S = \begin{vmatrix} (ab\alpha)^2 & (ab\beta)^2 & (ab\gamma)^2 & (ab\delta)^2 & (ab\varepsilon)^2 \\ (ef\alpha)^2 & (ef\beta)^2 & (ef\gamma)^2 & (ef\delta)^2 & (ef\varepsilon)^2 \\ \alpha_1\alpha_x & \beta_1\beta_x & \gamma_1\gamma_x & \delta_1\delta_x & \varepsilon_1\varepsilon_x \\ \alpha_2\alpha_x & \beta_2\beta_x & \gamma_2\gamma_x & \delta_2\delta_x & \varepsilon_2\varepsilon_x \\ \alpha_3\alpha_x & \beta_3\beta_x & \gamma_3\gamma_x & \delta_3\delta_x & \varepsilon_3\varepsilon_x \end{vmatrix} (ace)$$

$$\times (a_x e_x)^{n-3} (b_x f_x)^{n-2} c_x^{n-1} (\alpha_x \beta_x \gamma_x \delta_x \varepsilon_x)^{s-2}.$$

Sur certaines propriétés des centres de gravité; par M. LAISANT.

(Séance du 20 janvier 1882.)

1. Dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (2^e série, t. XX, p. 337), M. Resala publié un article intitulé : *Note sur la généralisation d'un théorème de Pappus*, et qui a pour objet la démonstration de la proposition suivante :

Soient $A_1 A_2 \dots A_n A_1$, un polygone formé de n côtés, plan ou

gauche, m la masse de chacun des n points matériels, partant en même temps des sommets $A_1, A_2, \dots, A_n$, et dans le même sens, avec des vitesses constantes $V_1, V_2, \dots, V_n$, proportionnelles aux côtés $a_1 = A_1A_2, a_2 = A_2A_3, \dots$, ou A_nA_1 ; le centre de gravité des masses m reste fixe.

Le théorème de Pappus présente le même énoncé, s'appliquant simplement au triangle.

Si l'on y regarde de près, on voit que la proposition revient simplement à ceci : *Si l'on divise dans un même rapport les côtés successifs d'un polygone fermé, le centre de gravité des points de division (supposés de masses égales) est le même que le centre de gravité des sommets.*

J'ai démontré non seulement cette proposition, mais un certain nombre d'autres propriétés plus générales, dans une Communication faite en 1877 au Congrès du Havre et intitulée : *Sur quelques propriétés des polygones* (Association française pour l'avancement des Sciences, compte rendu de la sixième Session, p. 142-154). Seulement, mon étude ne s'appliquait qu'aux polygones plans.

L'article de M. Resal ayant ramené mon attention sur ce point, j'ai tenté d'étendre aux polygones gauches quelques-uns de mes résultats, et cela m'a conduit ensuite à certaines conséquences d'une généralité plus grande encore.

C'est à l'exposé de cette généralisation, à laquelle l'algorithme des quaternions s'applique très facilement, qu'est consacrée la présente Note.

2. Soit, comme plus haut, $A_1A_2 \dots A_nA_1$ un polygone fermé, gauche en général. Faisons passer par tous les sommets des droites parallèles entre elles, que nous prendrons pour axes de rotation. Puis, admettons que le côté A_1A_2 , tournant autour de l'axe passant par A_1 , d'un certain angle, le point A_2 vienne en B_2 ; de même, faisons tourner, du même angle et dans le même sens, les côtés $A_2A_3, \dots, A_nA_1$ autour des axes passant par $A_2, \dots, A_n$, si bien que les points $A_3, \dots, A_1$ viennent occuper les nouvelles positions $B_3, \dots, B_1$.

Je dis tout d'abord que le centre de gravité des points $B_1, B_2, \dots, B_n$ sera le même que celui des points $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Pour le démontrer, je représente par Q un quaternion ayant pour axe et pour angle l'axe et l'angle de chacune des rotations.

On sait alors (voir, par exemple, *Introduction à la méthode des quaternions*, p. 172) que ces rotations seront représentées par l'opération

$$Q^{-1}(\)Q.$$

Nous aurons donc

$$A_1 B_2 = Q^{-1} \cdot A_1 A_2 \cdot Q,$$

ou, en remplaçant $A_1 B_2$, $A_1 A_2$ par $B_2 - A_1$, $A_2 - A_1$, l'origine des vecteurs étant quelconque,

$$B_2 - A_1 = Q^{-1} (A_2 - A_1) Q = Q^{-1} A_2 Q - Q^{-1} A_1 Q.$$

De même,

$$B_2 - A_2 = Q^{-1} A_3 Q - Q^{-1} A_2 Q,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$B_n - A_{n-1} = Q^{-1} A_n Q - Q^{-1} A_{n-1} Q,$$

$$B_1 - A_n = Q^{-1} A_1 Q - Q^{-1} A_n Q,$$

et, par addition,

$$\Sigma B - \Sigma A = 0,$$

ce qui démontre la proposition, en divisant le premier membre par n .

3. Si maintenant nous divisons $A_1 B_2$, $A_2 B_3$, ..., $A_n B_1$ dans le même rapport, en C_2 , C_3 , ..., C_1 , le centre de gravité des points de division C sera encore le même que le centre de gravité de points A . Car nous aurons

$$A_1 C_2 = k A_1 B_2 \quad \text{ou} \quad C_2 - A_1 = k (B_2 - A_1),$$

et, de même,

$$C_3 - A_2 = k (B_3 - A_2)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$C_1 - A_n = k (B_1 - A_n)$$

d'où, par addition,

$$\Sigma C - \Sigma A = k (\Sigma B - \Sigma A) = 0.$$

4. Prenons maintenant un système de droites quelconques dans l'espace $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, ..., $A_n B_n$, au lieu de considérer les côtés successifs d'un polygone fermé; et supposons que toutes ces

droites tournent à la fois, du même angle et dans le même sens, autour d'axes parallèles passant par les points $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Les points $B_1, B_2, \dots, B_n$ prendront ainsi de nouvelles positions $B'_1, B'_2, \dots, B'_n$.

Je désigne par $G_a, G_b, G_{b'}$ les centres de gravité des points A , des points B et des points B' , respectivement; les masses pouvant même varier d'un point à un autre, mais étant toujours les mêmes pour les trois points A_i, B_i, B'_i de même indice.

Dans ces conditions, le centre de gravité $G_{b'}$ s'obtiendra par la rotation de G_b tournant autour d'un axe de rotation passant par G_a , parallèle aux premiers, et cela du même angle et dans le même sens.

Pour le démontrer, je représente toujours par $Q^{-1} () Q$ le symbole de la rotation commune. J'aurai alors, comme ci-dessus,

$$\begin{aligned} B'_1 - A_1 &= Q^{-1} B_1 Q - Q^{-1} A_1 Q, \\ B'_2 - A_2 &= Q^{-1} B_2 Q - Q^{-1} A_2 Q, \\ &\dots\dots\dots, \\ B'_n - A_n &= Q^{-1} B_n Q - Q^{-1} A_n Q. \end{aligned}$$

Multipliant respectivement ces relations par les masses correspondantes $m_1, m_2, \dots, m_n$, puis ajoutant, j'obtiens

$$\Sigma m B' - \Sigma m A = Q^{-1} \cdot \Sigma m B \cdot Q - Q^{-1} \Sigma m A \cdot Q;$$

c'est-à-dire, en divisant par la masse totale Σm ,

$$G_{b'} - G_a = Q^{-1} G_b Q - Q^{-1} G_a Q = Q^{-1} (G_b - G_a) Q,$$

ou encore

$$G_a G_{b'} = Q^{-1} \cdot G_a G_b \cdot Q,$$

ce qui démontre la proposition.

Remarquons immédiatement que, dans le cas du polygone fermé, considéré tout d'abord, les points G_b et G_a coïncident, et que, par suite, $G_{b'}$ doit coïncider aussi avec eux. Ce n'est donc qu'un cas particulier de la propriété plus générale à laquelle nous sommes arrivé maintenant.

§. Nous ne nous arrêterons pas à démontrer que, si les points $C_1, C_2, \dots, C_n$ divisent dans un même rapport les droites $A_1 B'_1, A_2 B'_2, \dots, A_n B'_n$, leur centre de gravité G_c divisera dans le

même rapport la droite $G_a G_b$. Mais, joignant ce dernier résultat à celui que nous venons d'obtenir, nous pourrions donner une forme physique assez intéressante à la proposition qui nous occupe.

Pour cela, remarquons que nous pouvons considérer les droites A_i, B_i comme appartenant à autant de corps de même nature, dont les points B_i seraient les centres de gravité respectifs. Si ces corps passent par des températures différentes, ils se dilateront ou se contracteront dans le même rapport, c'est-à-dire que les droites A_i, B_i varieront elles-mêmes de longueur, proportionnellement.

Ceci posé, nous pourrions énoncer cette proposition :

Si plusieurs corps de même nature tournent dans le même sens autour d'axes parallèles entre eux, avec la même vitesse angulaire et dans un milieu dont la température soit variable, leur centre de gravité se meut comme s'il appartenait à un corps de même nature, tournant dans le même milieu autour d'un axe parallèle aux premiers, et avec la même vitesse angulaire.

Cet axe moyen de rotation s'obtient en prenant un point quelconque sur chacun des axes individuels, et en déterminant le centre de gravité de ces points, respectivement affectés des masses des corps correspondants. Ce centre de gravité appartient à l'axe moyen.

Sur l'équation linéaire qui relie au module la fonction complète de première espèce : par M. GOURSAT.

(Séance du 17 février 1881.)

1. Dans une Note présentée à l'Académie des Sciences, le 28 avril 1879, M. Picard a montré que toute fonction multiforme de la variable complexe x , n'ayant, dans toute l'étendue du plan ou de la sphère, que trois points singuliers, le point $x = 0$, le point $x = 1$ et le point à l'infini, pouvait être considérée comme une fonction uniforme du rapport $\omega = \frac{iK}{K}$: K et K' sont définis,

pour des valeurs quelconques de x , par l'équation différentielle linéaire du second ordre à laquelle ils satisfont (Fuchs, *Journal de Borchardt*, t. 71)

$$(1) \quad x(1-x) \frac{d^2 y}{dx^2} + (1-2x) \frac{dy}{dx} - \frac{1}{4} y = 0.$$

La fonction ω de la variable x , ainsi définie, n'a, dans toute l'étendue du plan, que les trois points critiques 0, 1, ∞ , et jouit des propriétés suivantes : pour toute valeur de x , le coefficient de i dans ω , mis sous la forme ordinaire des imaginaires, est positif ; de plus, si l'on part d'un point A du plan avec une valeur initiale ω_0 , et que l'on fasse décrire à la variable x un chemin fermé quelconque, ne passant par aucun des points 0 et 1, on revient au point de départ avec une valeur $\frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}$, a, b, c, d étant quatre entiers réels satisfaisant à la condition $ad - bc = 1$. En s'appuyant sur les propriétés précédentes, il est aisé de démontrer que, si le chemin décrit par la variable x ne peut être réduit au point A sans franchir aucun des points 0 et 1, la fonction ω ne reviendra jamais à la valeur initiale. Je renverrai, pour la démonstration, au Mémoire de M. Picard (*Annales scientifiques de l'Ecole Normale supérieure*, t. IX, p. 149). Il en résulte qu'il y a un seul chemin pour la variable x qui conduit de la valeur ω_0 à la valeur $\frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}$, en regardant comme identiques tous les chemins qui peuvent être réduits à l'un d'entre eux, sans franchir aucun des points 0 et 1.

2. Il m'a paru intéressant de chercher à démontrer cette propriété, en m'appuyant uniquement sur la manière dont se permutent les intégrales de l'équation (1) dans le voisinage de l'un des points critiques.

Posons

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1.3.5 \dots (2m-1)}{2.4.6 \dots 2m} \right]^2 x^m, \\ \psi(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1.3.5 \dots (2m-1)}{2.4.6 \dots 2m} \right]^2 B_m x^m, \\ B_m &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2m}. \end{aligned}$$

Dans le domaine du point $x = 0$, l'équation (1) admet les deux

intégrales

$$\begin{aligned} P &= \varphi(x), \\ Q &= i\psi(x) + \varphi(x) \log x. \end{aligned}$$

De même, dans le domaine du point $x = 1$, elle admet les deux intégrales

$$\begin{aligned} P' &= \varphi(1-x), \\ Q' &= \varphi(1-x) \log(1-x) + i\psi(1-x). \end{aligned}$$

Je prendrai pour valeurs initiales $K = \varphi(x)$, $K' = \varphi(1-x)$; K et K' seront des fonctions uniformes de x dans toute l'étendue du plan, pourvu que le chemin suivi par la variable soit assujéti à ne couper aucune des lignes indéfinies $-\infty \dots 0, 1 \dots +\infty$. J'adopterai de même, comme valeur initiale de ω , la valeur $\omega_0 = \frac{i\varphi(x)}{\varphi(1-x)}$; ω_0 sera une fonction uniforme de x à la même condition que K et K' . Voyons maintenant ce que devient ω_0 , quand on fait décrire à la variable x un lacet autour de l'un des points critiques dans un sens ou dans l'autre. Entre les quatre intégrales P, Q, P', Q' , on a, dans la partie commune aux deux domaines, les relations

$$\begin{aligned} P' &= \frac{i \log 2}{\pi} P - \frac{1}{\pi} Q, \\ P &= \frac{4 \log 2}{\pi} P' - \frac{1}{\pi} Q'. \end{aligned}$$

Par un lacet décrit autour du point $x = 0$ dans le sens direct, Q se change en $Q + 2i\pi P$; par suite, P' se change en $P' - 2iP$. La valeur du rapport ω , après ce chemin, sera donc

$$\frac{i(P' - 2iP)}{P} = \omega_0 + 2.$$

Par un lacet décrit autour du même point critique dans le sens rétrograde, ω_0 se changerait en $\omega_0 - 2$. De même, par un lacet décrit autour du point $x = 1$, $\frac{1}{\omega_0}$ se change en $\frac{1}{\omega_0} \mp 2$, suivant que ce lacet est décrit dans le sens direct ou dans le sens rétrograde.

3. Cela posé, comme tout chemin fermé se ramène à une suite de lacets décrits autour des points 0 et 1 dans un sens ou dans l'autre, il est clair que nous n'avons qu'à étudier les valeurs que

l'on déduit de la valeur ω_0 , en appliquant les substitutions précédentes un nombre quelconque de fois et dans un ordre arbitraire. On voit d'abord que l'on est conduit à un nombre infini de valeurs différentes, qui sont toutes de la forme $\frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}$, a, b, c, d étant quatre entiers réels, tels que $ad - bc = 1$. Si l'on est arrivé, après un certain nombre de lacets, à la valeur $\frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}$, un nouveau lacet, décrit autour du point $x = 0$, conduira à l'une des valeurs

$$\frac{a\omega_0 + b + 2a}{c\omega_0 + d + 2c}, \quad \frac{a\omega_0 + b - 2a}{c\omega_0 + d - 2c};$$

un lacet décrit autour du point $x = 1$ conduirait à l'une des deux valeurs

$$\frac{(a + 2b)\omega_0 + b}{(c + 2d)\omega_0 + d}, \quad \frac{(a - 2b)\omega_0 + b}{(c - 2d)\omega_0 + d}.$$

Le théorème qu'il s'agit de démontrer peut s'énoncer ainsi :

Il n'y a qu'une suite de substitutions de la forme précédente, appliquées dans un ordre déterminé, qui conduise de la valeur ω_0 à une quelconque des valeurs que peut prendre la fonction ω pour la même valeur de la variable.

4. Pour abréger, j'appellerai valeurs *voisines* de ω des valeurs telles, que l'on passe de l'une à l'autre, en faisant décrire à la variable un lacet unique autour de l'un des points critiques. Les quatre valeurs voisines de la valeur $\frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}$ sont les quatre valeurs écrites plus haut. J'appelle A la somme toujours positive $(a + c)^2 + (b + d)^2$; c'est l'étude de la variation de cette somme, quand on passe d'une valeur de ω à une valeur voisine, qui m'a permis de démontrer le théorème en question.

Considérons la somme A relative à une valeur particulière de ω , et les sommes analogues relatives aux valeurs voisines, que je désignerai par A_1, A_{-1}, A_2, A_{-2} . On aura

$$\begin{aligned} A &= (a + c)^2 + (b + d)^2, \\ A_1 &= (a + c)^2 + (b + d + 2a + 2c)^2, \\ A_{-1} &= (a + c)^2 + (b + d - 2a - 2c)^2, \\ A_2 &= (a + c + 2b + 2d)^2 + (b + d)^2, \\ A_{-2} &= (a + c - 2b - 2d)^2 + (b + d)^2. \end{aligned}$$

Posons encore

$$\begin{aligned} D_1 &= A_1 - A, & D_{-1} &= A_{-1} - A, \\ D_2 &= A_2 - A, & D_{-2} &= A_{-2} - A; \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} D_1 &= 4(a+c)(a+c+b+d), \\ D_{-1} &= 4(a+c)(a+c-b-d), \\ D_2 &= 4(b+d)(a+c+b+d), \\ D_{-2} &= 4(b+d)(b+d-a-c), \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= D_1 D_{-1} = 16(a+c)^2 [(a+c)^2 - (b+d)^2], \\ \Delta_2 &= D_2 D_{-2} = 16(b+d)^2 [(b+d)^2 - (a+c)^2]. \end{aligned}$$

Je distinguerai maintenant plusieurs cas :

PREMIER CAS. — Soit $a+c \neq 0$, $b+d \neq 0$, $(a+c)^2 \neq (b+d)^2$.

Les deux nombres Δ_1 , Δ_2 sont différents de zéro et de signes contraires. Supposons, par exemple, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 < 0$; le produit $D_1 D_{-1}$ est positif, ainsi que la somme $D_1 + D_{-1} = 8(a+c)^2$; les deux nombres D_1 , D_{-1} sont donc positifs. Le produit $D_2 D_{-2}$ étant négatif, l'un des deux nombres D_2 , D_{-2} est positif, l'autre négatif. Donc, *des quatre nombres D_1 , D_{-1} , D_2 , D_{-2} , trois sont positifs, un seul est négatif.*

DEUXIÈME CAS. — Soit $a+c \neq 0$, $(a+c)^2 = (b+d)^2$.

On aura $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$. Comme la somme $D_1 + D_{-1}$ est encore positive, l'un des deux nombres D_1 , D_{-1} sera nul, l'autre positif. Il en sera de même des deux nombres D_2 , D_{-2} . Ainsi, *des quatre nombres D_1 , D_{-1} , D_2 , D_{-2} , deux seront nuls, deux positifs.*

TROISIÈME CAS. — Soit $a+c = 0$, $b+d \neq 0$.

Les deux nombres D_1 , D_{-1} seront nuls; D_2 , D_{-2} seront positifs. D'où la même conclusion que dans le cas précédent. On arriverait encore à la même conclusion en supposant $a+c \neq 0$, $b+d = 0$.

On ne peut supposer à la fois $a+c = 0$, $b+d = 0$, car la fraction $\frac{a\omega + b}{c\omega + d}$ se réduirait à -1 .

En résumé, des quatre nombres D_1 , D_{-1} , D_2 , D_{-2} , relatifs à une valeur quelconque de ω , ou bien trois seront positifs et un seul négatif, ou bien deux seront nuls, les deux autres étant positifs.

Quand on passera d'une valeur de ω à l'une des quatre valeurs voisines, deux cas seulement pourront se présenter. Dans le premier cas, la somme A est plus grande pour trois des valeurs voisines que pour la valeur proposée, et plus petite pour une seule. Dans le second cas, elle reste la même pour deux des valeurs voisines, et va en augmentant pour les deux autres.

5. Supposons maintenant que l'on parte de la valeur ω_0 , ce qui revient à supposer $a = 1, b = 0, c = 0, d = 1$. On a $A = 2$, et, comme $a + c = b + d = 1$, on se trouve placé dans le second cas. Il y aura donc deux valeurs voisines de la valeur ω_0 pour lesquelles A sera encore égal à 2 ; ce sont les valeurs

$$\frac{\omega_0}{-2\omega_0 + 1}, \quad \frac{\omega_0 - 2}{1};$$

si nous partons de la valeur $\frac{\omega_0 - 2}{1}$, nous nous trouvons encore dans le second cas, et l'on en déduit une nouvelle valeur $\frac{-3\omega_0 - 2}{2\omega_0 + 1}$, pour laquelle on a encore $A = 2$. En continuant ainsi, et en opérant de même avec la valeur $\frac{-\omega_0}{-2\omega_0 + 1}$, on arrivera à former une série linéaire, illimitée dans les deux sens, de valeurs telles que la somme correspondante A est égale à 2 :

$$(2) \left\{ \begin{array}{cccccc} \dots, & \frac{-3\omega_0 - 4}{4\omega_0 + 5}, & \frac{-3\omega_0 + 2}{4\omega_0 - 3}, & \frac{\omega_0 + 2}{-2\omega_0 - 3}, & \frac{\omega_0}{-2\omega_0 + 1}, & \\ \frac{\omega_0}{1}, & \frac{\omega_0 - 2}{1}, & \frac{-3\omega_0 - 2}{2\omega_0 + 1}, & \frac{-3\omega_0 + 4}{2\omega_0 - 3}, & \frac{5\omega_0 + 4}{-4\omega_0 - 3}, & \\ & & \frac{5\omega_0 - 6}{-4\omega_0 + 5}, & \frac{7\omega_0 - 6}{-6\omega_0 + 5}, & \dots & \end{array} \right.$$

Prenons maintenant l'une quelconque ν de ces valeurs ; outre les deux valeurs voisines de ν qui font partie de cette série, il y en a deux autres pour lesquelles la somme A est plus grande que 2. Soit ν , l'une d'elles ; quand on passe de ν à ν_1 , la somme A va en augmentant. Si de ν , on passe à une nouvelle valeur voisine ν_2 , A ira encore en augmentant, car on se trouve placé dans le premier cas, et il n'y aurait qu'un moyen de faire diminuer A : ce serait de repasser à la valeur ν . Si de ν_2 on passe à une nouvelle valeur

v_3 , A ira encore en augmentant, pour la même raison que tout à l'heure. Et le raisonnement s'appliquant de proche en proche, on voit que, pourvu qu'on n'applique pas deux substitutions inverses l'une de l'autre successivement, A ira toujours en augmentant.

Considérons un chemin fermé conduisant de la valeur ω_0 à une valeur $\frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}$, et supposons-le remplacé par un certain nombre de lacets. Imaginons en même temps la suite des valeurs par lesquelles on passe pour arriver de ω_0 à $\frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}$; cette suite se composera d'un certain nombre de valeurs comprises dans la série précédente (ce nombre pouvant être l'unité), suivie d'un certain nombre de valeurs qui ne seront pas comprises dans la série. Comme on peut toujours supposer qu'on ne rencontre pas deux lacets parcourus successivement dans des sens contraires, d'après ce qu'on a vu tout à l'heure, *la somme A ne va jamais en diminuant quand on passe d'une valeur à la valeur suivante.*

Inversement, supposons que l'on remonte la suite des lacets qui a conduit de la valeur ω_0 à la valeur $\frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}$; on repassera par toutes les valeurs intermédiaires, mais dans l'ordre inverse. Donc, *quand on remonte de la valeur finale à la valeur initiale ω_0 , la somme A ne va jamais en augmentant quand on passe d'une valeur à la suivante.*

Il y aura maintenant deux cas à distinguer :

PREMIER CAS. — La valeur finale $\frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}$ fait partie de la série illimitée écrite plus haut. Il est clair que toutes les valeurs intermédiaires devront faire partie de la même série ; ce seront précisément les valeurs comprises entre ω_0 et $\frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}$ dans cette série. La suite des lacets, qui ramène de la valeur finale à la valeur initiale, est donc complètement déterminée.

DEUXIÈME CAS. — La valeur finale ne fait pas partie de la série (2). Soit v_p cette valeur ; parmi les valeurs voisines, il y en aura une seule pour laquelle A sera moindre que pour v_p . Soit v_{p-1} cette valeur ; d'après ce qu'on vient de voir, v_{p-1} sera la valeur précédant immédiatement v_p . Si v_{p-1} fait partie de la série écrite plus haut,

on est ramené au cas précédent; dans le cas contraire, en opérant sur v_{p-1} comme on a opéré sur v_p , on en déduira une autre valeur v_{p-2} qui précédera v_{p-1} En continuant ainsi, comme A va toujours en diminuant, on finira par arriver à une valeur v_2 , à partir de laquelle A ne pourra plus diminuer. Cette valeur fera partie de la série (2), et l'on sera ramené au cas précédent.

On voit donc que la suite des lacets qui ramène de la valeur $\frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}$ à la valeur ω_0 est complètement déterminée; et, par suite, il en est de même du chemin inverse. C. Q. F. D.

6. J'ajouterai seulement les remarques suivantes :

Remarque I. — Toutes les valeurs que l'on déduit de la valeur ω_0 sont de la forme $\frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}$, où a, b, c, d sont quatre entiers réels vérifiant la relation $ad - bc = 1$. Mais on n'obtient pas ainsi toutes les valeurs de cette forme; ainsi, quel que soit le chemin suivi par la variable, on ne parviendra jamais à la valeur $\frac{-1}{\omega_0}$; car, si l'on arrivait à cette valeur, elle devrait faire partie de la série (I), et il est aisé de s'assurer qu'elle n'est pas comprise dans cette série.

Remarque II. — Considérons les quatre substitutions suivantes :

$$S^1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad T^1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix};$$

il résulte de ce qui précède qu'il n'existe aucune substitution composée des substitutions S et T, telle que

$$S^p T^q S^{p_1} T^{q_1} \dots S^{p_n} T^{q_n},$$

qui se réduise à la substitution identique $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, à moins de supposer nuls tous les nombres p et tous les nombres q . Au moyen des substitutions S et T, il sera facile de composer des groupes d'un nombre quelconque de substitutions jouissant de la même propriété.

Remarques sur la théorie des régions et des aspects;
par M. LAISANT.

(Séance du 3 février 1882.)

1. Dans la dernière séance de la Société mathématique, M. Halphen a fait une intéressante Communication sur le problème des différents *aspects* sous lesquels on peut voir un système de points distribués sur un plan, lorsqu'on circule sur ce plan à volonté.

Pour donner à l'énoncé de ce problème de Géométrie de situation la précision désirable, M. Halphen définit un aspect par la permutation qui indique l'ordre dans lequel les points apparaissent autour de l'observateur, deux permutations représentant le même aspect lorsqu'on peut les déduire circulairement l'une de l'autre.

Il apparaît immédiatement, d'après cela, que pour deux points il n'y a qu'un aspect imaginable, que pour trois points il y a deux aspects, et que pour n points on peut imaginer $(n-1)!$ aspects différents.

Mais, en général, ces aspects imaginables ne sont pas tous possibles; et c'est déjà faire un pas vers la solution du problème que de fixer une limite supérieure du nombre des aspects possibles pour un système de n points.

2. Supposons que, ces n points étant donnés sur un plan, nous venions à les joindre deux à deux par des droites de toutes les manières possibles.

Les $\frac{n(n-1)}{2}$ droites ainsi tracées diviseront le plan en un certain nombre de régions, les unes fermées de toutes parts, les autres illimitées. Or, il est bien évident que, lorsqu'un observateur circulera, sans en sortir, dans l'une de ces régions, il verra toujours le système des n points sous le même aspect. Par suite, la détermination du nombre de ces régions nous donnera une limite supérieure du nombre des aspects possibles.

3. J'ai démontré, dans une communication au Congrès d'Alger, en 1881, que m droites prises au hasard sur un plan déterminent

$1 + \frac{m(m+1)}{2}$ régions, dont $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ limitées, et $2m$ illimitées.

Mais on n'aurait pas le nombre des régions pour le problème qui nous occupe en remplaçant simplement dans ces formules m par $\frac{n(n-1)}{2}$, car les droites présentent ici cette particularité, que par un point quelconque du système passent $n-1$ d'entre elles.

Il y a par conséquent, en chacun des points, perte de $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ régions, toutes limitées, résultat qu'on obtient en remplaçant m par $n-1$. Pour les n points considérés, cela nous fera donc $\frac{n(n-2)(n-3)}{2}$ régions perdues.

Le calcul, d'ailleurs bien facile, montre, d'après cela, qu'il nous restera

$$\frac{1}{8}(n-1)(n^3 - 5n^2 + 18n - 8)$$

régions, dont

$$\frac{1}{8}(n-1)(n-2)(n^2 - 3n + 4)$$

régions limitées, et $n(n-1)$ régions illimitées.

4. L'évaluation numérique sera facile, au moyen des différences, et nous pourrons ainsi former le tableau suivant, que nous construisons depuis $n = 2$ jusqu'à $n = 15$.

Dans ce tableau, n représente le nombre des points du système, m le nombre des droites qui les unissent deux à deux, ρ_i le nombre des régions illimitées, ρ_l celui des régions limitées, ρ le nombre total des régions, c'est-à-dire $\rho_i + \rho_l$, et enfin $\alpha = (n-1)!$ le nombre des aspects imaginables.

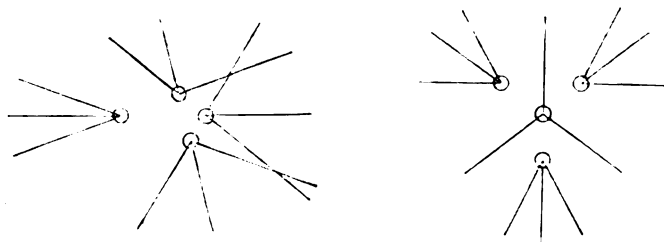
n	m	ρ_i	ρ_l	ρ	α
2	1	2	0	2	1
3	3	6	1	7	2
4	6	12	6	18	6
5	10	20	21	41	24
6	15	30	55	85	120
7	21	42	120	162	720
8	28	56	231	287	5040
9	36	72	406	478	40320
10	45	90	666	756	362880

n	m	ρ_1	ρ_2	ρ	α
11	55	110	1635	1145	3628800
12	66	132	1540	1672	39916800
13	78	156	2211	2367	479001600
14	91	182	3081	3263	6227020800
15	105	210	4186	4396	87178291200

Le nombre ρ des régions, comme on le voit, est supérieur au nombre des aspects imaginables α tant que le nombre des points du système ne surpasse pas 5. Mais, au delà, ce nombre ρ devient inférieur à α ; et, par suite, les aspects imaginables ne sont pas tous possibles, puisque ρ marque une limite supérieure du nombre des aspects possibles. Le rapport $\frac{\rho}{\alpha}$ décroît très vite, et pour $n = 15$, limite du tableau ci-dessus, il est inférieur à $\frac{1}{10^7}$, c'est-à-dire que, pour 15 points, il n'y a pas, en moyenne, un aspect possible sur 10 millions d'aspects imaginables.

5. En fait, le nombre des aspects possibles est inférieur de beaucoup à celui des régions que nous venons de déterminer. Il est même inférieur à celui des régions qui subsistent lorsqu'on supprime les portions de chaque droite comprises entre deux points quelconques du système.

Si nous prenons 4 points, à titre d'exemple, nous aurons les deux figures suivantes, selon que ces quatre points forment ou non un quadrilatère convexe :



Dans le premier cas, le nombre des régions se réduit à 11; dans le second cas, à 9; tandis qu'il était de 18 avant la suppression des parties comprises entre deux points quelconques.

On voit, d'après cela, combien le problème général doit être difficile; car il ne semble pas aisé, pour un nombre de points quelconque, d'introduire une notation faisant ressortir leurs positions

relatives, et cependant cette disposition générale de la figure a une influence capitale sur le résultat.

Sur un triangle dont les côtés sont exprimés par des nombres entiers, premiers entre eux, et dans lequel le rapport de deux angles est un nombre entier; par M. WEILL.

(Séance du 3 février 1882.)

Soit un triangle ABC, dans lequel B est égal à $(n + 1)$ fois l'angle A, désignons par a_{n+1} , b_{n+1} , c_{n+1} ses côtés; si nous menons une droite BD faisant avec BA un angle égal à $\widehat{A}$, le triangle BDE, formé en menant DE parallèle à AB, aura un angle $\widehat{DBE}$ qui vaudra n fois l'angle $\widehat{EDB}$; si l'on désigne par a_n , b_n , c_n les côtés de ce nouveau triangle, et par λ le rapport des côtés du triangle CDE au triangle CAB auquel il est semblable, on trouve facilement les formules suivantes :

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n+1}(1 + \lambda), \\ b_n &= c_{n+1}\lambda, \\ c_n &= b_{n+1}(1 + \lambda), \\ \lambda &= \frac{b_n^2}{b_n^2 + c_n^2 - a_n^2}. \end{aligned}$$

La dernière formule s'obtient en calculant la longueur de DE, bissectrice de l'angle D, dans le triangle CDB.

Ceci posé, si a_n , b_n , c_n représentent des nombres entiers, les formules précédentes donnent pour a_{n+1} , b_{n+1} et c_{n+1} des valeurs commensurables, qui sont

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{a_n(b_n^2 + c_n^2 - a_n^2)}{c_n^2 - a_n^2}, \\ b_{n+1} &= \frac{c_n(b_n^2 + c_n^2 - a_n^2)}{c_n^2 - a_n^2}, \\ c_{n+1} &= \frac{b_n(b_n^2 + c_n^2 - a_n^2)}{b_n^2}. \end{aligned}$$

Nous supposons b_n , c_n et a_n premiers entre eux et nous voulons trouver pour b_{n+1} , a_{n+1} , c_{n+1} des nombres entiers premiers entre

eux; d'après cela, nous pouvons déjà adopter les valeurs entières

$$(1) \quad \begin{cases} a_{n+1} = c_n b_n, \\ b_{n+1} = c_n b_n, \\ c_{n+1} = c_n^2 - a_n^2. \end{cases}$$

Or un calcul direct, très facile, donne les formules qui conviennent à $n=2$ et à $n=3$, et l'on trouve, en désignant par q et p deux nombres entiers premiers entre eux,

$$\begin{aligned} a_2 &= q^2, & a_3 &= q^3, \\ b_2 &= qp, & b_3 &= c_2 q, \\ c_2 &= p^2 - q^2. \end{aligned}$$

Admettons la généralité de la loi, c'est-à-dire supposons que l'on ait

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= q^n q, \\ b_{n+1} &= c_n q, \\ c_{n+1} &= \frac{c_n^2 - a_n^2}{c_{n-1}}. \end{aligned}$$

Ces formules ne sont autres que les formules (1), après que l'on a divisé les seconds membres par le nombre entier $\frac{b_n}{q} = c_{n-1}$;

elles représenteront des nombres entiers premiers entre eux, pourvu que l'expression de c_{n+1} représente un nombre entier, et que les deux nombres b_n et $(b_n^2 - a_n^2)$ ne puissent avoir d'autre facteur commun que $\frac{b_n}{q}$; ce dernier point est évident, car les quotients de b_n et de $(c_n^2 - a_n^2)$ par $\frac{b_n}{q}$ ne pourraient avoir de facteur premier commun qu'un facteur premier de q , qui diviserait $c_n^2 - a_n^2$, et, par suite, diviserait à la fois c_n , a_n et b_n , puisque a_n et b_n sont multiples de q .

Reste à prouver que l'expression de c_{n+1} représente un nombre entier. Pour cela, partons d'un triangle isocèle ayant pour côtés q et p , et dont φ est l'angle à la base, on aura $\cos \varphi = \frac{p}{2q}$; si cet angle φ appartient à tous les triangles dont nous parlons, et y est opposé au côté a , on aura

$$\frac{a_{n-1}}{\sin \varphi} = \frac{b_{n-1}}{\sin (n-1) \varphi} = \frac{c_{n-1}}{\sin n \varphi}.$$

Or on a

$$\frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi} = 2^{n-1} \cos^{n-1} \varphi - 2^{n-3} \frac{(n-2)}{1} \cos^{n-3} \varphi + \dots,$$

c'est-à-dire

$$\frac{c_{n-1}}{a_{n-1}} = 2^{n-1} \frac{p^{n-1}}{2^{n-1} q^{n-1}} - \dots$$

Donc, si l'on prend pour a_{n-1} le nombre entier q^{n-1} , l'expression correspondante de c_{n-1} sera un nombre entier. Donc enfin, les formules générales qui résolvent la question, en nombres entiers premiers entre eux, sont

$$\begin{aligned} a_n &= q^n, \\ b_n &= c_{n-1} q, \\ c_n &= \frac{c_{n-1}^2 - q^{2n-2}}{c_{n-2}} = p^n - \frac{n-1}{1} p^{n-2} q^2 + \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} p^{n-4} q^4 + \dots \end{aligned}$$

On a, d'ailleurs, $q < p < 2q$.

L'analyse précédente prouve que les seules solutions de la question, en nombres entiers premiers entre eux, sont celles dans lesquelles a_n est la $n^{\text{ième}}$ puissance d'un nombre entier; elle démontre en outre que, si l'on considère la suite,

$$\begin{aligned} a_1 &= q, & a_2 &= q^2, & a_3 &= q^3, \\ b_1 &= q, & b_2 &= qp, & b_3 &= q c_2, \\ c_1 &= p, & c_2 &= p^2 - q^2, & c_3 &= \frac{c_2^2 - q^4}{c_1}; \\ a_n &= q^n, \\ b_n &= q c_{n-1}, \\ c_n &= \frac{c_{n+1}^2 - q^{2n-2}}{c_{n-2}}, \end{aligned}$$

les quantités c_n divisent algébriquement les quantités

$$(c_{n+1}^2 - q^{2n+2}).$$

Parmi les triangles répondant à la question, il en existe dans lesquels les nombres entiers qui représentent les trois côtés sont consécutifs.

Lorsque l'un des angles doit être double de l'autre, on trouve facilement que le seul triangle est celui dont les côtés sont représentés par les nombres 4, 5, 6. D'après cela, soit un triangle général, dans lequel les côtés soient représentés par trois entiers

consécutifs; une première hypothèse à examiner est la suivante :

$$\begin{aligned} a_n &= q^n, \\ b_n &= c_{n-1}q = q^n + 1, \\ c_n &= \frac{c_{n-1}^2 - q^{2n-2}}{c_{n-2}} = q^n + 2. \end{aligned}$$

On en déduit

$$q^2(q^n + 2)c_{n-2} = 2q^n + 1,$$

et n est au moins égal à 3, car nous avons parlé du cas de $n=1$ et $n=2$: donc c_{n-2} existe et est au moins égal à 1; l'égalité précédente est alors impossible, à moins de faire $q=1$, ce qui ne donne pas de véritable triangle. Reste à examiner la deuxième hypothèse,

$$\begin{aligned} a_n &= q^n, \\ b_n &= q^n + 2, \\ c_n &= q^n + 1; \end{aligned}$$

on en tire $c_{n-2} = \frac{4}{q^2}$, ce qui exige $q=2$ et $c_{n-2}=1$; cette dernière relation exige $n=2$, car, si n était supérieur à 2, c_{n-2} serait plus grand que 1; cela est impossible, parce que si n est, par exemple, égal à 3, c_1 serait égal à 1, et a_1 et b_1 seraient supérieurs à c_1 .

Donc, enfin, le seul triangle dont les côtés soient représentés par 3 entiers consécutifs, et dans lequel le rapport de deux angles est un nombre entier, est celui qui a un angle double d'un autre, et dont les côtés sont représentés par les nombre 4, 5, 6. Dans le cas général, il faut remarquer que c_n doit avoir une valeur positive; il faut donc que l'on ait

$$c_{n-1} > q^{n-1}.$$

Si donc on a choisi pour q un nombre entier quelconque, il faut prendre pour p un nombre entier premier avec q , plus petit que $2q$ et, en outre, plus grand que mq , m étant un nombre qui dépend de la valeur de n que l'on considère. Nous donnons les formules relatives à $n=2, 3, 4, 5$,

$$\begin{aligned} a_2 &= q^2, & b_2 &= qp, & c_2 &= p^2 - q^2, \\ a_3 &= q^3, & b_3 &= q(p^2 - q^2), & c_3 &= p(p^2 - 2q^2), \\ a_4 &= q^4, & b_4 &= qp(p^2 - 2q^2), & c_4 &= (p^2 - pq - q^2)(p^2 - q^2 + pq), \\ a_5 &= q^5, & b_5 &= q(p^2 - pq - q^2)(p^2 - q^2 + pq), & c_5 &= p(p^2 - q^2)(p^2 - 3q^2). \end{aligned}$$

Sur des cas de réduction des fonctions Θ de plusieurs variables à des fonctions Θ d'un moindre nombre de variables; par
M. APPELL.

(Séance du 3 mars 1882.)

La formule de réduction pour les fonctions Θ de deux variables que j'ai indiquée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* du 13 février 1882 peut être généralisée de la façon suivante :

I. Considérons la fonction

$$(1) \quad \Theta(x_1, x_2, \dots, x_p | a_{ij}) = \sum_{m_i = -\infty}^{m_i = +\infty} e^{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_p x_p + \varphi(m_1, m_2, \dots, m_p)},$$

où $\varphi(m_1, m_2, \dots, m_p)$ désigne la forme quadratique

$$\sum_{i, j=1}^{i, j=p} a_{ij} m_i m_j, \quad (a_{ij} = a_{ji}).$$

Supposons que les périodes relatives à x_p ,

$$2\pi\sqrt{-1}, 2a_{p1}, 2a_{p2}, \dots, 2a_{pp},$$

soient liées par $(p-1)$ relations distinctes à coefficients entiers de la forme

$$(2) \quad k_{i1} a_{p1} + k_{i2} a_{p2} + \dots + k_{ip} a_{pp} = h_i \pi \sqrt{-1},$$

où

$$i = 1, 2, \dots, (p-1),$$

les lettres k_{ij} et h_i désignant des nombres entiers. Dans cette hypothèse, les périodes relatives à x_p se réduisent à deux; et la fonction Θ définie par l'équation (1) peut être exprimée à l'aide de fonctions Θ de $(p-1)$ variables et de fonctions θ d'une variable.

Pour le montrer, remarquons d'abord que le déterminant des $(p-1)^2$ nombres entiers

$$k_{i1}, k_{i2}, \dots, k_{i, p-1} \quad (i = 1, 2, \dots, p-1)$$

ne peut pas être nul. En effet, si ce déterminant était nul, on pourrait, en multipliant les deux membres des équations (2) par des entiers convenables et ajoutant, éliminer $a_{p1}, \dots, a_{p,p-1}$ et obtenir une relation de la forme

$$Na_{pp} = N'\pi\sqrt{-1},$$

N et N' étant entiers. Mais, comme la partie réelle de a_{pp} est négative et ne peut pas être nulle, on aurait nécessairement $N = 0$, $N' = 0$, et, par suite, les relations (2) ne seraient pas distinctes; ce qui est contre l'hypothèse.

Le déterminant des coefficients de $a_{p1}, a_{p2}, \dots, a_{p,p-1}$, dans les équations (2), n'étant pas nul, on peut résoudre ces équations par rapport à ces quantités, et l'on en tirera des expressions de la forme

$$(3) \quad k_i a_{pi} = k'_i a_{pp} + l_i \pi \sqrt{-1}, \quad (i = 1, 2, \dots, p-1),$$

k_i, k'_i, l_i étant des entiers; certains des nombres k'_i et l_i peuvent être nuls. Je suppose, pour plus de généralité, que $k'_1, k'_2, \dots, k'_v$ soient nuls, $k'_{v+1}, k'_{v+2}, \dots, k'_{p-1}$ étant différents de zéro; en multipliant les deux membres des équations (3) par des entiers convenables, on pourra faire en sorte que les coefficients de a_{pp} dans les $p - v - 1$ dernières des équations (3) deviennent égaux au plus petit commun multiple de $k'_{v+1}, k'_{v+2}, \dots, k'_{p-1}$. Ces relations (3) peuvent alors s'écrire

$$(4) \quad \begin{cases} n_i a_{pi} = q_i \pi \sqrt{-1}, & i = 1, 2, \dots, v, \\ n_{v+j} a_{p,v+j} = n_p a_{pp} + q_{v+j} \pi \sqrt{-1}, & j = 1, 2, \dots, p - v - 1. \end{cases}$$

Dans ces relations (4), on peut toujours supposer les entiers $n_1, n_2, \dots, n_p$ positifs: pour les v nombres n_i la chose est évidente, car on peut évidemment changer les signes des deux membres des v premières équations; quant aux $p - v - 1$ nombres n_{v+j} , on remarquera d'abord que l'on peut ramener les parties réelles des périodes $a_{p,v+j}$ à être négatives, car l'on peut, dans la fonction (1), changer le signe de $a_{p,v+j}$ à condition de changer en même temps le signe de toutes les autres périodes dont un seul des indices est $(v - j)$ et celui de x_{v+j} ; cela revient en effet à changer $m_{v,j}$ en $-m_{v,j}$. Les parties réelles des périodes $a_{p,v+j}$

étant ainsi ramenées à être négatives comme la partie réelle de α_{pp} , les entiers n_{v+j} et n_p sont de même signe, et, comme on peut changer les signes des deux membres des équations (4), on peut faire en sorte que les entiers n_{v+j} et n_p soient positifs.

Cela posé, faisons

$$(5) \quad m_\rho = n_\rho \mu_\rho + t_\rho, \quad (0 \leq t_\rho \leq n_\rho - 1), \quad (\rho = 1, 2, \dots, p),$$

μ_ρ et t_ρ désignant des entiers dont l'un est le quotient et l'autre le reste de la division de m_ρ par n_ρ .

On obtient toutes les valeurs de m_ρ de $-\infty$ à $+\infty$ et seulement une fois chacune de ces valeurs en faisant, dans (5), varier μ_ρ de $-\infty$ à $+\infty$ et t_ρ de 0 à $n_\rho - 1$.

L'on a, d'après cela, pour la fonction (1), l'expression

$$(6) \quad \sum_{t_\rho=0}^{t_\rho=n_\rho-1} \sum_{\mu_\rho=-\infty}^{+\infty} e^{(n_1 \mu_1 + t_1)x_1 + \dots + (n_p \mu_p + t_p)x_p + \varphi(n_1 \mu_1 + t_1, \dots, n_p \mu_p + t_p)}.$$

Posons

$$(7) \quad \begin{cases} \alpha = t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_p x_p + \varphi(t_1, t_2, \dots, t_p), \\ \alpha_\rho = n_\rho x_\rho + n_\rho \frac{\partial \varphi(t_1, t_2, \dots, t_p)}{\partial t_\rho} \quad (\rho = 1, 2, \dots, p); \end{cases}$$

l'expression (6) de la fonction Θ considérée devient

$$(8) \quad \sum_{t_\rho=0}^{t_\rho=n_\rho-1} \sum_{\mu_\rho=-\infty}^{+\infty} e^{\alpha + \mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2 + \dots + \mu_p \alpha_p + \varphi(n_1 \mu_1, n_2 \mu_2, \dots, n_p \mu_p)};$$

on a identiquement

$$\begin{aligned} \varphi(n_1 \mu_1, n_2 \mu_2, \dots, n_p \mu_p) &= \varphi(n_1 \mu_1, n_2 \mu_2, \dots, n_{p-1} \mu_{p-1}, 0) \\ &+ 2 n_p \mu_p (\mu_1 n_1 \alpha_{p1} + \mu_2 n_2 \alpha_{p2} + \dots + \mu_{p-1} n_{p-1} \alpha_{p,p-1}) + n_p^2 \mu_p^2 \alpha_{pp}; \end{aligned}$$

remplaçons dans le coefficient de $2 n_p \mu_p$ les quantités

$$n_1 \alpha_{p1}, n_2 \alpha_{p2}, \dots, n_{p-1} \alpha_{p,p-1}$$

par leurs valeurs (4); nous avons

$$(9) \quad \begin{cases} \varphi(n_1 \mu_1, n_2 \mu_2, \dots, n_p \mu_p) = \varphi(n_1 \mu_1, n_2 \mu_2, \dots, n_{p-1} \mu_{p-1}, 0), \\ - n_p^2 \alpha_{pp} (\mu_p^2 + 2 \mu_p \mu_{p+1} + 2 \mu_p \mu_{p+2} + \dots + 2 \mu_p \mu_{p-1}) + 2 M \pi \sqrt{-1}, \end{cases}$$

M étant entier; cette expression (9) peut s'écrire

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & \varphi(n_1 \mu_1, n_2 \mu_2, \dots, n_p \mu_p) \\ &= \varphi(n_1 \mu_1, n_2 \mu_2, \dots, n_{p-1} \mu_{p-1}, 0) \\ &\quad - n_p^2 a_{pp} (\mu_{v+1} + \mu_{v+2} + \dots + \mu_{p-1})^2 \\ &\quad + n_p^2 a_{pp} (\mu_{v+1} + \mu_{v+2} + \dots + \mu_{p-1} + \mu_p)^2 + 2M\pi\sqrt{-1}. \end{aligned} \right.$$

Dans cette expression (10), la partie indépendante de μ_p , à savoir :

$$\varphi(n_1 \mu_1, n_2 \mu_2, \dots, n_{p-1} \mu_{p-1}, 0) - n_p^2 a_{pp} (\mu_{v+1} + \mu_{v+2} + \dots + \mu_{p-1})^2,$$

est une forme quadratique $\Phi(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1})$ des $p-1$ variables $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1}$; et si l'on écrit cette forme de la façon suivante :

$$(11) \quad \Phi(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1}) = \sum_{i,j=0}^{i,j=p-1} A_{ij} \mu_i \mu_j, \quad (A_{ij} = A_{ji}),$$

on a

$$(11') \quad \left\{ \begin{aligned} A_{ii} &= n_i^2 a_{ii}, & \text{si } i \leq v, \\ A_{ii} &= n_i^2 a_{ii} - n_p^2 a_{pp}, & \text{si } i > v, \\ A_{ij} &= n_i n_j a_{ij}, & \text{si } i \text{ ou } j \leq v, \\ A_{ij} &= n_i n_j a_{ij} - n_p^2 a_{pp}, & \text{si } i \text{ et } j > v. \end{aligned} \right.$$

D'après cela, dans la somme (8), l'exposant de e peut s'écrire, en laissant de côté $2M\pi\sqrt{-1}$, qui est une période de la fonction exponentielle,

$$\alpha + \mu_1 \alpha_1 + \dots + \mu_p \alpha_p + a_{pp} n_p^2 (\mu_{v+1} + \mu_{v+2} + \dots + \mu_p)^2 + \Phi(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1})$$

ou bien

$$\begin{aligned} & \alpha + \mu_1 \alpha_1 + \dots + \mu_v \alpha_v + \mu_{v+1} (\alpha_{v+1} - \alpha_p) + \dots \\ & \quad + \mu_{p-1} (\alpha_{p-1} - \alpha_p) + \Phi(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1}) \\ & + (\mu_{v+1} + \mu_{v+2} + \dots + \mu_{p-1} + \mu_p) \alpha_p + a_{pp} n_p^2 (\mu_{v+1} + \mu_{v+2} + \dots + \mu_p)^2. \end{aligned}$$

Cela posé, faisons dans l'expression (8) la sommation par rapport à μ_p en laissant toutes les autres quantités constantes; nous pourrions mettre en facteur, dans le terme général de cette somme, la quantité

$$(12) \quad e^{\alpha + \mu_1 \alpha_1 + \dots + \mu_{p-1} (\alpha_{p-1} - \alpha_p) + \Phi(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1})},$$

et nous aurons à faire la somme

$$\sum_{\mu_p = -\infty}^{\mu_p = +\infty} e^{(\mu_{p-1} + \dots + \mu_p) \alpha_p + \alpha_p n_p^2 (\mu_{p-1} + \dots + \mu_p)^2},$$

somme qui n'est autre que $\theta_3(\alpha_p | 2\pi\sqrt{-1}, 2n_p^2 \alpha_{pp})^{(1)}$; la sommation par rapport à $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1}$ donne ensuite à chercher la somme des termes tels que (12), somme qui est égale à

$$e^{\alpha} \Theta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v, \alpha_{v+1} - \alpha_p, \dots, \alpha_{p-1} - \alpha_p | A_{ij}).$$

Donc enfin

$$\Theta(x_1, x_2, \dots, x_p | a_{ij}) = \sum_{\ell_p = 0}^{\ell_p = n_p - 1} e^{\alpha} \Theta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v, \alpha_{v+1} - \alpha_p, \dots, \alpha_{p-1} - \alpha_p | A_{ij}) \theta_3(\alpha_p | 2\pi\sqrt{-1}, 2n_p^2 \alpha_{pp}).$$

Telle est la formule de réduction annoncée.

II. Il est un autre cas, où la fonction Θ , définie par la série (1), subit une réduction analogue : c'est le cas où les p groupes de périodes simultanées des $(p-1)$ variables $x_1, x_2, \dots, x_{p-1}$ se réduisent à $(p-1)$ groupes distincts. Cette circonstance se présente lorsque, entre les périodes relatives à ces variables, ont lieu des relations de la forme

$$(13) \quad \begin{cases} k_1 a_{i1} + k_2 a_{i2} + \dots + k_{p-1} a_{i,p-1} + k_p a_{i,p} = h_i \pi \sqrt{-1}, \\ (i = 1, 2, \dots, p-1), \end{cases}$$

$k_1, k_2, \dots, k_p, h_1, h_2, \dots, h_{p-1}$ étant des *nombre entiers*.

Il importe de remarquer que k_p ne peut pas être nul; en effet, supposons $k_p = 0$, multiplions la première des relations (13) par k_1 , la seconde par k_2 , ... la dernière par k_{p-1} , et ajoutons; nous avons

$$\varphi(k_1, k_2, \dots, k_{p-1}, 0) = M \pi \sqrt{-1},$$

M étant réel. Or cette relation est impossible, car, quelles que

(¹) Je désigne par $\theta_3(z | \omega, \omega')$ la fonction θ_3 formée avec ω et ω' (Voir *Théorie des fonctions elliptiques* de MM. Briot et Bouquet, p. 115).

soient les valeurs attribuées aux entiers $m_1, m_2, \dots, m_p$, la partie réelle de $\varphi(m_1, m_2, \dots, m_p)$ est *négative* et n'est jamais *nulle*. Il n'est donc pas permis de supposer $k_p = 0$. Mais il peut arriver que certains des entiers $k_1, k_2, \dots, k_{p-1}$ soient nuls.

Je vais traiter le cas où *aucun des entiers* $k_1, k_2, \dots, k_p$ n'est égal à zéro. Ces entiers ont d'ailleurs des signes quelconques. Faisons, comme précédemment,

$$(14) \quad m_p = k_p \mu_p + t_p, \quad (p = 1, 2, \dots, p),$$

μ_p et t_p étant deux entiers dont le second t_p est positif et satisfait à l'une ou l'autre des conditions

$$(15) \quad \begin{cases} 0 \leq t_p \leq k_p - 1 & \text{si } k_p > 0, \\ 0 \leq t_p \leq -k_p - 1 & \text{si } k_p < 0. \end{cases}$$

L'on obtient encore toutes les valeurs de m_p en faisant varier μ_p de $-\infty$ à $+\infty$ et donnant à t_p les valeurs satisfaisant aux conditions (15). La série (1) peut donc s'écrire

$$(16) \quad \sum_{t_p} \sum_{\mu_p = -\infty}^{+\infty} e^{(k_1 \mu_1 + t_1)x_1 + \dots + (k_p \mu_p + t_p)x_p + \varphi(k_1 \mu_1 + t_1, \dots, k_p \mu_p + t_p)}.$$

Le signe $\sum_{t_p}$ indique une somme étendue aux valeurs (15) de $t_1, t_2, \dots, t_p$. Posons

$$(17) \quad \begin{cases} \beta = t_1 x_1 + \dots + t_p x_p + \varphi(t_1, t_2, \dots, t_p), \\ \beta_p = k_p x_p + k_p \frac{\partial \varphi(t_1, t_2, \dots, t_p)}{\partial t_p} \quad (p = 1, 2, \dots, p); \end{cases}$$

l'exposant de e , dans la somme (16), devient

$$(18) \quad \beta + \mu_1 \beta_1 + \dots + \mu_p \beta_p + \varphi(k_1 \mu_1, k_2 \mu_2, \dots, k_p \mu_p).$$

Dans cet exposant, écrivons, au lieu de $\varphi(k_1 \mu_1, k_2 \mu_2, \dots, k_p \mu_p)$,

$$\varphi[k_1 \mu_p + k_1(\mu_1 - \mu_p), k_2 \mu_p + k_2(\mu_2 - \mu_p), \dots, k_{p-1} \mu_p + k_{p-1}(\mu_{p-1} - \mu_p), k_p \mu_p + 0],$$

et développons par la série de Taylor, en considérant

$$k_1(\mu_1 - \mu_p), \quad k_2(\mu_2 - \mu_p), \quad \dots, \quad k_{p-1}(\mu_{p-1} - \mu_p), \quad 0$$

comme les accroissements des variables. Il est aisé de voir que, en

vertu des relations (13), ce développement se réduit à

$$\varphi(k_1|\mu_p, k_2|\mu_p, \dots, k_p|\mu_p) + \varphi[k_1(\mu_1 - \mu_p), k_2(\mu_2 - \mu_p), \dots, k_{p-1}(\mu_{p-1} - \mu_p), 0] + 2N\pi\sqrt{-1},$$

N étant entier; en effet, le coefficient de $k_i(\mu_i - \mu_p)$, dans ce développement, est $\frac{\partial \varphi(k_1|\mu_p, k_2|\mu_p, \dots, k_p|\mu_p)}{\partial(k_i|\mu_p)}$, c'est-à-dire

$$2\mu_p(k_1 a_{i1} + k_2 a_{i2} + \dots + k_p a_{ip})$$

ou, d'après (13), $2\mu_p h_i \pi \sqrt{-1}$.

L'expression (18) peut donc s'écrire

$$(19) \quad \begin{cases} \beta_1 + (\mu_1 - \mu_p)\beta_1 + (\mu_2 - \mu_p)\beta_2 + \dots + (\mu_{p-1} - \mu_p)\beta_{p-1} \\ + \varphi[k_1(\mu_1 - \mu_p), \dots, k_{p-1}(\mu_{p-1} - \mu_p), 0] + \mu_p(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p) \\ - \mu_p^2 \varphi(k_1, k_2, \dots, k_p) - 2N\pi\sqrt{-1}. \end{cases}$$

Alors, dans la somme (16), laissons d'abord μ_p constant et sommions par rapport à $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1}$; nous pourrions mettre en facteur dans le terme général l'expression

$$(20) \quad e^{\beta_1 + \mu_p(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p) + \mu_p^2 \varphi(k_1, k_2, \dots, k_p)},$$

et la somme à évaluer sera

$$\sum_{\mu_1, \dots, \mu_{p-1} = -\infty}^{+\infty} e^{(\mu_1 - \mu_p)\beta_1 + \dots + (\mu_{p-1} - \mu_p)\beta_{p-1} + \varphi[k_1(\mu_1 - \mu_p), \dots, k_{p-1}(\mu_{p-1} - \mu_p), 0]},$$

c'est-à-dire une fonction Θ de $p-1$ variables

$$\Theta(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p-1} | k_i' k_j' a_i' j') \quad \left(\begin{matrix} i' = 1, 2, \dots, p-1 \\ j' = 1, 2, \dots, p-1 \end{matrix} \right).$$

Si ensuite nous faisons la sommation par rapport à μ_p , nous avons à évaluer la somme des expressions (20), μ_p variant de $-\infty$ à $+\infty$, ce qui donne

$$e^{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p} [2\pi\sqrt{-1}, 2\varphi(k_1, k_2, \dots, k_p)].$$

Donc enfin, d'après la formule (16),

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} & \Theta(x_1, x_2, \dots, x_p | a_{ij}) \\ & = \sum_{i,j} e^{\beta \Theta(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p-1} | k_i' k_j' a_i' j')} \\ & \quad \times \theta_3[\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p | 2\pi\sqrt{-1}, 2\varphi(k_1, k_2, \dots, k_p)]; \end{aligned} \right.$$

ce qui donne l'expression cherchée.

Il est à remarquer que $2\varphi(k_1, k_2, \dots, k_p)$ se réduit, en négligeant un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$, à

$$k_p \frac{\partial \varphi(k_1, k_2, \dots, k_p)}{\partial k_p},$$

car les relations (13) peuvent s'écrire

$$\frac{\partial \varphi(k_1, k_2, \dots, k_p)}{\partial k_i} = 2h_i \pi \sqrt{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, p-1).$$

III. Une méthode analogue s'applique au cas où, dans les relations (13), certains des entiers $k_1, k_2, \dots, k_p$ sont nuls. Si l'on suppose

$$k_1 = k_2 = \dots = k_v = 0,$$

$k_{v+1}, k_{v+2}, \dots, k_p$ étant différents de zéro, il faudra poser

$$\begin{aligned} m_\lambda &= \mu_\lambda & (\lambda = 1, 2, \dots, v), \\ m_{v+\rho} &= k_{v+\rho} \mu_{v+\rho} + t_\rho & (\rho = 1, 2, \dots, p-v), \end{aligned}$$

les entiers t_ρ étant assujettis à la condition

$$(22) \quad \begin{cases} 0 \leq t_\rho \leq k_{v+\rho} - 1 & \text{si } k_{v+\rho} > 0, \\ 0 \leq t_\rho \leq -k_{v+\rho} - 1 & \text{si } k_{v+\rho} < 0. \end{cases}$$

La fonction $\Theta(1)$ peut alors s'écrire

$$(23) \quad \sum_{t_\rho} \sum_{\mu_i = -\infty}^{+\infty} e^{\mu_1 x_1 + \dots + \mu_v x_v + (\mu_{v+1} k_{v+1} + t_1) x_{v+1} + \dots + (\mu_p k_p + t_{p-v}) x_p + \varphi(\mu_1, \dots, \mu_v, k_{v+1} \mu_{v+1} + t_1, \dots, k_p \mu_p + t_{p-v})}$$

le signe $\sum_{t_\rho}$ indiquant une sommation faite par rapport à $t_1, t_2, \dots,$

t_{p-v} et étendue aux valeurs (22).

Si l'on pose

$$\gamma = t_1 x_{v+1} + t_2 x_{v+2} + \dots + t_{p-v} x_p + \varphi(0, 0, \dots, 0, t_1, \dots, t_{p-v}),$$

$$\gamma_\lambda = x_\lambda + 2(\alpha_{\lambda, v+1} t_1 + \alpha_{\lambda, v+2} t_2 + \dots + \alpha_{\lambda, p} t_{p-v}), \quad (\lambda = 1, 2, \dots, v),$$

$$\gamma_{v+\rho} = k_{v+\rho} x_{v+\rho} + k_{v+\rho} \frac{\partial \varphi(0, 0, \dots, 0, t_1, \dots, t_{p-v})}{\partial t_\rho}, \quad (\rho = 1, 2, \dots, p-v),$$

$$\Theta'(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{p-1}) = \sum_{m_1, \dots, m_{p-1} = -\infty}^{m_1, \dots, m_{p-1} = +\infty} e^{m_1 \xi_1 + \dots + m_{p-1} \xi_{p-1} + \varphi(m_1, \dots, m_v, k_{v+1} m_{v+1}, \dots, k_{p-1} m_{p-1}, 0),}$$

l'on obtient, comme précédemment, la formule de réduction

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta(x_1, x_2, \dots, x_p | a_{ij}) \\ = \sum_{\gamma_p} e^{\gamma \theta'(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{p-1})} \\ \quad \times \theta_3[\gamma_{v+1} + \gamma_{v+2} + \dots + \gamma_p | 2\pi\sqrt{-1}, 2\varphi(0, 0, \dots, 0, k_{v+1}, \dots, k_p)]. \end{array} \right.$$

Ici encore l'on a, en négligeant un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$,

$$2\varphi(0, 0, \dots, 0, k_{v+1}, k_{v+2}, \dots, k_p) = k_p \frac{\partial \varphi(0, 0, \dots, k_{v+1}, k_{v+2}, \dots, k_p)}{\partial k_p}.$$

Sur une série d'Abel; par M. HALPHEN.

(Séance du 16 décembre 1881.)

Dans le Tome II des *Œuvres d'Abel*, comprenant les Mémoires que l'illustre géomètre n'avait pas publiés lui-même, se trouve (page 82 de la 1^{re} édition, 73 de la 2^e) une série très remarquable dont l'étude n'a pas encore été faite d'une manière satisfaisante. C'est cette étude que j'ai entreprise et que l'on trouvera dans le présent Mémoire.

1. Considérons la suite indéfinie des polynômes $P_0, P_1(x), P_2(x), \dots$, que voici :

$$P_0 = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{x(x - 2\beta)}{2}, \quad \dots, \quad P_n(x) = \frac{x(x - n\beta)^{n-1}}{2.3\dots n},$$

où β est une constante quelconque. Les degrés de ces polynômes successifs reproduisent la suite des nombres naturels. Il est donc évident que tout polynôme entier pourra être développé suivant les polynômes P , en cette sorte :

$$(1) \quad \varphi(x) = \mu_0 P_0 + \mu_1 P_1(x) + \mu_2 P_2(x) + \dots + \mu_n P_n(x).$$

Les coefficients μ seront indépendants de x , et l'indice n , celui du dernier terme, sera le degré de $\varphi(x)$.

Pour trouver les coefficients μ , observons deux propriétés des polynômes P : 1^o ils s'évanouissent tous, sauf P_0 , pour $x = 0$;

2^o ils vérifient la relation

$$\frac{dP_n(x)}{dx} = P_{n-1}(x - \beta),$$

et, par suite, aussi la relation plus générale

$$\frac{d^m P_n(x)}{dx^m} = P_{n-m}(x - m\beta).$$

En dérivant m fois l'identité (1), on obtient donc

$$\varphi^m(x) = \mu_m P_0 + \mu_{m+1} P_1(x - m\beta) + \mu_{m+2} P_2(x - m\beta) + \dots$$

Prenant enfin $x = m\beta$, on a

$$\mu_m = \varphi^{(m)}(m\beta).$$

Donc, tout polynôme entier $\varphi(x)$ peut être mis sous la forme

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(x) = & \varphi(0) + x\varphi'(\beta) + \frac{x(x-2\beta)}{2} \varphi''(2\beta) + \dots \\ & + \frac{x(x-n\beta)^{n-1}}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \varphi^{(n)}(n\beta) + \dots \end{aligned} \right.$$

dans laquelle β est une quantité arbitraire.

Cette formule (2) est celle d'Abel. Le problème que je me propose ici est d'étudier sous quelles conditions la série (2), formée avec une fonction quelconque, et indéfiniment prolongée, représente effectivement cette fonction.

Voici comment je procéderai. Je prendrai la série générale

$$(3) \quad F(x) = \mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 \frac{x(x-2\beta)}{2} + \dots + \mu_n \frac{x(x-n\beta)^{n-1}}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} + \dots,$$

où les coefficients μ seront indépendants de x , et d'ailleurs quelconques, assujettis seulement à rendre la série convergente. J'étudierai la fonction $F(x)$ ainsi définie, et je montrerai que cette fonction a plusieurs propriétés caractéristiques. De là découlent des conditions nécessaires pour qu'une fonction $\varphi(x)$ puisse vérifier la formule (2). Je prouverai ensuite que ces mêmes conditions sont aussi suffisantes, et le problème se trouvera résolu.

2. Considérons le terme de rang $(n+1)$ dans la série (3), et

écrivons-le ainsi

$$(4) \quad T_n = (-1)^{n-1} \frac{x(n\beta)^{n-1} \left(1 - \frac{x}{n\beta}\right)^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots n} \mu_n.$$

Posons, pour abréger l'écriture,

$$\frac{x}{\beta} = \xi.$$

La quantité T_n , pour n infiniment grand, a, d'après la formule de Stirling, l'expression asymptotique

$$(5) \quad T_n = \frac{(-1)^{n-1} \xi e^{-\xi}}{\sqrt{2\pi}} \frac{(e\beta)^n \mu_n}{n^{\frac{3}{2}}},$$

d'où je tire cette première conclusion : *Pour que les termes de la série (3) convergent vers zéro, il faut et il suffit que l'on ait*

$$(6) \quad \mu_n = (-1)^{n-1} n^{\frac{3}{2}} (e\beta)^{-n} u_n,$$

u_n étant infiniment petit avec $\frac{1}{n}$.

C'est là une première condition nécessaire, mais non suffisante, à la convergence de la série (3).

Si la série dont le terme général est u_n est absolument convergente, aucune condition ultérieure n'est plus nécessaire à la convergence de la série (3). D'ailleurs u_n est indépendant de x . Donc, dans un tel cas, la série (3) définit la fonction $F(x)$ pour toute valeur de x . Cette fonction est finie et uniforme dans tout le plan.

Je vais étendre ce résultat aux autres cas. Pour y parvenir, je prendrai une expression asymptotique de T_n , plus approchée que l'expression (5).

3. Développant $\left(1 - \frac{\xi}{n}\right)^{n-1}$ suivant les puissances décroissantes de n , j'ai d'abord

$$(7) \quad \begin{cases} \left(1 - \frac{\xi}{n}\right)^{n-1} = e^{-\xi} \left[1 - \frac{1}{n} \left(\xi - \frac{1}{2} \xi^2\right) + \frac{c_n}{n^2}\right], \\ (\lim c_n)_{n \rightarrow \infty} = \frac{1}{8} \xi^3 - \frac{2}{3} \xi^2 + \xi^2. \end{cases}$$

J'obtiens de même, par la formule de Stirling,

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} n^{-(n+\frac{1}{2})} e^n \left(1 - \frac{1}{12n} + \frac{e'_n}{n^2}\right), \\ (\lim e'_n)_{n=\infty} = \frac{1}{288}. \end{cases}$$

De ces deux formules, je conclus, en tenant compte de (6),

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{\xi e^{-\xi}}{\sqrt{2\pi}} \left[u_n + \left(\xi - \frac{1}{2} \xi^2 - \frac{1}{12} \right) \frac{u_n}{n} + b_n \frac{u_n}{n^2} \right], \\ (\lim b_n)_{n=\infty} &= \frac{1}{8} \xi^4 - \frac{2}{3} \xi^3 + \frac{25}{24} \xi^2 - \frac{1}{12} \xi + \frac{1}{288}. \end{aligned}$$

Dès que u_n est supposé infiniment petit avec $\frac{1}{n}$, la série, dont le terme général est $\frac{b_n u_n}{n^2}$, est absolument convergente. La série (3) converge ou diverge en même temps que la série s , dont le terme général est

$$s_n = u_n + \left(\xi - \frac{1}{2} \xi^2 - \frac{1}{12} \right) \frac{u_n}{n}.$$

Si maintenant la série (3) converge, non plus pour une valeur particulière de x , mais pour une suite de valeurs attribuées à cette variable, la convergence séparée des deux séries, ayant pour termes généraux respectivement u_n et $\frac{u_n}{n}$, est nécessaire. Elle est d'ailleurs suffisante. Cette condition même se présente si l'on exige simplement que la série (3) converge pour deux valeurs différentes attribuées à x , pourvu que la somme de ces valeurs ne soit pas 2β . Mais c'est là un détail sans importance.

D'après un théorème d'Abel, la série dont le terme général est $\frac{u_n}{n}$ converge dès que celle dont le terme général est u_n est convergente. Je fais allusion ici au théorème III du Mémoire sur la série du binôme ⁽¹⁾ (t. I, p. 69 des *Oeuvres complètes*, p. 222 de la 2^e édition). J'ai donc, en conclusion :

La condition nécessaire et suffisante à la convergence de la

⁽¹⁾ Cette application du théorème d'Abel m'a été indiquée par M. Jordan.

série (3), pour x variable, consiste dans la convergence de la série, indépendante de x , qui a pour terme général

$$u_n = (-1)^{n-1} (e\beta)^n n^{-\frac{3}{2}} \mu_n.$$

Cette condition satisfaite, la série (3) représente une fonction synectique dans tout le plan.

Je dis *synectique*, quoique la démonstration établisse simplement que $F(x)$ est finie et uniforme. Mais il est très aisé de démontrer encore que la série (3) peut être différenciée; il n'est pas besoin de s'y arrêter.

4. De la définition (3) résulte, pour la fonction $F(x)$, la même conclusion qui a été tirée de (1) pour un polynôme entier,

$$(9) \quad \begin{cases} F^{(m)}(x) = \mu_m + \mu_{m+1} P_1(x - m\beta) + \mu_{m+2} P_2(x - m\beta) + \dots, \\ F^{(m)}(m\beta) = \mu_m. \end{cases}$$

Il n'est donc pas douteux que la série (3) n'est pas plus générale que la série d'Abel, formée avec une fonction quelconque. Il faut toutefois observer que la fonction $F(x)$, définie par la série (3), où les coefficients μ peuvent être liés à β d'une manière quelconque n'est généralement pas indépendante de β .

C'est de l'égalité (9) que je vais tirer les propriétés caractéristiques de la fonction $F(x)$. Je ferai croître au delà de toute limite l'indice de dérivation m , et, en même temps, je supposerai x de la forme suivante :

$$(10) \quad x = (\tau_1 + p)\beta,$$

τ_1 désignant une quantité quelconque invariable avec m , et p un nombre positif, variant avec m d'une manière arbitraire, mais ne dépassant pas m .

Si, pour m infini, $(m - p)$ reste fini, les propriétés de $F^{(m)}(x)$ se déduisent immédiatement de l'analyse qui précède. En désignant maintenant par ξ la quantité finie $\frac{x - m\beta}{\beta}$, je pourrai employer les mêmes formules qu'au numéro précédent.

Posant

$$c_n = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)^2 \left[1 - \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \xi^2 - \frac{1}{12} \right) - \frac{b_n}{n^2} \right] u_{m+n}, \quad \xi = \frac{x - m\beta}{\beta},$$

et désignant par T_n le $(n+1)^{\text{ème}}$ terme du développement (9), j'obtiens

$$m^{-\frac{1}{2}} e^{m\beta} T_n = (-1)^m \frac{\xi e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} v_n.$$

Suivant les hypothèses, la série $v_1 + v_2 + v_3 + \dots$ converge vers zéro avec $\frac{1}{m}$. J'ai donc le résultat suivant, où je mets la lettre y au lieu de $\gamma\beta$:

Quand m est infiniment grand et que y reste fini, le produit $m^{-\frac{1}{2}} e^{m\beta} F^{(m)}(y + m\beta)$ converge vers zéro.

5. Je vais maintenant généraliser ce résultat en envisageant pour x une valeur quelconque de la forme (10), dans laquelle on devra supposer $(m-p)$ infini avec m .

Pour la démonstration, je suppose γ réel, et je ferai disparaître cette restriction *a posteriori*.

D'après les hypothèses, $\left(\frac{x-m\beta}{\beta}\right)$ est réel et négatif pour m suffisamment grand.

J'écris maintenant le $(n+1)^{\text{ème}}$ terme T_n de (9) en me servant toujours des formules (6) et (8), mais sans faire usage de la formule (7). Posant

$$w_n = \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{12n} - \frac{c'_m}{n^2}\right)^{n_{m+n}},$$

j'obtiens le résultat suivant :

$$(11) \quad m^{-\frac{1}{2}} e^{p\beta} T_n = \frac{(-1)^{m-1}}{\sqrt{2\pi}} e^{p-m} \frac{m - \gamma - p}{m} \left(1 - \frac{m - \gamma - p}{n}\right)^{n-1} w_n.$$

Dans le second membre de cette formule (11), abstraction faite des trois premiers facteurs, indépendants de n , nous multiplions w_n par la fonction $\left(1 + \frac{m - \gamma - p}{n}\right)^{n-1}$, qui est toujours croissante avec n . C'est ce qui résulte de la supposition $(m - \gamma - p) > 0$. La limite de la série se trouve alors au moyen du théorème d'Abel cité précédemment, et auquel on fait une modification insignifiante. Voici ce théorème modifié comme il convient ici :

En désignant par $w_1, w_2, \dots, w_n$ une série de quantités quel-

conques, et supposant $p_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n$ de module toujours moindre qu'une quantité déterminée δ , quel que soit n , on aura

$$\text{mod.}(\varepsilon_1 w_1 + \varepsilon_2 w_2 + \dots + \varepsilon_n w_n) < \delta \varepsilon_1 + (p_n - \delta) \varepsilon_n,$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$ étant des quantités positives croissantes.

Appliquant ici cette proposition, en prenant pour w_n les quantités précédentes, et pour ε_n cette autre :

$$\varepsilon_n = e^{p-m} \left(1 + \frac{m - r_1 - p}{n} \right)^{n-1},$$

nous aurons pour δ et pour p_n des quantités infiniment petites avec $\frac{1}{m}$; pour ε_1 , la quantité infiniment petite e^{p-m} ; quant à ε_n , son maximum a lieu pour n infini; c'est une quantité finie e^{-r_1} .

La somme est donc infiniment petite, et j'ai ce résultat :

Quand m est infiniment grand et que y reste fini, le produit $m^{-\frac{5}{2}} e^p \beta^m F^{(m)}(y + p\beta)$ converge vers zéro, p étant un nombre positif variant arbitrairement avec m , mais ne surpassant pas m .

Comme je l'ai fait observer, cette proposition n'est encore établie que pour le cas où $y; \beta$ est réel. Faisons maintenant disparaître cette restriction.

6. Posons, pour un instant,

$$e^p F(y + p\beta) = f(y).$$

La fonction $f(y)$ est synectique dans tout le plan (n° 3); je peux donc appliquer la série de Taylor, quels que soient y et h :

$$f^{(m)}(y + h) = f^{(m)}(y) + \frac{h}{1} f^{(m+1)}(y) + \frac{h^2}{1.2} f^{(m+2)}(y) + \dots$$

Soit β_1 une quantité de module moindre que β . D'après la dernière proposition, j'ai

$$\beta_1^{m+n} f^{(m+n)}(y) = \omega_n,$$

où ω_n est infiniment petit avec $\frac{1}{m}$. Employant ces quantités ω_n , je

ces relations étant entendues s'appliquer aux modules des quantités envisagées. Je peux donc énoncer le résultat sous cette forme, qui est définitive.

La fonction $F(x)$, définie par la série (3), jouit de la propriété suivante :

Soit z une quantité quelconque de même argument que β et de module moindre que celui de β , soit p un nombre positif variant avec m d'une manière arbitraire, sans dépasser m , et soit enfin γ une quantité arbitraire, mais fixe; le produit $z^m e^{pF(m)}(\gamma + pz)$ converge vers zéro avec $\frac{1}{m}$. C'est le terme général d'une série absolument convergente.

7. J'en ai fini maintenant avec l'étude des propriétés qui résultent de la définition d'une fonction par la série (3), et j'arrive à la solution du problème proposé. Mais d'abord je fais deux remarques concernant toute fonction F jouissant de la propriété qui vient d'être énoncée.

Formons la série d'Abel avec cette fonction F et en prenant z au lieu de β pour construire la série. Nous obtenons ainsi

$$(12) \quad \mathcal{F}(x, z) = F(0) + \frac{x}{1} F'(z) + \dots + \frac{x(x - mz)^{m-1}}{1.2\dots m} F^{(m)}(mz) + \dots$$

Cette série converge, comme il résulte de la règle énoncée à la fin du n° 3; car on a

$$u_m = (-1)^{m-1} (ez)^{m-\frac{3}{2}} F^{(m)}(mz).$$

D'après la proposition ci-dessus, où l'on suppose $\gamma = 0$, $p = m$, u_m est le terme général d'une série convergente.

La fonction $\mathcal{F}(x, z)$ est donc définie par la série (12) pour toute valeur de x , et pour les valeurs de z dont l'argument est celui de β , et le module moindre. Quant aux valeurs de z dont l'argument diffère de celui de β , on ne sait, jusqu'à présent, si, pour ces valeurs, la série (12) converge.

La seconde remarque se rapporte à la conséquence obtenue en supposant $p = 0$; et je peux l'énoncer ainsi :

THÉORÈME I. — *Pour que la série d'Abel puisse être appli-*

quée à une fonction $f(x)$, il faut qu'il existe des constantes α laissant le produit $\alpha^m f^{(m)}(x)$ fini, pour m infini.

8. Rien n'est plus aisé que de concevoir, de la manière la plus générale, une fonction $f(x)$ jouissant de cette dernière propriété, et de caractériser le maximum a du module des constantes α . Que l'on prenne une série procédant suivant les puissances croissantes de x , et dont le cercle de convergence ait le rayon a , et soit

$$\psi(x) = v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + v_3 x^3 + \dots + v_m x^m + \dots$$

cette série. En posant

$$f(x) = v_0 + v_1 \frac{x}{1} + v_2 \frac{x^2}{1.2} + v_3 \frac{x^3}{1.2.3} + \dots + v_m \frac{x^m}{1.2\dots m} + \dots,$$

on aura la fonction demandée $f(x)$. On peut encore figurer sa liaison avec $\psi(x)$ de cette manière,

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int \psi(z) e^{\frac{x}{z}} \frac{dz}{z},$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour fermé, embrassant l'origine, et de rayon maximum moindre que a . Les deux fonctions f et ψ jouent ainsi, l'une par rapport à l'autre, le rôle de *génératrice et de déterminante* au sens qu'Abel donne à ces mots dans le Mémoire où se trouve la série dont je m'occupe ici. Mais je ne ferai pas usage de cette notion.

Si la série $\psi(x)$ est convergente dans tout le plan, la constante a dépasse toute limite. On a alors une classe de fonctions $f(x)$, parmi lesquelles se rangent les fonctions de Bessel, dont on a l'exemple le plus simple en prenant $\psi(x) = e^x$. La fonction $\cos\sqrt{x}$ appartient aussi à cette classe, et de même $\sqrt{x} \sin\sqrt{x}$.

La fonction $e^{\frac{x}{\alpha}}$ est le type le plus simple des fonctions $f(x)$ qui correspondent à la constante α , ou mieux $e^{\frac{x}{\alpha}}$, α ayant le module a et un argument quelconque.

9. Prenons une fonction $f(x)$ répondant à la constante α . Soit α_1 une quantité, d'argument quelconque et de module inférieur à a . Quel que soit x , le produit $\alpha_1^m f^{(m)}(x)$ a pour limite zéro. Les

termes du développement de $f(x)$ par la série de Maclaurin sont infiniment petits par rapport aux termes correspondants du développement de $e^{\frac{x}{\alpha_1}}$. Il en est de même pour les dérivées d'ordre quelconque de ces fonctions, en sorte qu'en désignant par ϵ un infiniment petit, terme général d'une série absolument convergente, on a

$$f^{(m)}(x) = \frac{\epsilon}{\alpha_1^m} e^{\frac{x}{\alpha_1}}.$$

Cette conséquence a lieu, même si x varie, en sorte que, mettant mz au lieu de x , j'ai

$$(13) \quad f^{(m)}(mz) = \epsilon \left(\frac{e^{\frac{z}{\alpha_1}}}{\alpha_1} \right)^m.$$

Considérons maintenant l'équation transcendante

$$(14) \quad ue^{1+u} = 1,$$

qui a une racine positive et une seule, égale environ à 0,27, et que nous désignerons par u .

Choisissons pour z une quantité, ayant le même argument que α_1 , et astreinte à la condition

$$\frac{z}{\alpha_1} \leq u.$$

Comme u est racine de (14), il en résulte

$$\frac{z}{\alpha_1} e^{\frac{z}{\alpha_1}} \leq \frac{1}{e},$$

et, à cause de (13),

$$(15) \quad f^{(m)}(mz) = \epsilon' (ez)^{-m},$$

ϵ' étant comme ϵ , un infiniment petit, terme général d'une série absolument convergente. Ainsi, $f(x)$ étant une fonction quelconque satisfaisant à la condition que $\alpha^m f^{(m)}(x)$ ne devienne pas infini avec m , cette fonction, comme on le voit, satisfait en même temps à la condition (15), pourvu qu'on prenne pour z une quantité d'argument quelconque, et de module moindre que $u\alpha$.

La condition (15) est précisément celle qui permet de déduire de $f(x)$ une fonction $\mathcal{F}(x, z)$, comme on l'a fait pour $F(x)$, au

moyen de la formule (12). En prenant donc

$$(16) \quad \tilde{f}(x, z) = f(0) + \frac{x}{1} f(z) + \dots + \frac{x(x-mz)^{m-1}}{1, 2, \dots, m} f^{(m)}(mz) + \dots$$

je définis $\tilde{f}(x, z)$, fonction synectique de x dans tout le plan, et synectique aussi par rapport à z pour les valeurs dont le module est moindre que ua .

Pour ces valeurs de z , il est permis de développer $\tilde{f}(x, z)$ au moyen de la série de Maclaurin, étendue au cas de deux variables. Si l'on veut former les termes de ce développement jusqu'à l'ordre quelconque n , on obtiendra, pour ces termes, la même forme analytique que si $f(x)$ était un polynôme entier de degré au moins égal à n . Or, si $f(x)$ est un polynôme entier, $\tilde{f}(x, z)$ se réduit à $f(x)$ (n° 1). Donc, si loin qu'on pousse le développement, on le voit toujours coïncider avec celui de $f(x)$. Donc, pour les valeurs de z envisagées, on a $\tilde{f}(x, z) = f(x)$. De là cette première conclusion énonçant des conditions suffisantes, mais non pas nécessaires.

II. Soit a le plus grand module des quantités z , laissant fini $x^m f^{(m)}(x)$ pour m infini; soit u la racine positive de l'équation $ue^{1-u} = 1$; la série d'Abel représente $f(x)$ quand le module de z est moindre que ua .

Et, en particulier, à une fonction $f(x)$, pour laquelle la constante, désignée par a , dépasse toute limite, la série d'Abel s'applique, quelle que soit la constante ξ .

10. La condition (15), nécessaire à l'existence de la série (16), est satisfaite, comme je viens de le prouver pour les valeurs de z , de module moindre que ua et d'argument quelconque. Mais il arrivera généralement que, si l'on donne à z un argument déterminé ω , la condition (15) soit encore satisfaite pour des valeurs de z de module supérieur à ua . Soit ξ la limite de ces modules. $\tilde{f}(x, z)$ est alors une fonction de z , continue ainsi que toutes ses dérivées, pour les valeurs de z , d'argument ω et de module moindre que ξ . Tant que le module de z ne dépasse pas ua , elle coïncide avec $f(x)$. Donc elle coïncide avec $f(x)$ jusqu'à la limite ξ du module de z . De là une condition suffisante pour que la série d'Abel représente

$f(x)$, condition qui coïncide avec celle qu'à la fin du n° 6 on a reconnue nécessaire.

III. Les notations étant les mêmes que dans l'énoncé II, le produit $(ez)^m f^{(m)}(mz)$ reste fini, pour m infini, tant que le module de z reste inférieur à ua . Mais si z conserve un même argument ω , et que son module croisse d'une manière continue au delà de ua , le produit $z^m f^{(m)}(mz)$ reste encore fini jusqu'à une autre limite du module de z . Soit $\varphi(\omega)$ cette limite, dont la forme dépend de la fonction $f(x)$.

La condition nécessaire et suffisante pour que la série d'Abel s'applique à $f(x)$ consiste en ce que le point affixe de β soit situé à l'intérieur de la courbe $\rho = \varphi(\omega)$; ou, en d'autres termes, que si l'on donne à β l'argument ω , le module de β soit moindre que $\varphi(\omega)$.

11. L'exemple qu'il est naturel de prendre en premier lieu est celui qui se rapporte à la fonction exponentielle. Soit donc $f(x) = e^x$. Le nombre a est alors l'unité. Si l'on pose

$$z = \rho (\cos \omega + i \sin \omega),$$

on a

$$\text{mod}(ez)^m f^{(m)}(mz) = (\rho e^{1+i \cos \omega})^m.$$

Par conséquent, la courbe qui limite les positions du point β a pour équation

$$(17) \quad \rho e^{1+i \cos \omega} = 1.$$

Elle se compose : 1° de deux branches infinies se croisant au point dont les coordonnées sont $\rho = 1$, $\omega = \pi$; 2° d'une boucle convexe, partant de ce dernier point, où son rayon vecteur est maximum, entourant l'origine et ayant, pour rayon minimum, $\rho = u$, répondant à $\omega = 0$. C'est à l'intérieur de cette boucle convexe que doit se trouver le point β . Cette condition s'exprime par les deux inégalités simultanées

$$\text{mod } \beta < 1, \quad \text{mod } \beta e^{1+\beta} < 1.$$

12. Cet exemple acquiert plus d'intérêt si l'on prend $f(x) = e^{\lambda x}$, λ étant une quantité complexe quelconque. La condition consiste

alors en ce que le point affixe de $\lambda\beta$ soit à l'intérieur de la boucle convexe de la courbe (17). Sous la forme analytique, la condition est exprimée par les inégalités *simultanées*

$$(18) \quad \text{mod } \lambda\beta < 1, \quad \text{mod } \lambda\beta e^{1-\lambda\beta} < 1.$$

Voici maintenant ce qui fait l'intérêt de cet exemple. En premier lieu, la série correspondant à ce cas

$$(19) \quad e^{\lambda x} = 1 + \lambda x e^{\lambda\beta} + \dots + \frac{x(x-n\beta)^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots n} (\lambda e^{\lambda\beta})^n \dots$$

est précisément celle qui sert de point de départ à Abel pour trouver la série générale dont il s'agit dans ce Mémoire. Abel emprunte cette série particulière à Legendre, mais sans rechercher les conditions sous lesquelles la formule (19) est exacte.

En second lieu, la formule (19) est un exemple classique de la série de Bürmann. Si l'on envisage $e^{\lambda x}$ comme une fonction de $\lambda e^{\lambda\beta}$ par l'intermédiaire de la variable λ , β et x étant considérés comme des constantes, elle donne, en effet, le développement de $e^{\lambda x}$ suivant les puissances croissantes de $\lambda e^{\lambda\beta}$. Si l'on se place à ce point de vue, on pourra chercher directement les conditions d'exactitude de la formule (19). A cet effet, posant

$$(20) \quad \lambda\beta e^{\lambda\beta} = \zeta,$$

on devra examiner quel est le rayon maximum du cercle concentrique à l'origine, à l'intérieur duquel on peut faire décrire à ζ un contour fermé quelconque, de telle sorte qu'une racine λ de l'équation (20) se reproduise, après que ce contour aura été parcouru. On devra aussi chercher quelle est cette racine.

La première question se résout immédiatement par le moyen du développement (19), dont la convergence exige la seconde des conditions (18), c'est-à-dire

$$\text{mod } \zeta < \frac{1}{e}.$$

Il reste à examiner la seconde question qui, en d'autres termes, peut se poser ainsi : ζ ayant son module inférieur à $\frac{1}{e}$, la série

$$1 + \frac{x}{\beta} \zeta + \dots + \frac{x(x-n\beta)^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots n \beta^n} \zeta^n + \dots$$

converge et représente $e^{\lambda x}$, λ étant une racine de l'équation (20). On demande quelle est cette racine.

La solution directe de cette question par l'étude de l'équation (20) n'offre pas de difficulté sérieuse; elle devient inutile, grâce à la théorie que j'ai développée ici, et qui fournit la réponse suivante : la racine demandée est la seule qui assigne à $\lambda\beta$ un module moindre que l'unité. C'est ce que nous apprend la première condition (18) (1).

13. Par l'exemple qui vient d'être examiné, on voit que la série d'Abel peut converger sans représenter la fonction qui sert à la construire. C'est ce qui arrive quand on choisit $\lambda\beta$ de manière que la seconde des conditions (18) soit satisfaite, mais non la première. On peut obtenir encore la même circonstance en ajoutant, à une fonction qui se représente par la série, une fonction qui donne zéro pour chaque terme de la série. C'est ce qui a lieu si l'on prend

$$f(x) = \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2\beta},$$

k étant un nombre entier. On a effectivement

$$f^{(m)}(m\beta) = \left[\frac{(2k+1)\pi}{2\beta} \right]^m \sin \left[\frac{(2k+1)m\pi}{2} + \frac{m\pi}{2} \right] = 0.$$

Ainsi, généralement, la fonction

$$A_0 \sin \frac{\pi x}{2\beta} + A_1 \sin \frac{3\pi x}{2\beta} + A_2 \sin \frac{5\pi x}{2\beta} + \dots,$$

formée de termes analogues, en nombre limité, ne peut être re-

(1) L'excellent *Compendium der höheren Analysis* de M. Schlömilch contient au sujet de cette série particulière, une inexactitude. Je crois la rectification d'autant plus utile que cet ouvrage est plus répandu et apprécié.

Dans le t. II, p. 105 (3^e édition), pour l'existence du développement

$$e^{az} = 1 + \frac{a}{1} z e^{-z} + \frac{a(a+1)}{1.2} z^2 e^{-2z} + \dots,$$

le savant auteur énonce que la condition, pour z réel, est $0 \leq z < 1$. Cette formule est un cas de (19), obtenu en mettant a, z au lieu de x, λ , et faisant $\beta = -1$. Les conditions sont donc $\text{mod } z < 1$, $\text{mod } ze^{1-z} < 1$, et, pour z réel, $-u < z < 1$, u étant la transcendante numérique indiquée au n° 9.

présentée par la série d'Abel, relative à la constante β , car la série a tous ses termes nuls.

Laisant de côté ces observations, j'arrive maintenant à l'application qui me paraît offrir le plus d'intérêt, celle de la série d'Abel à une fonction rationnelle. Je vais mettre en évidence le résultat que voici : *appliquée à une fonction rationnelle, la série d'Abel converge toujours et ne représente jamais la fonction, sauf au cas où il s'agit d'un polynôme entier.* Elle ne peut représenter la fonction, puisque cette dernière n'est pas synectique dans tout le plan.

14. Appliquons d'abord la série d'Abel à la fonction

$$\varphi(x) = \frac{1}{x - \beta},$$

j'obtiens le développement suivant :

$$F(x, z, \beta) = \frac{1}{z} + \frac{x}{(x - \beta)z} + \frac{x(x - \beta)}{(x - \beta)^2 z^2} + \dots + \frac{x(x - \beta)^{n-1}}{(x - \beta)^n z^n} + \dots$$

qui converge, quels que soient x, z, β , sauf pour $\beta = \alpha$. En effet, le terme de rang $(n + 1)$ a pour expression asymptotique $\frac{x}{\beta^n} e^{\frac{z - \beta}{\beta}}$, terme général d'une série absolument convergente.

On peut réduire la fonction F à ne contenir que deux variables, et prendre pour type $F(x, z, -1)$, que j'appellerai $G(x, z)$:

$$(21) \quad G(x, z) = \frac{1}{z} - \frac{x}{z - 1} + \dots - \frac{x(x - n + 1)}{(z - n + 1)^2} + \dots$$

et l'on aura

$$F(x, z, \beta) = -\frac{1}{z} G\left(x, \frac{z}{\beta} - \frac{\beta}{z}\right).$$

La nouvelle transcendante $G(x, z)$ est définie par l'équation (21) comme une fonction uniforme de x et de z , dans toute l'étendue du plan. Elle est synectique par rapport à x , et fractionnaire par rapport à z : elle a les mêmes pôles que la fonction $\Gamma(z)$.

15. Bien que la fonction $G(x, z)$ ne coïncide en aucune façon avec $\frac{1}{z - x}$, elle a cependant deux propriétés qui rappellent son

originé. On obtient la première de ces propriétés en différenciant, par rapport à x et par rapport à z , les deux membres de (21)

$$\begin{aligned}\frac{\partial G(x, z)}{\partial x} &= \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{2(x+1)}{(z+2)^3} + \dots + \frac{n(x+1)(x+n)^{n-2}}{(z+n)^{n+1}} + \dots, \\ \frac{\partial G(x, z)}{\partial z} &= -\frac{1}{z^2} - \frac{2x}{(z+1)^3} - \dots - \frac{nx(x+n-1)^{n-2}}{(z+n-1)^{n+1}} - \dots,\end{aligned}$$

d'où l'on conclut

$$(22) \quad \frac{\partial G(x, z)}{\partial x} = -\frac{\partial G(x+1, z+1)}{\partial z},$$

propriété qui correspond à celle-ci

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{z-x} \right) = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{z-x} \right).$$

Je parlerai plus loin de la seconde propriété; mais je veux m'arrêter un instant à la première, en observant que $\frac{\partial G(x, z)}{\partial z}$ n'est autre que la série que l'on obtiendrait, en appliquant la série d'Abel, pour $\beta = -1$, à la fonction $\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{z-x} \right)$. De même, en différenciant G plusieurs fois par rapport à z , on a le même résultat que si l'on différencie $\frac{1}{z-x}$ et qu'on appliquât ensuite la série d'Abel. Par conséquent, *si l'on forme la série d'Abel avec une fraction rationnelle quelconque* [$E(x)$ représente la partie entière]

$$\begin{aligned}\varphi(x) = E(x) &+ \frac{A}{z-x} + \frac{A_1}{(z-x)^2} + \frac{A_2}{(z-x)^3} - \dots \\ &+ \frac{A'}{z'-x} + \frac{A'_1}{(z'-x)^2} + \frac{A'_2}{(z'-x)^3} - \dots \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

on obtient une série convergente, qui représente la fonction suivante :

$$\begin{aligned}E(x) + AF(x, z, \beta) &- A_1 \frac{\partial}{\partial z} F(x, z, \beta) + \frac{A_2}{1.2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} F(x, z, \beta) - \dots \\ &+ A'F(x, z', \beta) - A'_1 \frac{\partial}{\partial z'} F(x, z', \beta) + \frac{A'_2}{1.2} \frac{\partial^2}{\partial z'^2} F(x, z', \beta) - \dots \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

On peut donner une autre forme à cette fonction, en rem-

plaçant les dérivées par rapport à z par les dérivées par rapport à x , en vertu de (23), et écrire

$$\begin{aligned} E(x) + AF(x, z, \beta) &= A_1 \frac{\partial}{\partial x} F(x - \beta, z - \beta, \beta) \\ &+ \frac{A_2}{1.2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x - 2\beta, z - 2\beta, \beta) - \dots \\ &+ A' F(x, z', \beta) - A'_1 \frac{\partial}{\partial x} F(x - \beta, z' - \beta, \beta) \\ &+ \frac{A'_2}{1.2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x - 2\beta, z' - 2\beta, \beta) - \dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

On peut aussi intégrer la fonction G par rapport à l'une ou l'autre des variables x, z , et les deux opérations donnent lieu à une propriété analogue à (22). Le développement qu'on obtient en intégrant par rapport à z la fonction $F(x, z, \beta)$ est celui qui résulterait de la série d'Abel appliquée à la fonction $\log(z - x)$. Il converge, comme on voit, dans tous les cas, sauf pour $\beta = 0$, et ne représente pas la fonction. Cet exemple est particulièrement intéressant en ce que le Mémoire d'Abel contient effectivement la série correspondante comme représentant le logarithme, ce qui est une erreur manifeste.

A ce propos, on ne doit pas perdre de vue que le Mémoire d'Abel, dont il s'agit ici, n'a pas été publié par lui-même; bien qu'il offre un très haut intérêt, on doit assurément le classer, suivant l'expression employée par les savants auteurs de la 2^e édition, au nombre des « travaux de jeunesse, datant d'une époque où la » critique d'Abel n'était pas encore complètement développée. » Quand Abel, ajoutent MM. Sylow et Lie, parle plus tard des » faux résultats auxquels conduit un raisonnement peu rigoureux, » il pense, entre autres, aux erreurs auxquelles il avait été porté » lui-même dans ses anciens travaux, depuis longtemps rejetés » par lui (1). » Il serait bien injuste, comme on voit, d'accuser Abel d'une erreur qu'il avait peut-être reconnue, et qu'en tous les cas il n'avait pas livrée au public.

16. La seconde propriété de la fonction $G(x, z)$ que je désire

(1) *Œuvres complètes d'Abel*, 2^e édition. Préface, p. III.

signaler se rapporte au développement de cette fonction suivant les puissances de z , à exposants positifs et négatifs.

Si l'on suppose que le module de z soit compris entre n et $n + 1$, les $(n + 1)$ premiers termes de (21) sont développables suivant les puissances décroissantes de z , tandis que tous les suivants sont développables suivant les puissances croissantes de z . On a ainsi deux parties, l'une $\Phi(z)$, provenant des termes à partir du $(n + 2)^{\text{ième}}$, et procédant suivant les puissances à exposants positifs, l'autre procédant suivant les puissances à exposants négatifs. La propriété dont je parle consiste en ce que cette seconde partie coïncide, jusqu'aux termes de degré $(n + 1)$ inclusivement, avec le développement de $\frac{1}{z-x}$, en sorte qu'on a

$$G(x, z) = \Phi(z) + \frac{1}{z-x} + \frac{1}{z^{n+1}} \Psi\left(\frac{1}{z}\right),$$

$\Phi(z)$ étant un développement suivant les puissances entières, ascendantes et positives de z , $\Psi(z)$ un développement suivant les puissances entières, ascendantes et positives de $\frac{1}{z}$; et cette formule est valable quand le module de z est compris entre n et $(n + 1)$.

A cette propriété s'en rattache une autre que l'on pourrait chercher à établir directement, pour donner une base différente à la démonstration des propositions II et III; mais c'est là une recherche que je ne veux pas entreprendre pour le moment.

Soit $f(z)$ une fonction synectique dans tout le plan, et considérons l'intégrale $\frac{1}{2i\pi} \int f(z) F(x, z, \beta) dz$, prise le long d'un contour infiniment grand. D'après (21), cette intégrale n'est autre que

$$f(x) + \frac{x}{1} f'(\beta) + \frac{x(x-2\beta)}{1.2} f''(\beta) \dots + \frac{x(x-n\beta)^{n-1}}{1.2\dots n} f^{(n)}(\beta) \dots$$

Par conséquent :

Si $f(x)$ est développable suivant la série d'Abel relative à la constante β , l'intégrale $\frac{1}{2i\pi} \int f(z) F(x, z, \beta) dz$, prise le long d'un contour infiniment grand, est égale à $f(x)$.

20. Je vais donner, en terminant, une autre propriété de la fonction $G(x, z)$, qui la rapproche, à un autre point de vue, de la fonction $\Gamma(z)$.

Je reprends le développement, établi au n° 12, pour la fonction $e^{\lambda x}$, par la série d'Abel, et, supposant $\beta = -1$, j'observe que les conditions (18) sont satisfaites quand λ est réel et compris entre zéro et l'unité. Je peux donc employer ce développement dans l'intégrale suivante, et écrire

$$(23) \quad \int_0^1 e^{\lambda x - \lambda z} d\lambda = \int_0^1 e^{-\lambda z} d\lambda \dots + \frac{x(x+n)^{n-1}}{1.2\dots n} \int_0^1 \lambda^n e^{-\lambda(z+x)} d\lambda \dots$$

Considérons maintenant l'équation

$$(24) \quad \mu e^{-x} = \lambda e^{-z},$$

où λ sera censé donné, et μ sera l'inconnue. Si l'on fait varier λ par des valeurs réelles depuis 1 jusqu'à $+\infty$, l'équation a une autre racine réelle μ , qui varie depuis 1 jusqu'à zéro. Mettons cette racine μ , fonction réelle de λ , dans l'intégrale ci-après, et observons que $e^{\mu x}$ est encore développable comme tout à l'heure $e^{\lambda x}$; nous

aurons ainsi

$$\int_1^\infty e^{\mu x - \lambda z} d\lambda = \int_1^\infty e^{-\lambda z} d\lambda \dots - \frac{x(x+n)^{n-1}}{1.2\dots n} \int_1^\infty \lambda^n e^{-\mu x} e^{-\lambda z} d\lambda \dots$$

Ce que, d'après (24), nous pourrons écrire encore sous cette autre forme

$$(25) \quad \int_1^\infty e^{\mu x - \lambda z} d\lambda = \int_1^\infty e^{-\lambda z} d\lambda \dots - \frac{x(x+n)^{n-1}}{1.2\dots n} \int_1^\infty \lambda^n e^{-\lambda(z+x)} d\lambda \dots$$

Ajoutant membre à membre les équations (23) et (25), j'ai maintenant

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{\mu x - \lambda z} d\lambda - \int_0^1 e^{\lambda x - \lambda z} d\lambda &= \int_0^1 e^{-\lambda z} d\lambda \dots \\ &\quad - \frac{x(x+n)^{n-1}}{1.2\dots n} \int_0^1 \lambda^n e^{-\lambda(z+x)} d\lambda \dots \\ &= \frac{1}{z} \dots - \frac{x(x+n)^{n-1}}{(1-z)(x+n)} \dots = G(x, z) \end{aligned}$$

Mettant enfin pour l'intégrale (23) sa valeur explicite, j'ai

$$(26) \quad \Phi(x, z) = \int_1^{\infty} e^{\psi(\lambda) - \lambda z} d\lambda = \frac{1 - e^{x-z}}{x - z} + G(x, z).$$

Telle est la formule que je voulais obtenir. La fonction $G(x, z)$ est exprimée au moyen de l'intégrale définie $\Phi(x, z)$, dans laquelle $\psi(\lambda)$ est la racine réelle, différente de λ , que possède l'équation (24). Cette expression est valable quand la partie réelle de z est positive.

On remarquera que la fonction $\Phi(x, z)$ vérifie, tout aussi bien que $G(x, z)$, l'équation aux différences mêlées (22).

Sur un théorème de Gauss; par M. PEROTT.

(Séance du 7 avril 1882.)

L'illustre Gauss a démontré, dans son Mémoire intitulé : *Summatio quarundam serierum singularium*, que, dans le cas où m et μ sont des nombres entiers et $m > \mu$, l'expression

$$\frac{(1 - x^m)(1 - x^{m-1}) \dots (1 - x^{m-\mu+1})}{(1 - x)(1 - x^2) \dots (1 - x^\mu)}$$

est une fonction entière de x . Nous nous proposons de donner une nouvelle démonstration de ce théorème.

On sait que, d étant un diviseur de n , et f_d le produit des facteurs linéaires de $x^n - 1$ qui correspondent aux racines primitives de $x^d - 1 = 0$, on a toujours l'identité

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} f_d,$$

où le produit s'étend à tous les diviseurs de n .

On aura par conséquent

$$\begin{aligned}
 & \frac{(1-x^m)(1-x^{m-1}) \dots (1-x^{m-\mu+1})}{(1-x)(1-x^2) \dots (1-x^\mu)} \\
 &= \frac{(1-x^m)(1-x^{m-1}) \dots (1-x)}{(1-x)(1-x^2) \dots (1-x^\mu)(1-x)(1-x^2) \dots (1-x^{m-\mu})} \\
 &= \frac{\prod_{(1)} f_d \prod_{(2)} f_d \dots \prod_{(m)} f_d}{\prod_{(1)} f_d \prod_{(2)} f_d \dots \prod_{(\mu)} f_d \prod_{(1)} f_d \prod_{(2)} f_d \dots \prod_{(m-\mu)} f_d} \\
 &= \prod_{d=1}^{d=m} f_d E\left(\frac{m}{d}\right) - E\left(\frac{\mu}{d}\right) - E\left(\frac{m-\mu}{d}\right).
 \end{aligned}$$

L'expression

$$E\left(\frac{m}{d}\right) - E\left(\frac{\mu}{d}\right) - E\left(\frac{m-\mu}{d}\right)$$

ne peut jamais devenir négative et par conséquent la proposition énoncée se trouve démontrée.

Sur l'évaluation de certaines intégrales pseudo-elliptiques;
par M. S. GÜNTHER.

(Séance du 3 mars 1882.)

Personne n'ignore que certains problèmes d'intégration indéfinie paraissent absolument insolubles, tandis qu'après examen rigoureux l'intégration peut pourtant être effectuée. Nous citerons, par exemple, certaines intégrales transcendentes connues, pour l'évaluation desquelles on n'avait, d'après Hermite ⁽¹⁾, d'autre procédé que la différentiation directe, jusqu'à ce que Stern ⁽²⁾ et A. Winckler ⁽³⁾ aient fait voir qu'on pouvait les traiter par des

⁽¹⁾ HERMITE, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, t. I, p. 260. Paris, 1873.

⁽²⁾ STERN, *Ueber den Werth einiger Integrale* (*Journal de Crelle*, t. 78, p. 310).

⁽³⁾ A. WINCKLER, *Unbestimmte Integration einer Gattung transcendenter Func-*

méthodes simples. Les exemples n'en manquent pas non plus dans la théorie des intégrales elliptiques; on sait que toute intégrale de la forme

$$\int f[x, R(x)] dx,$$

où f désigne n'importe quelle fonction algébrique, et $R(x)$ la racine carrée d'une expression cubique ou biquadratique, passe pour irréductible en termes finis, c'est-à-dire pour s'exprimer seulement par les trois formes canoniques de Legendre. Cependant, suivant la nature particulière de la fonction f , l'intégration en forme finie peut quelquefois s'effectuer; et en effet Legendre a soumis, dans son célèbre Ouvrage ⁽¹⁾, cette possibilité à une discussion approfondie. Clausen ⁽²⁾ a traité plus tard une des intégrales examinées par Legendre. Enfin, de nos jours, un essai de Malet ⁽³⁾ a dirigé de nouveau l'attention sur ces intégrales *pseudo-elliptiques*, pour les appeler par ce nom. Il étudiait le cas spécial, où $R(x) = 0$ représente une équation réciproque du quatrième degré, et il fit voir que l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{\left(x \pm \frac{1}{x}\right) dx}{\sqrt{ax^4 \mp bx^3 + cx^2 \mp bx + a}}$$

peut être évaluée immédiatement.

Parmi les intégrales pseudo-elliptiques connues aujourd'hui, une des plus intéressantes est la suivante :

$$\int \frac{x dx}{(x^2 + 8)\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Legendre et Clausen s'en sont occupés; et ce dernier analyste,

tionen (Sitzungsberichte d. math.-phys. Classe der Oesterr. Acad., t. LXX. Vienne, 1874).

⁽¹⁾ LEGENDRE, *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes*, t. I, p. 136. Paris, 1827.

⁽²⁾ CLAUSEN, *Ueber ein Integral in Legendre's Traité des fonctions elliptiques* (Astronom. Nachrichten, n° 442; Archiv der Mathem. und Physik, III^e Partie, p. 335).

⁽³⁾ MALET, *Two theorems in integration* [Annali di Matematica pura ed applicata, t. VI, (2), p. 252].

si réputé pour son habileté à transformer les expressions algébriques, a fait usage d'un procédé dont on ne peut s'empêcher d'admirer l'extrême élégance, quoiqu'on ne saisisse pas bien pourquoi il a choisi justement cette voie. C'est ce point que nous avons entrepris d'éclaircir, et nous croyons avoir atteint notre but. Envisageant la méthode de Clausen, nous sommes parvenus à la conception d'un criterium au moyen duquel on peut décider en certains cas si une intégrale elliptique proposée possède effectivement ce caractère, ou bien si elle n'en a que les apparences.

Opérant sur la fraction

$$\frac{x}{x^3 + 8},$$

et posant

$$\frac{6x}{x^3 + 8} = \frac{\alpha x^2}{x^3 + 8} + \frac{\alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1}{x^2 - 2x + 4} + \frac{\alpha_2 x^2 + \beta_2 x + \gamma_2}{x + 2},$$

l'identification donne les valeurs

$$\alpha = \frac{3}{2}, \quad \alpha_1 = -\frac{1}{2}, \quad \beta_1 = 1, \quad \gamma_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_2 = \frac{1}{2}, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{2},$$

et l'on obtient par là

$$\frac{6x}{x^3 + 8} = \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{x^3 + 8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - 2x + 4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x - 1}{x + 2}.$$

En désignant par B_1, B_2, B_3 ces trois fractions, abstraction faite de leurs coefficients constants, nous aurons

$$\begin{aligned} S &\equiv \int \frac{6x dx}{(x^3 + 8)\sqrt{x^3 - 1}} \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{B_1}{\sqrt{x^3 - 1}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{B_2}{\sqrt{x^3 - 1}} dx + \frac{1}{2} \int \frac{B_3}{\sqrt{x^3 - 1}} dx + \text{const.} \end{aligned}$$

Il existe un théorème général qui s'applique à ces trois intégrales et que l'on pourrait nommer le théorème *des coefficients indéfinis*. En voici l'énoncé :

Lorsque l'on cherche si l'intégrale

$$S \equiv \int \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \frac{dx}{\sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}}.$$

dans laquelle $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ représentent deux fonctions algébriques entières, respectivement d'ordre P et N , est une intégrale elliptique ou si elle peut s'effectuer sous forme finie, on posera

$$y = \frac{\alpha x^{N-P+2} + \beta x^{N-P+1} + \dots + \mu x + r}{\sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}},$$

et l'on formera l'expression

$$\frac{dy}{my^2 + n}.$$

En posant ensuite

$$\frac{dy}{my^2 + n} = \frac{\zeta \varphi(x) dx}{\psi(x) \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}},$$

ζ désignant un facteur arbitraire constant, on obtiendra par l'identification des coefficients de $x^0, x^1, x^2, \dots$ un système d'équations. La simultanéité de ces équations est une condition suffisante pour que l'intégrale S appartienne aux intégrales pseudo-elliptiques.

On obtient, en effet, en posant

$$\sqrt{\frac{m}{n}} = p, \quad py = z,$$

$$S = \frac{1}{\zeta} \int \frac{dy}{my^2 + n} = \frac{1}{\zeta n} \int \frac{dy}{1 + p^2 y^2} = \frac{1}{\zeta np} \int \frac{dz}{1 + z^2},$$

ou enfin

$$S = \frac{1}{\zeta np} \arctang z = \frac{1}{\zeta \sqrt{mn}} \arctang \left[\sqrt{\frac{m}{n}} \frac{\alpha x^{N-P+2} + \dots + r}{\sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}} \right],$$

où il faudrait encore ajouter la constante arbitraire.

On voit immédiatement qu'une des nouvelles inconnues $\alpha, \beta, \dots, \mu, r, m, n$ reste toujours arbitraire et que notre problème se réduit à exprimer par elle toutes les autres.

Appliquons maintenant notre règle générale à chacune des trois intégrales de Clausen. Considérant d'abord la plus simple,

$$S_1 = \int \frac{B^3 dx}{2 \sqrt{x^3 - 1}},$$

nous écrivons d'après notre méthode

$$y = \frac{2x^2 + \beta x + \gamma}{\sqrt{x^3 - 1}}, \quad dy = \frac{(x^3 - 1)(4x + 2\beta) - 3x^2(2x^2 + \beta x + \gamma)}{2(x^3 - 1)\sqrt{x^3 - 1}},$$

et

$$\begin{aligned} \frac{dy}{my^2 + n} &= \frac{2x^4 - \beta x^3 - 3\gamma x^2 - 4\alpha x - 2\beta}{2[mx^2x^4 + (2m\alpha\beta + n)x^3 + (m\beta^2 + 2m\alpha\gamma)x^2 + 2m\beta\gamma x + (m\gamma^2 - n)]} \\ &= \frac{1}{2} \frac{x - 1}{x + 2}. \end{aligned}$$

D'où l'on tire ces six équations :

$$\begin{aligned} \text{I.} & \quad x = mx^2, \\ \text{II.} & \quad -\beta + 2x = 2m\alpha\beta + n - m\alpha^2, \\ \text{III.} & \quad -3\gamma - 2\beta = m\beta^2 + 2m\alpha\gamma - 2m\alpha\beta - n, \\ \text{IV.} & \quad -4x - 6\gamma = 2m\beta\gamma - m\beta^2 - 2m\alpha\gamma, \\ \text{V.} & \quad -2\beta - 8x = m\gamma^2 - n - 2m\beta\gamma, \\ \text{VI.} & \quad -4\beta = -m\gamma^2 + n. \end{aligned}$$

En éliminant $n = m\gamma^2 - 4\beta$ des équations II et III, nous obtenons ce nouveau système :

$$\begin{aligned} \text{I.} & \quad mx = 1, \\ \text{II}^a. & \quad 3x + \beta = m\gamma^2, \\ \text{III}^a. & \quad -4\beta - 5\gamma = m\beta^2 - m\gamma^2, \\ \text{IV}^a. & \quad -4x - 4\gamma = 2m\beta\gamma - m\beta^2. \end{aligned}$$

En éliminant ensuite $m = \frac{1}{x}$ nous obtenons trois équations homogènes pour α, β, γ

$$\begin{aligned} \text{II}^b. & \quad 3x^2 + x\beta = \gamma^2, \\ \text{III}^b. & \quad -4x\beta - 5x\gamma = \beta^2 - \gamma^2, \\ \text{IV}^b. & \quad -4x^2 - 4x\gamma = 2\beta\gamma - \beta^2. \end{aligned}$$

Enfin l'élimination de l'inconnue x nous donne les deux équations

$$\begin{aligned} \text{II}^c. & \quad \beta^4 + 5\beta^3\gamma + 18\beta^2\gamma^2 + 35\beta\gamma^3 + 22\gamma^4 = 0, \\ \text{IV}^c. & \quad 4\beta^3 + 27\beta^2\gamma + 54\beta\gamma^2 + 32\gamma^3 = 0. \end{aligned}$$

Il faut donc résoudre l'équation cubique

$$4\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^3 + 27\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2 + 54\left(\frac{\beta}{\gamma}\right) + 32 = 0,$$

qui nous donne la valeur réelle $\frac{\beta}{\gamma} = -2$, $\beta = -2\gamma$. Or, en substituant cette valeur dans l'équation II^b, nous aurons $\alpha = \gamma$ et, à cause de l'équation I, $m = \frac{1}{\gamma}$. Enfin nous tirons de l'équation VI la valeur $n = \frac{1}{\gamma} \cdot \gamma^2 + 4 \cdot 2\gamma = 9\gamma$. Jusqu'à présent, nous n'avons pas eu égard à l'équation V, mais si l'on y substitue les valeurs obtenues pour α, β, m, n , on voit qu'elle est identiquement satisfaite.

On reconnaît aussi sans difficulté que γ disparaît des calculs. Nous obtiendrons de cette manière

$$\gamma = \frac{x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x^3 - 1}}, \quad \frac{d\gamma}{m\gamma^2 + n} = \frac{d\gamma}{\gamma^2 + 9},$$

et

$$\frac{1}{2} \int \frac{x-1}{x+2} \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}} = \int \frac{d\gamma}{\gamma^2+9} = \frac{1}{9} \int \frac{d\gamma}{1 + \left(\frac{\gamma}{3}\right)^2} = \frac{1}{3} \text{arc tang } \frac{\gamma}{3},$$

ou

$$S_1 = \frac{1}{3} \text{arc tang } \frac{(x-1)^2}{3\sqrt{x^3-1}} + \text{const.}$$

Par là se trouve aussi résolue une question proposée dernièrement par Realis (1); la deuxième intégrale

$$\int \frac{x+1}{x-2} \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}$$

dont il propose la recherche se ramène sans difficulté à la précédente, et probablement aussi la troisième, qui se présente sous la forme plus compliquée

$$\int \frac{x^2 - x + 4}{x^2 - x + 2} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + Ax^2 - 3x - 2}}$$

peut être soumise à une méthode analogue d'évaluation.

(1) REALIS, Question proposée n° 102 (*Mathesis*, t. II, p. 48).

Arrivons maintenant à l'intégrale

$$S_2 = \int \frac{B_2 dx}{2\sqrt{x^3-1}}.$$

Les deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ possèdent aussi dans ce cas le même degré; le nombre $(N-P)$ est nul et nous avons comme équation fondamentale la suivante :

$$\frac{2x^4 - \beta x^3 - 3\gamma x^2 - 4\alpha x - 2\beta}{2[m\alpha^2 x^4 + (2m\alpha\beta + n)x^3 + (m\beta^2 + 2m\alpha\gamma)x^2 + 2m\beta\gamma x + (m\gamma^2 - n)]} \\ = \frac{1}{2} \frac{-x^2 + 2x + 2}{x^2 - 2x + 4}.$$

La multiplication élevant chaque membre de cette équation au sixième degré, on obtient sept équations pour le calcul des grandeurs $\alpha, \beta, \gamma, m, n$; ce sont les suivantes :

- I. $\alpha = -m\alpha^2,$
- II. $-2\alpha - \beta = -2m\alpha\beta - n + 2m\alpha^2,$
- III. $-3\gamma + 2\beta + 4\alpha = -m\beta^2 - 2m\alpha\gamma + 4m\alpha\beta + 2n + 2m\alpha^2,$
- IV. $-4\alpha + 6\gamma - 4\beta = -2m\beta\gamma + 2m\beta^2 + 4m\alpha\gamma + 4m\alpha\beta + 2n,$
- V. $-2\beta + 8\alpha - 12\gamma = -m\gamma^2 + n + 4m\beta\gamma + 2m\beta^2 + 4m\alpha\gamma,$
- VI. $-16\alpha + 4\beta = 2m\gamma^2 - 2n + 4m\beta\gamma,$
- VII. $-8\beta = 2m\gamma^2 - 2n.$

On réduit avec avantage toutes ces inconnues à la grandeur n et l'on trouve d'une manière semblable à celle que nous avons exposée plus haut

$$\alpha = 0, \quad \beta = n, \quad \gamma = -n, \quad m = -\frac{3}{n}, \quad n = n,$$

et alors par la différentiation directe $n = \zeta = 1$. Ainsi on obtient

$$y = \frac{x-1}{\sqrt{x^3-1}}, \quad \frac{dy}{my^2+n} = \frac{dy}{-3y^2+1}$$

et, pour $z = \pm\sqrt{3} \cdot \gamma i$,

$$-\frac{1}{2} \int \frac{x^2-2x-2}{x^2-2x+4} \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}} = \int \frac{dy}{-3y^2+1} = \frac{1}{\sqrt{-3}} \int \frac{dz}{1+z^2} \\ = \frac{1}{\sqrt{-3}} \text{arc tang } z,$$

ou

$$S_2 = -\frac{i}{\sqrt{3}} \operatorname{arc tang} \left[\sqrt{3} i \frac{x-1}{\sqrt{x^3-1}} \right] + \text{const.}$$

On sait que toute fonction trigonométrique inverse de cette forme peut être transformée en un logarithme réel, ce qui donne pour S_2 la valeur

$$S_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \log \frac{1+y\sqrt{3}}{1-y\sqrt{3}} + \text{const.}$$

et après la substitution de x

$$S_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \log \frac{\sqrt{x^3+x+1} + \sqrt{3(x-1)}}{\sqrt{x^3+x+1} - \sqrt{3(x-1)}} + \text{const.}$$

La troisième intégrale de Clausen appartient évidemment à une autre catégorie, parce que la fonction $\psi(x)$ y surpasse la fonction $\varphi(x)$ à l'égard de son degré. Il faut dans notre théorème poser $N-P=1$. Si l'on pose

$$y = \frac{\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}{\sqrt{x^3-1}},$$

$$dy = \frac{3\alpha x^2 + \beta x - \gamma x^3 - (6\alpha + 3\delta)x^2 - 4\beta x - 2\gamma}{2(x^3-1)\sqrt{x^3-1}} dx,$$

et si l'on forme alors l'expression

$$\frac{dy}{my^2+n},$$

on obtient l'équation

$$\frac{3\alpha x^5 + \beta x^4 - \gamma x^3 - (6\alpha + 3\delta)x^2 - 4\beta x - 2\gamma}{2(m\alpha^2 x^6 + 2m\alpha\beta x^5 + (m\beta^2 + 2m\alpha\gamma)x^4 + (2m\alpha\delta + 2m\beta\gamma + n)x^3 + (m\gamma^2 + 2m\beta\delta)x^2 + 2m\gamma\delta x + (m\delta^2 - n))}$$

$$= \frac{3}{2} \frac{x^2}{x^3 + 8}.$$

L'identification donne alors les neuf équations

- I. $3\alpha = 3m\alpha^2,$
- II. $\beta = 6m\alpha\beta,$
- III. $-\gamma = 3m\beta^2 + 6m\alpha\gamma,$
- IV. $-6\alpha + 24\alpha - 3\delta = 6m\alpha\delta + 6m\beta\gamma + 3n,$

$$\text{V.} \quad -4\beta + 8\beta = 3m\gamma^2 + 6m\beta\delta,$$

$$\text{VI.} \quad -2\gamma - 8\gamma = 6m\gamma\delta,$$

$$\text{VII.} \quad -48x - 24\delta = 3m\delta^2 - 3n,$$

$$\text{VIII.} \quad -32\beta\gamma = 0,$$

$$\text{IX.} \quad -16\gamma = 0.$$

La résolution de ce système s'exécute avec beaucoup moins de difficulté que celle des deux systèmes antérieurs. La valeur $\gamma = 0$ découle immédiatement de l'équation IX, et l'équation III donne alors $\beta = 0$. En ajoutant les deux équations IV et VII on obtient

$$-30x - 27\delta = 6m\alpha\delta + 3m\delta^2,$$

$$-10x - 9\delta = 2m\alpha\delta + m\delta^2,$$

ou, à cause de l'équation I $\left(m = \frac{1}{\alpha}\right)$,

$$-10x - 9\delta = 2\delta + \frac{\delta^2}{\alpha},$$

$$\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^2 + 11\left(\frac{\delta}{\alpha}\right) = -10.$$

Cette équation possède les deux racines réelles $\frac{\delta}{\alpha} = -10$ et $\frac{\delta}{\alpha} = -1$, mais on gagne facilement la persuasion que la première ne satisfait pas au système entier et qu'il faut pour cela choisir la seconde. En substituant $\delta = -\alpha$ dans l'une des équations IV ou VII on calcule $n = 9\alpha$, et la série de nos valeurs est alors la suivante :

$$\alpha = \alpha, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = -\alpha, \quad m = \frac{1}{\alpha}, \quad n = 9\alpha.$$

Quant à la grandeur α , la différentiation nous apprend qu'il faut prendre $\alpha = \zeta = 1$. Or, on est parvenu au résultat

$$\frac{3}{2} \int \frac{x^2 dx}{(x^3 + 8)\sqrt{x^3 - 1}} = \int \frac{dy}{y^2 + 9} = \frac{1}{3} \arctan \frac{y}{3}$$

ou

$$S_3 = \frac{1}{3} \arctan \frac{x^3 - 1}{3\sqrt{x^3 - 1}} + \text{const.} = \frac{1}{3} \arctan \frac{\sqrt{x^3 - 1}}{3} + \text{const.}$$

Si l'on résume tous les résultats précédents, on peut écrire

$$\int \frac{x dx}{(x^3 + 8)\sqrt{x^3 - 1}} = \frac{1}{6} \left[\frac{1}{3} \arctan \frac{\sqrt{x^3 - 1}}{3} + \frac{1}{3} \arctan \frac{(x-1)^2}{3\sqrt{x^3 - 1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \log \frac{\sqrt{x^3 + x + 1} + \sqrt{3(x-1)}}{\sqrt{x^3 + x + 1} - \sqrt{3(x-1)}} + \text{const.} \right]$$

ou, par l'application de la formule connue

$$\arctan u + \arctan v = \arctan \frac{u+v}{1-uv}$$

$$\int \frac{x dx}{(x^3 + 8)\sqrt{x^3 - 1}} = \frac{1}{18} \arctan \frac{3x(x-1)}{(1-x)\sqrt{x^3 - 1}} + \frac{1}{12\sqrt{3}} \log \frac{\sqrt{x^3 + x + 1} + \sqrt{3(x-1)}}{\sqrt{x^3 + x + 1} - \sqrt{3(x-1)}} + \text{const.}$$

C'est la formule donnée par Clausen. Nous espérons que le lecteur sera d'accord avec nous dans l'opinion que le chemin dont la poursuite nous a conduit à ce résultat a été réellement celui du mathématicien allemand. Notre théorème n'éclaircit pas seulement un calcul qui semble mystérieux au premier abord, mais il peut aussi, dans beaucoup de cas, servir de critérium pour reconnaître si une intégrale elliptique donnée peut s'effectuer en termes finis.

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

SÉANCE DU 4 NOVEMBRE 1881.

PRÉSIDENCE DE M. LAGUERRE.

M. Saltel adresse une Note intitulée *Méthode pour lever, dans divers systèmes d'équations, l'indétermination résultant de l'égalité entre certaines inconnues.*

Communication :

M. Laguerre : *Sur quelques propriétés des coniques.*

SÉANCE DU 18 NOVEMBRE 1881.

PRÉSIDENTE DE M. DE POLIGNAC.

Élections : MM. Boncompagni (le prince Balthasar), Floquet, Imber, Price (Bartholoméo), présentés dans la dernière séance par MM. Fouret et Picquet, sont élus membres de la Société.

Communications :

M. Jordan : *Sur la différentiation sous le signe f .*

M. Humbert : *Sur les courbes de Clebsch dont les coordonnées s'expriment en fonction elliptique d'un paramètre.*

M. Stephanos : *Sur les courbes de la quatrième classe.*

M. de Polignac : *Sur une propriété des coniques.*

SÉANCE DU 2 DÉCEMBRE 1881.

PRÉSIDENTE DE M. LAGUERRE.

Communications :

M. André : *Sur l'intégration des équations différentielles linéaires qui ont une équation dérivée régulière.*

M. Laguerre : *Sur la séparation des racines.*

M. de Polignac : *Sur une propriété des systèmes en involution.*

M. Weill : *Sur un théorème d'Arithmétique.*

SÉANCE DU 16 DÉCEMBRE 1881.

PRÉSIDENTE DE M. LAGUERRE.

Communication :

M. Halphen : *Sur une série d'Abel.*

SÉANCE DU 6 JANVIER 1882.

PRÉSIDENCE DE M. LAGUERRE.

Le Bureau et le Conseil sont renouvelés, comme l'indique l'état qui est au commencement du Volume.

M. Lindemann adresse un Mémoire manuscrit intitulé : *Sur les courbes d'un système linéaire trois fois infini qui touchent une courbe algébrique donnée par un contact du troisième ordre.*

Communications :

M. Weill : *Théorème sur les factorielles.*

M. André : *Observations sur le théorème de M. Weill, et conséquences relatives aux nombres premiers.*

M. Laisant : *Sur certaines propriétés des centres de gravité.*

M. Stephanos : *Sur la détermination du huitième point commun aux surfaces du second degré passant par sept points donnés.*

SÉANCE DU 20 JANVIER 1882.

PRÉSIDENCE DE M. HALPHEN.

Élections : MM. Asselin et Laveissière, présentés dans la dernière séance par MM. Humbert et de Polignac, sont élus membres de la Société.

M. Perrin, au nom de la Commission des comptes, donne lecture de son Rapport sur la gestion du Trésorier en 1881. Sur sa proposition, la Société vote des remerciements à M. Claude Lafontaine et une gratification à ses agents.

Communications :

M. André : *Théorèmes sur les factorielles.*

M. Halphen : *Sur les aspects des paysages.*

M. Weill : *Sur les lunules exactement carrables par la règle et le compas.*

SÉANCE DU 3 FÉVRIER 1882.

PRÉSIDENCE DE M. HALPHEN.

Élections : MM. Brault, Escary, Gunther, Zeuthen, présentés dans la dernière séance par MM. Halphen et Picquet, sont élus membres de la Société.

M. Malmstén, présenté dans la dernière séance par MM. Hermite et Laguerre, est élu membre de la Société.

Communications :

M. Laisant : *Remarques sur la théorie des régions et des aspects.*

M. Weill : *Sur un triangle en nombres entiers dans lequel le rapport des deux angles est un nombre entier.*

SÉANCE DU 17 FÉVRIER 1882.

PRÉSIDENCE DE M. HALPHEN.

Élections : MM. Goursat et Schlegel, présentés dans la dernière séance par MM. Halphen et Picquet, sont élus membres de la Société.

Communications :

M. Fouret : *Sur les courbes anallagmatiques admettant un lieu géométrique de pôles principaux d'inversion.*

M. Laguerre : *Sur deux systèmes de neuf points, se correspondant un à un, et donnant lieu chacun à douze triangles semblables.*

M. Perrin : *Sur le problème des aspects et des régions.*

M. Weill : *Sur une propriété de la courbe $\alpha^3\beta = \gamma^4$.*

M. Fouret : *Sur une propriété de la courbe $\alpha\beta^2 = \gamma^3$.*

SÉANCE DU 3 MARS 1882.

PRÉSIDENTE DE M. HALPHEN.

M. Appell adresse un Mémoire manuscrit intitulé : *Sur des cas de réduction des fonctions Θ de plusieurs variables à des fonctions Θ d'un moindre nombre de variables.*

M. Gunther envoie une Note manuscrite *Sur l'évaluation de certaines intégrales pseudo-elliptiques.*

Communications :

M. Jordan : *Sur les formules complémentaires des lois de réciprocité.*

M. Perrin : *Sur le problème des aspects et des régions.*

SÉANCE DU 17 MARS 1882.

PRÉSIDENTE DE M. HALPHEN.

Élection : M. Gascheau, présenté dans la dernière séance par MM. Halphen et Picquet, est élu membre de la Société.

Communications :

M. Stephanos : *Sur une application de la théorie des carrelages.*

M. Halphen : *Sur une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels.*

M. Halphen : *Sur le problème des aspects, et ses rapports avec le Calcul intégral.*

M. Weill : *Sur les courbes admettant des polygones à la fois inscrits et circonscrits.*

SÉANCE DU 7 AVRIL 1882.

PRÉSIDENTE DE M. HALPHEN.

Élections : MM. Kostenec, Panek et Pokorny, présentés dans la dernière séance par MM. Weyr (Édouard) et Picquet, M. Drey-

fus (Ferdinand), présenté par MM. Laisant et de Reinach, M. Lévy (Lucien), présenté par MM. Halphen et Picquet, M. Paturet, présenté par MM. Lucas et Laisant, et M. Tarry, présenté par MM. Brocard et Laquière, sont élus membres de la Société.

M. le Président donne lecture d'une Lettre de M. Brioschi par laquelle il déclare que ce n'est que par suite d'une erreur qu'il a pu être considéré comme démissionnaire.

M. Perott adresse une Note manuscrite *Sur un théorème de Gauss*.

M. Tarry adresse une Note manuscrite *Sur quelques propriétés des coniques*.

L'Institut vénitien des Sciences, Lettres et Arts, demande l'échange de ses publications avec le *Bulletin* de la Société.

Communications :

M. Perrin : *Sur le problème des aspects*.

M. Stephanos : *Sur la rotation des corps solides autour d'un point*.

M. Weill : *Sur le centre des moyennes distances*.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE (1).

OUVRAGES ET MÉMOIRES REÇUS DEPUIS LE 4 NOVEMBRE 1881.

Ovidio (d') : *Sur quelques invariants de deux formes binaires*.

Kronecker : *Sur le potentiel. Sur la théorie de l'élimination. Sur les fonctions symétriques*.

Euclide : Ancien exemplaire, offert par M. L. Hugo.

Chelini (Dominique) : *Mémoires mathématiques*, publiés par les soins de MM. Cremona et Beltrami.

Laisant : *Sur les séries récurrentes*. (Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*.)

(1) Ce Bulletin ne comprend pas les périodiques que la Société reçoit en échange de ses publications (voir page 10).

Laisant : *Sur le Calcul des opérations chimiques.* (Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.*)

Liguine : *Sur les courbes anallagmatiques.* (Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.*)

Euclide : Édition de Guido Grandi, ayant appartenu à Chasles, offert par M. L. Hugo.

Abel : *Œuvres complètes*, publiées par MM. L. Sylow et S. Lie; Grondahl et Son, Christiania, 1881.

Le Paige : *Sur les formes trilinéaires. Sur les involutions d'ordre supérieur.*

Picquet : *Traité de Géométrie analytique* (1^{re} Partie). Masson, Paris; 1882.

Sibiriakoff : *Preuve élémentaire de la proposition fondamentale de la théorie des parallèles.*

Aoust (l'abbé) : *Considérations sur les études géométriques et cinématiques de M. Habich.*

Catalan : *Sur quelques décompositions en carrés.* Rome; 1882.

Leoncio de la Barcena : *Tratado di Taquimetria.* Madrid; 1882.

Schubert : *Lösung des auf die trilineare Verwandtschaft ausgedehnten Projectivitätsproblems.* Hambourg; 1882.

Schubert : *Elementarer Beweis des Feuerbach'schen Satzes.* Hambourg; 1882.

Lacon : *Περὶ τῶν ἀρχῶν τῆς Γεωμετρίας.* Athènes; 1881.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Sur le problème des aspects; par M. PERRIN.

(Séances du 17 février et du 3 mars 1882.)

1. Le problème des divers aspects sous lesquels on peut voir un système de n points distribués sur un plan, lorsqu'on circule sur ce plan à volonté, a fait l'objet, dans les séances précédentes de la Société mathématique, de deux intéressantes Communications :

l'une de M. Halphen, qui a formulé l'énoncé précis du problème, l'a traité dans les cas les plus simples, et a montré comment il se rattache à l'étude des discontinuités de certaines intégrales définies; l'autre de M. Laisant, qui a donné l'expression, en fonction de n , d'une limite supérieure du nombre R des régions d'aspect constant, c'est-à-dire déterminées par la condition que l'observateur circulant à volonté dans l'une de ces régions ne cesse pas de voir le système des n points sous le même aspect (dans le même ordre circulaire), mais que l'aspect change dès qu'il passe dans l'une des régions contiguës.

A l'aide de l'expression donnée par lui, M. Laisant a fait ressortir avec quelle rapidité décroît, quand on fait croître n au delà de 5, le rapport du nombre des aspects possibles au nombre $(n-1)!$ des aspects imaginables. Mais le nombre lui-même R des régions d'aspect constant paraissait difficile à déterminer, car il ne dépend pas seulement du nombre n des points du système, mais aussi de la manière dont ces points sont distribués les uns par rapport aux autres, comme on le voit immédiatement en faisant la figure pour $n=4$; il était donc indispensable d'introduire quelque nouvel élément qui permit de tenir compte de cette distribution relative des points. Je vais exposer les résultats auxquels je suis parvenu dans cet ordre d'idées, en généralisant un peu le problème, résultats qui pourront sans doute être utilisés aussi dans d'autres questions.

2. Soient données à volonté dans le plan n points, que j'appellerai les *sommets* du système ¹. Si on les joint par des droites de toutes les manières possibles, on obtiendra m droites

$$\left[m = \frac{n(n-1)}{2} \right],$$

dont chacune se trouvera divisée par les deux sommets qu'elle joint en trois segments, savoir un intérieur compris entre les deux sommets et deux extérieurs. Si les m droites étaient tracées d'une manière quelconque, elles se couperaient en $\frac{n(n-1)}{2}$ points:

¹ Je fais abstraction des cas particuliers où plusieurs sommets ou tous les sommets seraient disposés en ligne droite.

chaque sommet remplace évidemment $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ de ces points d'intersection : il en reste donc

$$(1) \quad \Delta = \frac{1}{1} [m(m-1) - n(n-1)(n-2)].$$

J'appellerai *nœuds* ces Δ point d'intersection des m droites, autres que les segments. Si l'on remplace m par sa valeur $\frac{n(n-1)}{2}$, il vient

$$(2) \quad \Delta = \frac{1}{2} n(n-1)(n-2)(n-3).$$

Les nœuds peuvent se classer en trois espèces, suivant qu'ils résultent du croisement de deux segments extérieurs, de deux segments intérieurs, ou d'un segment extérieur avec un intérieur; je les distinguerai donc en nœuds *extérieurs*, *intérieurs* et *mixtes*, et si δ , δ' , δ'' sont respectivement les nombres de nœuds appartenant à ces trois espèces, on aura

$$(3) \quad \delta + \delta' + \delta'' = \Delta.$$

D'autre part, le nombre ρ_0 des régions déterminées par les m droites est, comme l'a établi M. Laisant,

$$(4) \quad \rho_0 = \frac{1}{2} [m(m+1) + 2 - n(n-2)(n-3)].$$

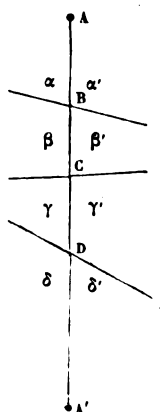
3. Il resterait maintenant, pour obtenir l'ensemble des régions d'aspect constant et en calculer le nombre, à effacer tous les segments *intérieurs* et à rechercher quelle réduction amène cette opération dans le nombre de régions ρ_0 donné par la formule (4). Si, au lieu d'effacer tous les segments *intérieurs*, on effaçait tous les segments *extérieurs*, on obtiendrait une configuration en quelque sorte complémentaire de la précédente, et qui, ainsi que l'a montré M. Halphen, se présente concurremment avec elle dans l'étude des discontinuités des intégrales définies auxquelles il a été fait allusion ci-dessus, selon la manière dont on choisit le point de départ des intégrations. Si, enfin, on effaçait un certain nombre de segments tant intérieurs qu'extérieurs, choisis suivant une loi quelconque, on obtiendrait encore une configuration toute différente. Je vais supposer qu'on opère ainsi suivant une loi arbitraire,

et chercher comment varie le nombre des régions lorsque l'on vient à effacer un segment quelconque, à un instant quelconque de l'opération.

A cet instant, on peut se représenter les n sommets, avec les segments non encore effacés qui les relient plus ou moins complètement entre eux, comme formant une configuration analogue à celles que présentent les cartes célestes : quelques sommets peuvent apparaître complètement isolés ; d'autres, réunis entre eux par des segments intérieurs, mais privés de tous les segments extérieurs qui les réunissaient primitivement à la droite de l'infini (ou plutôt au cercle de rayon infiniment grand que l'on peut se représenter comme limitant le plan), formeront une ou plusieurs constellations isolées dans le plan ⁽¹⁾ ; les autres, enfin, seront restés rattachés par des segments extérieurs, soit directement soit par l'intermédiaire de sommets ou de nœuds voisins, au cercle de l'infini ; tous ces derniers, reliés ainsi entre eux par l'intermédiaire du cercle de l'infini, devront être considérés comme ne formant qu'un seul groupe, résidu de la configuration primitive.

Ceci posé, soit à effacer un segment de plus, tel que AA' (*fig. 1*).

Fig. 1.



Deux cas peuvent se présenter : ou la suppression de ce segment

⁽¹⁾ Rien ne s'oppose à ce que ces constellations soient intérieures les unes aux autres.

ne changera rien au nombre des constellations isolées, ou il l'augmentera d'une ou plusieurs unités. Dans le premier cas (le plus fréquent et même le seul qui puisse se présenter au début de l'opération), il est visible que le segment servait de séparation entre autant de couples de régions distinctes $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$, qu'il contenait de nœuds B, C, D n'ayant pas encore disparu par l'effacement antérieur d'autres segments, plus un; pour chacun de ces couples, les deux régions séparées par le segment se confondent lorsqu'on vient à l'effacer : la réduction produite dans le nombre des régions est donc précisément égale au nombre des nœuds qui disparaissent, plus un. Dans le second cas, considérons l'un des groupes de sommets qui devient isolé quand on efface le segment AA'; ce groupe peut comprendre l'un des deux sommets extrêmes, A par exemple, avec quelques-uns des segments qui croisent AA', ou comprendre seulement quelques-uns de ces segments. Supposons qu'il comprenne le sommet A et le segment qui passe par le nœud B : dès lors les deux régions β et β' se rejoignent déjà en faisant le tour de ce groupe, et la réduction produite dans le nombre des régions par la suppression de AA' sera moindre d'une unité que si $\beta\beta'$ avaient été deux régions distinctes. Supposons, au contraire, que le groupe considéré ne comprenne ni l'un ni l'autre des sommets AA', et que les nœuds B, D soient les deux nœuds extrêmes dépendant de ce groupe sur le segment AA'. Dès lors il est clair que les régions α et δ se rejoignent déjà en contournant le groupe et ne forment qu'une seule région, et de même pour α' et δ' ; la suppression de AA' réunira donc seulement deux régions $\alpha\delta$ et $\alpha'\delta'$ en une seule, au lieu de réunir quatre régions α , α' , δ , δ' en deux $\alpha\alpha'$, $\delta\delta'$. La réduction dans le nombre des régions sera donc encore moindre d'une unité que s'il ne s'était pas formé un nouveau groupe isolé. Réciproquement, on verrait sans peine que cette réduction, moindre dans le nombre des régions, ne peut se présenter que s'il se forme de nouveaux groupes isolés, la différence étant précisément égale au nombre de ces groupes.

Donc, en définitive, si à un instant quelconque on se trouve avoir effacé s' segments, ce qui a fait disparaître d' nœuds, et isolé g sommets ou groupes de sommets, le nombre des régions est devenu

$$\rho = \rho_0 - s' - d' + g.$$

Introduisons dans cette expression, au lieu des nombres s' et d' de segments et de nœuds disparus, les nombres s et d de segments et de nœuds qui subsistent, au moyen des relations

$$s = 3m - s', \quad d = \Delta - d';$$

remplaçons, enfin, ρ_0 , Δ et m par leurs valeurs en fonction de n ; il viendra finalement

$$(5) \quad \rho = 1 + s + d + g - n.$$

Il est remarquable que cette formule soit beaucoup plus générale que celles dont nous l'avons déduite : elle s'applique, en effet, à toutes les configurations que l'on peut obtenir en joignant arbitrairement par s lignes, droites ou courbes, n points pris à volonté sur un plan, sur une sphère ou plus généralement sur toute surface simplement connexe. Pour s'en assurer, il suffit de remarquer :

1° Que toute surface simplement connexe pouvant être ramenée à une aire plane à un seul contour, par voie de déformation continue sans déchirure (après avoir au besoin pratiqué une ouverture infiniment petite), la configuration qui y a été tracée sera ainsi ramenée à une configuration plane, sans variation dans le nombre des sommets, des nœuds, des segments, ni des groupes isolés;

2° Que dans une configuration plane, formée de segments courbes, il suffit de considérer comme nouveaux sommets un nombre suffisant de points convenablement choisis sur ces segments, pour pouvoir rectifier les segments plus petits ainsi obtenus, sans introduire de nouveaux nœuds; or tout sommet qu'on introduit ainsi sur un segment augmente d'une unité à la fois s et n , et laisse, par suite, invariable $s - n$, en sorte que la formule (5) ne cesse pas d'être applicable.

Il serait d'ailleurs facile de généraliser encore la formule (5) et d'établir le théorème suivant :

Si k est l'ordre de connexion, défini comme on le fait d'ordinaire dans la théorie des surfaces de Riemann, et que l'on appelle indice de connexion la quantité $2 - k$, s'il s'agit d'une aire ou d'une surface ayant au moins un contour, ou la quantité $3 - k$ s'il s'agit d'une surface fermée : la somme Σi des

indices de connexion des régions déterminées sur une surface ou sur une aire d'indice I en joignant entre eux ou à des points quelconques des contours, au moyen de s segments tracés d'une manière quelconque, n points pris arbitrairement, sera, en appelant d le nombre des points de croisement de ces segments,

$$(6) \quad \Sigma i = I + s + d - n.$$

De cette formule on pourrait déduire plusieurs conséquences intéressantes; je me bornerai à indiquer la relation suivante, entre le nombre F des faces d'un polyèdre (supposées toutes des aires simplement connexes), le nombre S de ses sommets et le nombre A de ses arêtes :

$$(7) \quad F + S = A + I;$$

I est l'indice de connexion de l'ensemble de la surface du polyèdre, c'est-à-dire deux pour les polyèdres ordinaires (sphéroïdaux), zéro pour les polyèdres assimilables au tore ou anneaux polyédriques, etc. Si quelques-unes des faces ne sont pas simplement connexes, on devra prendre pour F la somme des indices de connexion des faces.

En faisant $I = 2$, et exprimant que toutes les faces ont le même nombre p de côtés, et qu'à tous les sommets aboutissent le même nombre q d'arêtes, on obtient la relation

$$f + \frac{pf}{q} = \frac{pf}{2} + 2,$$

ou

$$(8) \quad f = \frac{4q}{2(p+q) - pq},$$

qui caractérise les polyèdres réguliers et permet d'en déterminer le nombre et la nature.

5. Je reviens au problème des aspects. Pour obtenir la configuration qui détermine les régions d'aspect constant, il faut effacer tous les segments intérieurs, ce qui fait disparaître les nœuds intérieurs et mixtes, et ne donne naissance à aucun groupe isolé. Faisant donc dans la formule (5) $s = 2m = n(n-1)$, $d = \delta$,

$g = 0$, nous obtenons pour le nombre R des régions d'aspect constant,

$$(9) \quad R = (n-1)^2 + \delta.$$

Les nœuds extérieurs, dont le nombre δ figure dans l'expression (9), peuvent être définis très simplement, au point de vue du problème des aspects, comme étant les points du plan, en nombre limité, pour lesquels le nombre *apparent* des sommets du système est de $n-2$, tandis que, pour un point pris au hasard, le nombre apparent est de n , et qu'il se réduit à $n-1$ pour une infinité simple de points, savoir tous les points des segments extérieurs.

Cherchons maintenant le nombre R' des régions dans le problème complémentaire, celui où l'on ne laisse subsister que les segments intérieurs et par suite aussi que les nœuds intérieurs. Il faudra faire dans la formule (5) $s = \frac{n(n-1)}{2}$, $d = \delta'$ et $g = 1$, puisque l'ensemble des sommets forme alors un groupe unique isolé du cercle de l'infini. Il vient, par suite

$$(10) \quad R' = \frac{n^2 - 3n + 4}{2} + \delta'.$$

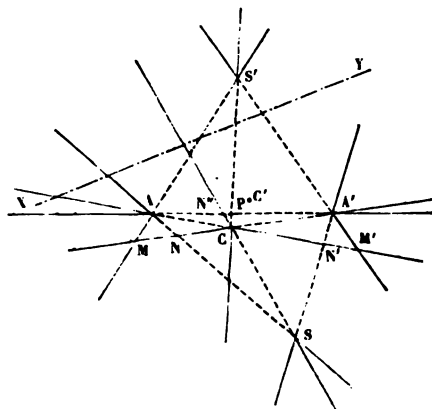
6. La question qui se présente immédiatement est celle-ci : Comment et entre quelles limites varient δ et δ' , lorsqu'on fait varier de toutes les manières possibles la disposition relative des n sommets?

Pour y répondre, remarquons tout d'abord que, le nombre total des nœuds $\delta + \delta' + \delta''$ étant invariable pour une valeur donnée de n , le seul effet d'un changement dans la disposition relative des sommets est de modifier l'espèce des nœuds; et, si ce changement s'opère par déplacement relatif *continu* des sommets, chaque modification ne pourra être que le changement d'un nœud, soit extérieur, soit intérieur, en un nœud mixte, ou inversement : et pour qu'un tel changement se produise, il est évidemment nécessaire et suffisant que dans son mouvement relatif un des sommets vienne à traverser quelque part la droite qui en joint deux autres.

Considérons donc un sommet mobile C au moment où il est sur le point de traverser la droite joignant les deux sommets fixes A , A' (*fig. 2*), et supposons qu'il la traverse entre A et A' .

Soit S un des sommets situés du même côté de AA' que le sommet C dans sa position actuelle, S' un des sommets situés du côté opposé. A l'inspection de la figure, sur laquelle les segments extérieurs ont été tracés en plein et les segments intérieurs en pointillé, il est visible que les trois droites mobiles CA , CA' , CS , donnent par leur croisement avec les trois droites fixes AA' , AS , $A'S$ trois nœuds mixtes N , N' et N'' ; tandis que, pour le sommet S' , le système mobile correspondant CA , CA' , CS' donne par croisement avec le système fixe AA' , AS' , $A'S'$ deux nœuds extérieurs

Fig. 2.



MM' , et un nœud intérieur P . Lorsque le sommet mobile aura franchi AA' et sera venu en C' , par exemple, il est clair que S et S' n'auront fait que changer de rôle. Si donc il y avait p sommets tels que S , c'est-à-dire situés du côté de AA' où se trouvait d'abord le sommet mobile, et $p' = n - p - 3$ sommets S' du côté opposé, le nombre des nœuds intérieurs aura augmenté de $p - p'$, celui des nœuds extérieurs de $2(p - p')$, et celui des nœuds mixtes de $-3(p - p')$, par le fait du passage de C d'un côté à l'autre du segment intérieur AA' . Si le passage s'était fait par un des segments extérieurs de la même droite, on verrait sans peine que les variations seraient les mêmes en valeur absolue, mais changées de signe.

7. A l'aide de ce qui précède, on pourra trouver par quelques

constructions faciles les valeurs de δ , δ' , δ'' qui correspondent à une disposition donnée quelconque des n sommets, pourvu que l'on connaisse les valeurs δ_0 , δ'_0 , δ''_0 de ces quantités pour une seule disposition particulière bien déterminée, car il suffira de déplacer successivement un certain nombre de sommets convenablement choisis, de manière à transformer la figure donnée en celle pour laquelle on connaît les valeurs des δ ; et de compter, chaque fois que dans ce déplacement un sommet vient à traverser la droite qui en joint deux autres, combien il reste de sommets de chaque côté de cette droite; de faire la somme des quantités $p - p'$ ainsi trouvées, en les affectant d'un signe convenable, et les valeurs cherchées seront évidemment

$$(11) \quad \begin{cases} \delta = \delta_0 - 2 \Sigma (p - p'), \\ \delta' = \delta'_0 - \Sigma (p - p'), \\ \delta'' = \delta''_0 + 3 \Sigma (p - p'). \end{cases}$$

Or, parmi toutes les dispositions que l'on peut imaginer pour les n sommets, il y en a une qui se prête immédiatement à la détermination directe des δ : c'est celle dans laquelle les n sommets forment les sommets d'un polygone convexe. Il est évident que dans ce cas $\delta'' = 0$ (et réciproquement, si $\delta'' = 0$, les n sommets forment nécessairement un polygone convexe). Pour déterminer δ (nombre des nœuds extérieurs), supposons que les sommets soient numérotés 1, 2, ..., n à partir de l'un d'eux en faisant le tour du polygone; la droite joignant les sommet 1 et p contiendra un nœud extérieur au croisement de chacune des $\frac{(p-2)(p-3)}{2}$ droites qui joignent deux à deux les $p-2$ sommets 2, 3, ..., $p-1$, et de chacune des $\frac{(n-p)(n-p-1)}{2}$ droites qui joignent deux à deux les $n-p$ sommets numérotés $p+1$, $p+2$, ..., n ; et elle n'en contiendra pas d'autre. Le nombre des nœuds extérieurs situés sur la droite (1, p) sera donc

$$\frac{1}{2} [(p-2)(p-3) + (n-p)(n-p-1)],$$

et pour toutes les droites, en nombre $(n-1)$, qui passent par le sommet 1, on aura un nombre total de nœuds extérieurs, ex-

primé par

$$\frac{1}{2} \sum_{p=2}^{p=n} [(p-2)(p-3) + (n-p)(n-p-1)].$$

Chacun des n sommets en fournit autant; mais, comme chaque droite passe par deux sommets, et que chaque nœud appartient à deux droites, il faudra diviser le résultat par 4, et l'on aura, en définitive,

$$\delta_0 = \frac{n}{8} \sum_{p=2}^{p=n} [(p-2)(p-3) + (n-p)(n-p-1)],$$

d'où, par un calcul facile,

$$\delta_0 = \frac{1}{12} n(n-1)(n-2)(n-3),$$

et, par suite,

$$\delta_0 = \frac{2}{3} \Delta.$$

Il en résulte immédiatement

$$(12) \quad \delta'_0 = \frac{1}{3} \Delta.$$

Dès lors, posant $\Sigma(p-p') = \epsilon$, les relations (11) deviennent

$$(13) \quad \begin{cases} \delta = 2\left(\frac{\Delta}{3} - \epsilon\right), \\ \delta' = \frac{\Delta}{3} - \epsilon = \frac{\delta}{2}, \\ \delta'' = 3\epsilon. \end{cases}$$

Portant ces valeurs dans les relations (9) et (10), et exprimant Δ en fonction de n , il vient enfin

$$(14) \quad R = \frac{1}{12} (n-1)(n^3 - 5n^2 + 18n - 12) - 2\epsilon,$$

$$(15) \quad R' = \frac{1}{24} (n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 42n + 48) - \epsilon,$$

d'où l'on tire la relation

$$(16) \quad R - 2R' = n - 3.$$

8. Ces divers résultats peuvent se résumer dans l'énoncé suivant :

« Soient n points ou sommets pris à volonté sur un plan; si on les joint deux à deux par des droites, dont chacune est ainsi divisée en trois segments, ces droites se couperont en

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$$

» autres points ou *nœuds*. Soit ε un certain entier positif, caractéristique de la disposition relative des n sommets, et qui ne s'annule que si ces n sommets forment un polygone convexe.

» Soient δ , δ' , δ'' les nombres respectifs des nœuds *extérieurs* (provenant du croisement de deux segments extérieurs), *intérieurs* (croisements de deux segments intérieurs), et *mixtes* (croisements d'un segment extérieur avec un intérieur) : le nombre δ des nœuds extérieurs est toujours double du nombre δ' des nœuds intérieurs, quelle que soit la disposition relative des sommets, et le nombre δ'' des nœuds mixtes est toujours un multiple de 3 ($\delta'' = 3\varepsilon$).

» Soit R le nombre des régions entre lesquelles le plan se trouve divisé quand on efface tous les segments intérieurs, ce qui ne laisse subsister que les δ nœuds extérieurs; soit de même R' le nombre des régions quand on efface tous les segments extérieurs, ce qui ne laisse subsister que les δ' nœuds intérieurs; R et R' dépendent respectivement de n et δ , de n et δ' par les relations très simples (9) et (10), et sont, par conséquent, des fonctions de n et ε , données par les formules (14) et (15), et qui prennent leurs valeurs maxima pour $\varepsilon = 0$, c'est-à-dire quand les n sommets forment un polygone convexe; mais $R - 2R'$ reste constamment égal à $n - 3$, quelle que soit la disposition relative des n sommets.

» La valeur de la caractéristique ε ou $\frac{\delta''}{3}$ peut s'obtenir sans avoir besoin de tracer toutes les droites du système, en déplaçant arbitrairement les sommets de manière à les ramener à former un polygone convexe, et en comptant, chaque fois que dans ce déplacement un sommet vient à traverser la droite qui en joindrait deux autres, combien il y a de sommets, non com-

» pris celui qui se déplace, du même côté que lui par rapport à la
 » droite qu'il va franchir : si ce nombre est p , la somme des quan-
 » tités $2p - n + 3$, ainsi calculées pour chaque droite franchie,
 » et affectées du signe $+$ ou du signe $-$ suivant que le passage a
 » lieu par un segment *intérieur* ou par un segment *extérieur*.
 » donnera précisément ϵ . »

En supposant $\epsilon = 0$, on a une limite supérieure R_0 du nombre R des régions d'aspect constant, limite qui est effectivement atteinte dans le cas d'un polygone convexe, et qui est sensiblement moindre que la limite supérieure ρ qu'avait calculée M. Laisant, comme le montre le tableau ci-dessous :

n .	$\delta_n = \frac{2}{3} \Delta$.	R_0 .	ρ .
3.....	0	4	7
4.....	2	11	18
5.....	10	26	41
6.....	30	55	85
7.....	70	106	162
8.....	140	189	287
9.....	252	316	478
10.....	420	501	756
11.....	660	760	1145
12.....	990	1111	1672
13.....	1430	1574	2367
14.....	2002	2171	3263
15.....	2730	2926	4396

On trouve d'ailleurs aisément que $R_0 = \frac{2\rho - n + 1}{3}$.

9. Il resterait à rechercher quelles valeurs peut prendre en réalité ϵ pour une valeur donnée de n , quel est, en particulier, le maximum de ϵ (qui correspond au minimum de δ , δ' , R , R'), et quelles différences au point de vue géométrique présentent entre elles les diverses dispositions de n sommets qui correspondent aux diverses valeurs possibles de ϵ .

Je présenterai seulement sur ce sujet les remarques suivantes :

1° Si n est impair, ϵ ne peut prendre que des valeurs paires : cela résulte immédiatement de ce que ϵ est la somme d'un certain nombre de quantités de la forme $2p - n + 3$.

2° Les deux plus petites valeurs de ϵ , après zéro, sont $n - 3$.

$2(n-4)$ (¹). On le voit immédiatement en partant du polygone convexe à n sommets, qui donne $\varepsilon = 0$: si l'on déplace un des sommets, dans quelque direction que ce soit, la première droite du système qu'il ait à franchir augmente ε de $n-3$, et la seconde qu'il rencontre augmente ε soit de $n-3$, soit de $n-5$; la même chose a lieu si l'on déplace un second sommet au lieu de continuer à déplacer le premier.

3^o Il est facile d'assigner, en fonction de n , une limite au-dessous de laquelle δ' ne peut descendre, sans qu'il soit toutefois démontré que cette limite puisse être effectivement atteinte par une disposition convenable des n sommets. Considérons, en effet, la figure obtenue en effaçant les segments extérieurs : elle donne, d'après la formule (10), $\frac{1}{2}(n^2 - 3n + 4) + \delta'$ régions, dont chacune est un polygone possédant au moins trois côtés, et, par conséquent, trois angles. Le nombre total des angles de toutes les régions est donc au moins égal à

$$3\delta' + \frac{3}{2}(n^2 - 3n + 4).$$

Mais chaque sommet du système, formant le point de départ de $n-1$ segments intérieurs, fournit $n-1$ angles; chaque nœud en fournit évidemment 4; le nombre total des angles est donc exactement

$$n(n-1) + 4\delta'.$$

Nous pouvons donc écrire l'inégalité

$$n(n-1) + 4\delta' \geq 3\delta' + \frac{3}{2}(n^2 - 3n + 4),$$

d'où

$$(17) \quad \delta' \geq \frac{1}{2}(n-3)(n-4).$$

et, par suite,

$$(18) \quad \begin{cases} \delta \geq (n-3)(n-4), \\ R \geq 2n^2 - 9n + 13, \\ R' \geq n^2 - 5n + 8, \\ \varepsilon \leq \frac{1}{24}(n-3)(n^3 - 3n^2 - 10n + 48). \end{cases}$$

(¹) Ou $n-3$, $2(n-3)$, si $n=5$.

Les valeurs limites fournies par ces inégalités peuvent être réalisées en fait, si n est au plus égal à 6. Mais, au delà de 6, il n'en est plus de même, parce qu'il n'est plus possible de faire en sorte que toutes les régions soient de forme triangulaire.

4° Les n sommets étant disposés d'une manière quelconque, concevons qu'une droite, qui les laisse d'abord tous d'un même côté, s'en approche en restant constamment parallèle à une même direction, jusqu'à ce qu'elle vienne à passer par un sommet; qu'elle tourne alors autour de ce premier sommet jusqu'à en rencontrer un second, puis autour de ce second (toujours dans le même sens) jusqu'à en rencontrer un troisième, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'elle revienne rencontrer le premier sommet. Nous aurons ainsi construit, au moyen de p des sommets du système, un polygone convexe qui renferme tous les autres à son intérieur. Faisant abstraction de ces p sommets, opérons de même à l'égard des $n - p$ sommets qui restent : nous obtiendrons un second polygone convexe, intérieur au premier. Continuons ainsi jusqu'à ce qu'il ne reste plus que 0, 1 ou 2 sommets. La figure aura été décomposée en polygones convexes intérieurs les uns aux autres, et la valeur de ϵ dépendra du nombre et de la nature de ces polygones, et en même temps de la disposition relative de leurs côtés, comme le montre la discussion des cas les plus simples, savoir $n = 4, 5$ ou 6.

Pour $n = 4$, on peut avoir : 1° un quadrilatère convexe, $\epsilon = 0$; 2° un triangle avec un sommet à l'intérieur, $\epsilon = 1$.

Pour $n = 5$, on peut avoir : 1° un pentagone convexe, $\epsilon = 0$; 2° un quadrilatère convexe avec un sommet à l'intérieur, $\epsilon = 2$ ⁽¹⁾; 3° un triangle avec deux sommets à l'intérieur, $\epsilon = 4$.

Pour $n = 6$, on peut avoir : 1° un hexagone convexe, $\epsilon = 0$; 2° un pentagone convexe avec un sommet à l'intérieur; ϵ a pour valeur 3, 4 ou 5, suivant que ce sommet se trouve dans l'un des cinq triangles (délimités par les cinq diagonales du pentagone) qui s'appuient sur les côtés du pentagone, dans l'un des cinq autres triangles intercalés entre les précédents, ou dans la région centrale; 3° un quadrilatère convexe avec deux sommets intérieurs,

(1) C'est la disposition que réalise la fig. 2.

$\varepsilon = 6, 7$ ou 8 , suivant la position de ces deux sommets dans les quatre triangles délimités par les diagonales du quadrilatère ; 4° un triangle extérieur renfermant un second triangle, $\varepsilon = 9, 10, 11$ ou 12 , suivant l'orientation des côtés du petit triangle par rapport à ceux du grand : la valeur maxima $\varepsilon = 12$ se présente si, par exemple, les deux triangles sont semblables et semblablement placés, et la valeur $\varepsilon = 9$ s'ils sont semblables, mais inversement placés, c'est-à-dire orientés à 180° de différence.

Pour $n > 6$, on pourrait établir une classification analogue, mais la complication croîtrait naturellement avec une grande rapidité à mesure que n augmenterait. Toutefois l'analogie porte à supposer que, quel que soit n , la valeur maxima de ε doit correspondre à la répartition des sommets en triangles successifs intérieurs les uns aux autres, plus 0, 1 ou 2 sommets à l'intérieur du dernier, selon que n est de la forme $3k, 3k + 1, 3k + 2$.

10. Puisque, lorsqu'on fait croître n au delà de 5, le nombre des régions d'aspect constant, et, par conséquent, *a fortiori*, le nombre des aspects réalisables ne croît que très lentement par rapport au nombre des aspects imaginables, il est intéressant de rechercher quels sont, parmi les aspects imaginables, ceux qui sont effectivement réalisables ; comment ils se groupent d'après la disposition relative des sommets, quelle condition doit être remplie pour qu'un même aspect se reproduise dans deux ou un plus grand nombre de régions distinctes, etc. Il y a là toute une série de questions dont la solution paraît assez difficile ; voici quelques propositions et remarques qui pourront servir de point de départ à ceux qui désireraient pousser plus loin l'étude du problème des aspects.

Considérons une droite mobile, qui balaye tout le plan en restant constamment parallèle à elle-même. Lorsqu'elle se trouve à une distance assez grande du groupe des n sommets pour laisser d'un même côté non seulement tous les sommets, mais encore tous les *nœuds* extérieurs, elle traverse $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ régions. Supposons que les sommets soient numérotés de 1 à n précisément dans l'ordre où cette droite mobile les rencontrera en se déplaçant ; et supposons, pour fixer les idées, que cette droite parte de la partie su-

périeure de la figure, et que chaque aspect soit défini par l'ordre dans lequel les sommets sont vus en faisant le tour d'horizon de gauche à droite.

Alors, pour la première région que recoupe la droite mobile dans sa position initiale, région qui s'étend à l'infini dans l'angle supérieur de gauche de la figure, l'aspect est

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ \dots \ n.$$

La région immédiatement contiguë que l'on rencontre en suivant la droite mobile est séparée de la première par une des droites du système, laquelle passe nécessairement par deux sommets dont les numéros se suivent; par exemple, par 3 et 4; et la traversée de cette droite a évidemment pour effet d'intervertir dans l'aspect l'ordre des sommets 3 et 4. L'aspect, pour la deuxième région, sera donc

$$1 \ 2 \ 4 \ 3 \ 5 \ 6 \ \dots \ n.$$

Si, de même, on rencontre ensuite la droite qui joint les sommets 3 et 5, l'aspect, pour la troisième région, sera

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ \dots \ n,$$

et ainsi de suite. Comme on doit nécessairement rencontrer toutes les droites du système, et que d'ailleurs, pour la dernière région, celle qui s'étend à l'infini dans l'angle supérieur *droit* de la figure, l'aspect est évidemment

$$n(n-1) \ \dots \ 4 \ 3 \ 2 \ 1,$$

il est clair que les aspects des $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ régions recoupées par la droite mobile dans sa position initiale se déduiront de l'aspect fondamental $1 \ 2 \ \dots \ n$, en appliquant à cet arrangement, une fois et une seule, chacune des permutations obtenues en combinant deux à deux les n nombres qui y figurent. L'ordre dans lequel ces permutations se présenteront n'est pas complètement arbitraire, puisque, pour passer d'un aspect au suivant, on ne peut permuter que deux nombres contigus; mais c'est la seule condition à remplir, comme il est facile de s'en assurer, car elle équivaut à cette condition géométrique, que trois permutations entre trois nombres pris au hasard et combinés deux à deux représen-

tent bien les trois côtés d'un triangle dont les sommets soient numérotés suivant la convention adoptée.

Prenons, comme exemple, le cas de $n = 5$, avec la disposition de sommets de la *fig. 2*, et supposons la droite mobile parallèle à la direction XY. Les sommets devront être numérotés comme suit : $S' = 1$, $A = 2$, $C = 3$, $A' = 4$, $S = 5$; et, d'après les inclinaisons relatives des diverses droites du système sur la direction XY, on aura, pour les aspects des onze régions initiales, le Tableau ci-dessous :

N° 1.

1	2	3	4	5
.	.	4	3	.
.	4	2	.	.
.	.	3	2	.
.	.	.	5	2
4	1	.	.	.
.	.	5	3	.
.	5	1	.	.
.	.	3	1	.
5	4	.	.	.
.	.	.	2	1

Dans ce Tableau, tout point remplace le nombre immédiatement supérieur dans la même colonne verticale; ainsi l'aspect de la cinquième région doit être lu 1 4 3 5 2, et il ne diffère de celui de la quatrième que par la permutation 5-2, qui est mise en évidence. Comme on le voit, le Tableau comprend bien les dix permutations 1-2, 1-3, 1-4, ..., et se termine par l'aspect 5 4 3 2 1.

On peut se donner à volonté l'ordre de ces dix permutations en observant seulement la condition indiquée précédemment, et il sera possible de réaliser la figure géométrique correspondante.

11. Supposons donc qu'on se soit donné le Tableau ci-dessus. Je vais montrer qu'en le soumettant à un traitement méthodique on peut trouver, sans le secours de la figure géométrique correspondante, toutes les particularités que présente cette figure au point de vue du problème des aspects, c'est-à-dire le nombre et la position des nœuds, et écrire tous les aspects correspondant aux différentes régions. La démonstration sera donnée pour $n = 5$, mais elle est absolument générale.

Faisons marcher la droite mobile. Tant qu'elle ne rencontrera ni nœud ni sommet, les régions qu'elle recoupe resteront les mêmes. A la rencontre d'un nœud, qu'arrive-t-il? Les deux permutations qui représentent les deux droites passant par ce nœud ne feront que se transposer. Mais, pour pouvoir se transposer, il faut évidemment qu'elles se suivent sur le Tableau; de plus, deux droites qui se coupent en un nœud ne peuvent passer par un même sommet : donc deux permutations du Tableau ne peuvent se transposer que si elles n'ont pas de nombre commun, c'est-à-dire si elles occupent des colonnes verticales distinctes; par exemple, 4-1 et 5-3 remplissent les conditions voulues pour pouvoir se transposer, de même 3-1 et 5-4, de même 4-1 et 5-2, etc.

Lorsque la droite mobile arrive au sommet n° 1, il est clair que toutes les droites dont les permutations contiennent le chiffre 1 s'arrêtent à ce sommet; ces permutations doivent donc toutes disparaître du Tableau.

Mais au moment où la droite mobile est infiniment près du sommet 1, les quatre droites 1-2, 1-3, 1-4, 1-5 forment un faisceau de droites infiniment voisines; il faut donc que préalablement on ait rencontré les deux nœuds correspondant aux transpositions de 4-1 avec 5-3, et de 5-4 avec 2-1, de telle sorte que le Tableau ait pris l'aspect ci-dessous :

N° 2.

1	2	3	4	5
.	.	4	3	.
.	4	2	.	.
.	.	3	2	.
.	.	.	5	2
.	.	5	3	.
4	1	.	.	.
.	5	1	.	.
.	.	3	1	.
.	.	.	2	1
5	4	.	.	.

ce qui a introduit deux nouvelles régions, avec les aspects nouveaux 1 4 5 3 2, 4 5 3 2 1.

Les choses étant ainsi préparées, faisons franchir à la droite mobile le sommet n° 1 : elle ne recoupera plus que

$$\frac{n(n-1)}{2} + 1 = (n-1).$$

soit sept régions dont les aspects s'obtiendront en supprimant du Tableau n° 2 les permutations contenant le chiffre 1; ce qui donne le Tableau n° 3 ci-dessous :

N° 3.

1	2	3	4	5
.	.	4	3	.
.	4	2	.	.
.	.	3	2	.
.	.	.	5	2
.	.	5	3	.
.	5	4	.	.

Ici toutes les permutations contenant le chiffre 2 se trouvent contiguës; la droite mobile ne croisera donc pas de nœuds avant d'arriver au sommet 2. En franchissant ce sommet, il faudra supprimer 2-3, 2-4, 2-5, et introduire à la place 1-2, puisque le second segment extérieur de cette droite reparaît évidemment; ce qui donne le Tableau n° 4 :

N° 4.

1	2	3	4	5
.	.	4	3	.
2	1	.	.	.
.	.	.	5	3
.	.	5	4	.

Avant d'arriver au sommet n° 3, il faut grouper les permutations 3-4 et 3-5, qui devront être supprimées en franchissant ce sommet et remplacées par 1-3 et 2-3. Mais il semble qu'il y ait indétermination, puisqu'on peut faire ce groupement soit en transposant 2-1 et 4-3, soit en transposant 2-1 et 5-3. Il n'en est cependant rien, parce que nous devons arriver, en dernier résultat, à un Tableau qui reproduira le Tableau n° 1 renversé, c'est-à-dire avec les mêmes permutations, mais se présentant dans l'ordre inverse; en sorte que nous devons avoir les trois permutations 1-2, 1-3 et 2-3, dans cet ordre précisément et non dans tout autre, ce qui ne peut être obtenu qu'en faisant d'abord la transposition de 4-3 avec 1-2, et introduisant ensuite 1-3 et 2-3. Nous avons donc un nœud qui fournit l'aspect nouveau 2 1 4 3 5, puis, après avoir franchi le sommet n° 3, nous formons le Tableau n° 5 :

N° 5.

1	2	3	4	5
2	1	.	.	.
.	3	1	.	.
3	2	.	.	.
.	.	.	5	4

On verrait de même que le passage du sommet du n° 4 conduit au Tableau n° 6 :

N° 6.

1	2	3	4	5
2	1	.	.	.
.	3	1	.	.
3	2	.	.	.
.	.	4	1	.
.	4	2	.	.
4	3	.	.	.

puisque le passage du sommet n° 5 exige que l'on intercale les permutations 1-5, 2-5, 3-5, 4-5 à l'endroit marqué ci-dessus par une ligne transversale, ce qui donne le Tableau n° 7 :

N° 7.

1	2	3	4	5
2	1	.	.	.
.	3	1	.	.
.	.	.	5	4
.	.	5	1	.
.	5	3	.	.
5	2	.	.	.
.	3	2	.	.
.	.	.	4	1
.	.	4	2	.
.	4	3	.	.

et qu'enfin, pour obtenir le Tableau inverse du n° 1, il ne reste plus qu'à transposer 3-1 avec 5-4, 4-1 avec 3-2 et avec 5-2.

Nous avons donc ainsi rencontré en tout six nœuds, savoir deux avant le sommet n° 1, un entre le sommet n° 2 et le sommet n° 3, et les trois derniers après le sommet n° 5. Ces diverses circonstances se présentent, en effet, sur la *fig. 2*, si ce n'est que le nœud M' se présente entre le sommet n° 4 et le sommet n° 5 ; et, en effet, la transposition de 3-2 avec 4-1 pouvait aussi bien se

faire sur le Tableau n° 6 que sur celui n° 7, et aurait pu être reconnue comme nécessaire dès que le Tableau n° 6 était formé : à quelque moment que cette transposition soit effectuée, elle donne d'ailleurs toujours le même aspect nouveau 2 3 4 1 5 ou 5 2 3 4 1, ce qui est identique, d'après la définition de l'aspect (1).

On peut remarquer que lorsque la droite mobile a franchi p des n sommets, le nombre des régions qu'elle traverse est devenu

$$\frac{n(n-1)}{2} + 1 - [(n-1) + (n-3) + (n-5) + \dots + (n-2p+1)],$$

c'est-à-dire

$$\frac{p(p-1) + (n-p)(n-p-1)}{2} + 1,$$

et que le nombre total des régions rencontrées par elle depuis l'origine de son mouvement jusques et y compris sa position actuelle est

$$\frac{n(n-1)}{2} + 1 + [-1 + 0 + 1 + 2 + \dots + (p-2)] + \delta_p,$$

en appelant δ_p le nombre des nœuds qu'elle a successivement rencontrés, c'est-à-dire

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{p(p-3)}{2} + 1 + \delta_p,$$

ce qui donne pour le nombre total des régions du plan, en faisant $p = n$ et $\delta_p = \delta$,

$$(n-1)^2 + \delta,$$

comme nous l'avons trouvé par une autre méthode.

11. « Une droite quelconque rencontre au plus deux régions distinctes donnant un même aspect déterminé, et, dans ce cas, tous les sommets sont situés d'un même côté de cette droite. »

(1) L'indétermination qui se présente ici pour la transposition de 2-3 avec 1-4 signifie, au point de vue géométrique, que le nœud M' peut se trouver plus près ou plus loin de XY que le sommet S, suivant la position de C, tout le reste de la figure étant invariable.

Considérons, en effet, la droite mobile dans une de ses positions, et formons, avec la notation précédemment indiquée, le tableau des aspects pour les diverses régions qu'elle recoupe ; si deux de ces régions ont un même aspect, on devra rencontrer dans le Tableau les deux aspects

AB,
BA,

A désignant un groupe de sommets dans un certain ordre, et B les autres sommets, également dans un certain ordre. Pour passer de AB à BA, il faut nécessairement rencontrer toutes les permutations qui s'obtiennent en combinant chacun des sommets du groupe A avec chacun des sommets du groupe B, mais il faut aussi ne rencontrer *aucune* des permutations où figurent deux sommets appartenant au même groupe. Donc tous les sommets du groupe B sont situés du même côté de la droite que *chacun* des sommets du groupe A, ce qui exige que tous ceux-ci soient d'un même côté de la droite ; et dès lors tous les sommets, tant du groupe B que du groupe A, seront situés de ce même côté.

Supposons maintenant que la droite recoupe trois régions de même aspect, on devra avoir les trois aspects

ABC,
BCA,
CAB,

ou encore ceux-ci :

ABC,
CAB,
BCA,

en désignant par A, B, C des groupes déterminés de sommets. Mais cela est impossible : car dans la première hypothèse les groupes A et B devraient permuter entre eux une première fois pour passer de ABC à BCA, puis une seconde fois pour passer de BCA à CAB, et l'on a vu que toute permutation ne peut être rencontrée qu'une fois.

La même chose aurait lieu, dans la seconde hypothèse, pour les groupes B et C ; et elle aurait lieu *a fortiori*, si l'on supposait plus de trois régions de même aspect.

12. Quelque grand que soit n , on peut toujours faire en sorte que deux régions distinctes donnent un même aspect. Cela est presque évident à l'aspect du Tableau initial donné précédemment, car on peut disposer de l'ordre des permutations de manière à ne permuter tout d'abord qu'un sommet ou groupe de p sommets avec tous les autres; par exemple, écrire

1	2	3	4	5	6
.	.	.	.	6	5
.	.	.	6	4	.
.	.	6	3	.	.
.	6	2	.	.	.
6	1	.	.	.	.

et l'on voit que, pour $n = 6$, la sixième région donne le même aspect que la première. Mais on peut obtenir un résultat analogue pour deux régions aboutissant à deux sommets consécutifs du polygone convexe qui enveloppe tous les sommets du système. Soient 1 et 2 les numéros de ces sommets, et numérotions les autres dans l'ordre où ils se présentent, vus du sommet 1, quand on fait un demi-tour d'horizon, de gauche à droite à partir du sommet 2. L'aspect, pour un observateur placé au sommet 1, sera

$$2 \ 3 \ 4 \ \dots \ n,$$

et, pour chacune des n régions immédiatement contiguës au sommet 1, l'aspect s'obtiendra évidemment en intercalant le chiffre 1 successivement à chacune des n places possibles dans l'arrangement ci-dessus.

Soit demandé de reproduire l'un de ces aspects, par exemple

$$2 \ 3 \ 4 \ 1 \ 5 \ 6 \ \dots \ n,$$

dans l'une des régions immédiatement contiguës au sommet n° 2. Il suffira de faire en sorte que, de ce sommet n° 2 lui-même, l'aspect soit

$$5 \ 6 \ \dots \ n \ 3 \ 4 \ 1,$$

ce qui est toujours possible si l'on est maître de distribuer les n sommets à volonté, puisqu'il suffit de mener à partir du sommet n° 2 un faisceau de $n - 2$ droites et de prendre pour sommets,

dans l'ordre convenable, leurs intersections avec le faisceau émané du sommet 1.

Cela fait, il y aura une des régions contiguës au sommet 2 pour laquelle ce sommet viendra s'intercaler dans l'aspect 5 6 ... n 3 4 1, entre n et 3, et cette région sera celle qui répond à la question.

Sur des polygones dont les côtés sont tangents à une courbe, et dont tous les sommets sont sur la courbe; par M. WEILL.

(Séance du 5 mai 1882.)

Considérons une courbe unicursale, et soit t la valeur du paramètre correspondant à un point A de la courbe; nous désignerons, dans tout ce qui va suivre, un point de la courbe par le paramètre correspondant. Menons au point A la tangente qui rencontre la courbe, supposée de degré m , en $(m-2)$ points $T_1, T_2, \dots, T_{m-2}$.

Soit $f(T, t) = 0$ l'équation qui donne les valeurs T , et admettons que cette équation soit homogène en T et t . Menons en T_1 la tangente à la courbe, et soit θ l'un des points où elle rencontre la courbe, on aura $f(\theta, T_1) = 0$. Posons

$$\frac{T}{t} = z, \quad \frac{\theta}{T_1} = u.$$

Les $(m-2)$ valeurs de u seront respectivement égales aux $(m-2)$ valeurs de z ; on aura donc

$$\frac{\theta}{T_1} = \frac{T_1}{t},$$

ou bien

$$\frac{\theta}{T_1} = \frac{T_2}{t}.$$

La première solution donne pour θ une valeur $\frac{T_1^2}{t}$ qui se distingue des autres et que nous laisserons de côté pour le moment. La deuxième solution donne $\theta = \frac{T_1 T_2}{t}$ et montre que le point θ est à la rencontre des tangentes en T_1 et T_2 ; donc les tangentes en tous

les points $T_1, T_2, \dots, T_{m-2}$ forment un polygone dont *tous les sommets* sont sur la courbe.

On voit de plus que ces points B sont représentés par les produits deux à deux de toutes les valeurs T, chaque produit étant divisé par t .

Ceci posé, la tangente en T_1 rencontre la courbe en $(m-2)$ points qui sont

$$\frac{T_1^2}{t}, \frac{T_1 T_2}{t}, \frac{T_1 T_3}{t}, \dots, \frac{T_1 T_{m-2}}{t}.$$

En ne considérant que les $(m-3)$ derniers points, menons en ces points les tangentes; elles se couperont mutuellement sur la courbe en des points C

$$\frac{T_1 T_2 T_3}{t^2}, \frac{T_1 T_2 T_4}{t^2}, \dots$$

Mais si l'on opère de même sur les tangentes en $T_2 T_3 \dots$, on aura sur la courbe un système de points C, chacun desquels sera le point de concours de *trois tangentes*, et tous ces points seront représentés par les produits trois à trois des quantités T, chaque produit étant divisé par t^2 . De même les tangentes en tous les points C se coupent quatre par quatre sur la courbe, et ainsi de suite; enfin on arrive à $(m-2)$ tangentes se coupant en un même point de la courbe, et ce point a pour paramètre $\frac{T_1 T_2 \dots T_{m-2}}{t^{m-2}}$, c'est-à-dire λt , λ étant une constante.

Inversement, si d'un point pris sur la courbe on mène les tangentes, au nombre de $(m-2)$, les droites qui joignent les points de contact deux à deux sont tangentes à la courbe en des points qui sont distribués trois par trois sur des droites; ces nouvelles droites touchent la courbe en des points qui sont distribués quatre par quatre sur des droites, et ainsi de suite; on arrive enfin à $(m-2)$ points situés sur une même tangente à la courbe. Prenons, par exemple, une courbe du sixième degré jouissant des propriétés énoncées: si d'un point de la courbe on lui mène les quatre tangentes, les six droites, obtenues en joignant deux à deux les points de contact, touchent la courbe en six points, qui sont les sommets d'un quadrilatère complet dont les côtés touchent la

courbe en quatre points, et ces quatre points sont sur une même tangente à la courbe.

Revenons au cas général. La tangente en T_1 rencontre la courbe en un point qui se distingue des autres et qui est $\frac{T_1^2}{t}$; soit β ce point. Chaque tangente en $T_1, T_2 \dots T_{m-2}$ fournira un point β . En l'un des points B menons la tangente; elle rencontrera la courbe en $(m - 4)$ points C et en deux points que nous désignerons par γ et γ' , et qui seront, par exemple,

$$\frac{T_1 T_2^2}{t^2}, \quad \frac{T_2 T_1^2}{t^2}.$$

En général, si nous prenons sur la courbe un point où viennent converger P des tangentes que nous considérons, la tangente en ce point rencontrera la courbe en P points, ne faisant pas partie du système des points dont il est question, et qui, par conséquent, se distinguent de autres points de rencontre de cette tangente avec la courbe; ces points sont représentés par des valeurs du paramètre de la forme

$$\frac{T_1 T_2 T_3 \dots T_{P-1} T_P^2}{t^P},$$

plus simplement, on peut dire que ces P points s'obtiennent en multipliant la valeur θ du point où viennent converger P tangentes successivement par $\frac{T_1}{t}, \frac{T_2}{t}, \dots; T_1, T_2, \dots$ étant les facteurs du numérateur de θ .

En particulier, le point final, où viennent converger $(m - 2)$ tangentes, a pour paramètre

$$\frac{T_1 T_2 \dots T_{m-2}}{t^{m-2}},$$

ou λt ; donc la tangente en ce point rencontre la courbe en $(m - 2)$ points qui ont pour paramètres $\lambda T_1, \lambda T_2, \dots, \lambda T_{m-2}$, ce qui montre une correspondance bien simple entre le point initial et le point final; ce résultat peut se prévoir, car l'équation en z montre que, si t se change en λt , $T_1, T_2, \dots$ se changeront en $\lambda T_1, \lambda T_2, \dots$.

Des développements qui précèdent résulte le théorème suivant :

THÉORÈME. — Si l'on mène en un point t d'une courbe unicursale la tangente qui rencontre la courbe en des points T , et que l'équation qui donne T en fonction de t soit homogène en T et t , les tangentes aux points T se coupent deux à deux en des points B de la courbe; les tangentes aux points B se coupent trois à trois en des points C de la courbe, et ainsi de suite. Si, d'un point de la courbe qui jouit des propriétés indiquées, on mène les tangentes, leurs points de contact sont deux à deux sur des droites tangentes à la courbe; les points de contact de ces nouvelles droites sont trois à trois sur des tangentes à la courbe, et ainsi de suite.

Une classe de courbes jouissant des propriétés énoncées est formée par toutes les courbes ayant une équation de la forme

$$\alpha^m - \beta^p \gamma^{m-p} = 0,$$

α, β, γ désignant trois fonctions linéaires. Par une transformation homographique, on ramène cette équation à la forme simple

$$x = tp, \quad y = t^m.$$

L'équation en T et t est ici

$$T^m - m t^{m-p} T^p + (m-p) t^m = 0.$$

On peut toujours supposer m pair, si m et p sont de parité différente, et l'on a alors

$$T_1 T_2 \dots T_{m-2} = (m-p) t^{m-2};$$

donc la constante désignée tout à l'heure par λ est ici égale à $(m-p)$. Par conséquent, si $(m-p)$ est égal à l'unité, le point final se confond avec le point initial. Dans ce cas particulier, la figure de géométrie formée par toutes les tangentes considérées, d'ailleurs imaginaires, est remarquable, en ce que, si l'on part de la tangente en un point de la courbe, ou des tangentes partant de ce point, on arrive, dans les deux cas, aux mêmes points et aux mêmes droites.

Considérons maintenant une courbe gauche ayant pour équations

$$x = t^p, \quad y = t^q, \quad z = t^r.$$

Il est facile de voir que si, en un point de cette courbe, on mène le plan osculateur, qui rencontre la courbe en des points T, l'équation en T et t est homogène, et, par conséquent, les propriétés énoncées plus haut s'appliquent. On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si en un point de la courbe gauche, ayant pour équations $x = tp$, $y = tq$, $z = tr$, on mène le plan osculateur, lequel rencontre la courbe en un certain nombre d'autres points, et si en ces points on mène les plans osculateurs, ils forment un polyèdre dont les arêtes rencontrent respectivement la courbe. Si, aux points où ces arêtes rencontrent la courbe, on mène les plans osculateurs, ils se couperont trois à trois sur la courbe, et ainsi de suite. L'équation en $\frac{T}{t}$ est ici, en posant $\frac{T}{t} = z$,*

$$(z^p - 1)qr(q - r) + (z^q - 1)rp(r - p) + (z^r - 1)pq(p - q) = 0.$$

Dans tout ce qui précède, on s'est appuyé uniquement sur ce que l'équation en T et t était homogène. Dès lors, on peut remplacer la tangente à la courbe plane considérée d'abord par toute courbe déterminée quand le point de la courbe unicursale est donné, par exemple, par le cercle osculateur en ce point; on voit aisément comment on pourrait généraliser les propriétés précédentes, qui reposent sur une propriété analytique extrêmement simple.

M. Halphen me fait remarquer que l'équation considérée peut se présenter sous forme non homogène; il suffit qu'on puisse la ramener à être homogène par une transformation rationnelle du paramètre.

Sur le théorème de M. Laisant, relatif à certaines propriétés des centres de gravité; par M. E. LAQUIÈRE.

(Séance du 5 mai 1882.)

La Note de M. Laisant, insérée au *Bulletin* (t. X, n° 2, p. 40), rappelle un article des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, où

M. Resal étend aux polygones, plans ou gauches, le théorème de Pappus sur l'immobilité du centre de gravité de masses, égales entre elles, qui décrivent les côtés d'un triangle avec des vitesses de même sens et proportionnelles aux longueurs des côtés à parcourir, après être parties en même temps des sommets respectifs.

On pourrait donner à la généralisation du théorème de M. Resal la forme, d'apparence encore plus générale, suivante :

Si des masses partent en même temps des sommets d'un polygone fermé, plan ou gauche, pour en parcourir les côtés suivant une loi de mouvement identique, avec des vitesses à chaque instant proportionnelles aux côtés décrits, le centre de gravité du système des masses mobiles restera fixe.

L'observation sur le théorème de M. Resal, que j'ai faite dernièrement dans le Journal précité (3^e série, t. I, p. 110) s'applique à cette nouvelle généralisation que l'on peut, par une convenable distribution des masses, considérer quasi comme évidente.

M. Laisant, de son côté, démontre dans sa Note précitée que :

Si l'on considère un système de droites quelconques $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ dans l'espace et qu'on fasse tourner toutes ces droites, du même angle et dans le même sens, autour d'axes parallèles passant par leurs premières extrémités $A_1, A_2, \dots, A_n$, ce qui fait prendre aux secondes extrémités les nouvelles positions $B'_1, B'_2, \dots, B'_n$;

Désignant par $G_a, G_b, G_{b'}$ les centres de gravité de la série des points A, de celle des points B, de celle des points B', affectés de masses quelconques, mais égales pour les trois points A_i, B_i et B'_i , de même indice :

Le centre de gravité $G_{b'}$ s'obtiendra par la rotation de G_b , du même angle et dans le même sens, autour d'un axe de rotation passant par G_a et parallèle aux premiers.

L'auteur, qui s'est imposé la tâche de divulguer en France la méthode des quaternions, donne de son théorème une élégante démonstration, basée sur ce genre de calcul. Toutefois, le théorème étant du domaine essentiel de la Mécanique rationnelle, nous ne croyons pas superflu d'observer qu'il est susceptible d'une démonstration immédiate et tout à fait élémentaire, par exemple

de la suivante, qui aurait probablement été choisie par Poinso, si ce grand géomètre avait songé au théorème de M. Laisant.

Désignons par $(A, \omega)B$ le déplacement linéaire, sens et grandeur, du point B tournant de l'angle ω , valeur donnée en grandeur et en signe, autour de l'axe mené par le point A parallèlement à une direction fixe. Il est évident que

$$(A, \omega)B + (B, \omega)A = 0.$$

On voit de même que, d'une manière générale,

$$(A, \omega)B = (C, \omega)B + (A, \omega)C,$$

ou bien

$$(A, \omega)B = (C, \omega)B - (C, \omega)A.$$

Par conséquent, dans le cas qui nous occupe,

$$BB' = (A, \omega)B = (G_a, \omega)B - (G_a, \omega)A.$$

Faisant la somme des n égalités semblables, appliquées aux n points B , et multipliées chacune par la masse m correspondante; considérant de plus que

$$(1) \quad \Sigma m(G_a, \omega)A = M(G_a, \omega)G_a = 0,$$

on obtient immédiatement

$$(2) \quad G_b G_{b'} = (G_a, \omega)G_b,$$

ce qui est le théorème général de M. Laisant.

Nota. — Les équations (1) et (2) ont été écrites suivant le mode usité dans le calcul des équipollences, les déplacements qui y figurent étant des droites géométriques. Pour conserver l'écriture vulgaire, il suffirait de considérer ces deux équations comme existant entre les projections de ces lignes sur un axe quelconque.

Sur la relation qui existe entre le problème de la Trigonométrie sphérique et la théorie du système de trois formes quadratiques binaires; par M. STEPHANOS.

(Séance du 5 mai 1882.)

Depuis que les propriétés métriques des figures sont considérées, d'après Chasles, comme correspondant à des relations projectives de ces figures au cercle à l'infini sur la sphère, et que l'on est parvenu à obtenir les définitions projectives des diverses notions métriques, le problème de la Trigonométrie sphérique, problème qui revient à la détermination des relations qui lient les côtés d'un triangle sphérique à ceux de son triangle polaire, s'est montré comme équivalent à la recherche des relations qui existent entre les rapports anharmoniques déterminés par une conique C^2 sur les côtés de deux triangles de son plan, polaires réciproques par rapport à cette conique.

Dans la présente Note, je fais remarquer comment on peut ramener ce nouveau problème à la théorie du système simultané de trois formes binaires quadratiques et tirer de là les formules fondamentales de la Trigonométrie sphérique.

I. Supposons que l'on ait attribué d'une manière uniforme les valeurs d'un paramètre $x_1 : x_2$ aux divers points d'une conique C^2 . A chaque droite du plan de cette conique sera ainsi attachée une forme binaire, quadratique en x_1, x_2 , ayant pour zéros les paramètres des points de rencontre de la conique avec la droite.

En partant des propriétés des formes attachées de cette façon à plusieurs droites du plan de la conique C^2 , on peut, comme on sait, retrouver toutes les relations projectives de ce système de droites à la conique C^2 . Il doit donc y avoir moyen d'exprimer les rapports anharmoniques déterminés par la conique C^2 sur les côtés a, b, c d'un triangle, en fonction des invariants du système simultané des trois formes quadratiques

$$a_x^2, \quad b_x^2, \quad c_x^2,$$

où

$$a_x^2 = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2, \quad b_x^2 = b_0 x_1^2 + \dots, \quad c_x^2 = c_0 x_1^2 + \dots,$$

respectivement attachées aux trois droites a, b, c .

Cela étant, pour avoir les rapports anharmoniques déterminés par la conique C^2 sur les côtés l, m, n du triangle polaire réciproque de abc , il suffira de connaître les formes l_x^2, m_x^2, n_x^2 attachées aux côtés de ce nouveau triangle.

Or, en supposant que la droite l soit la polaire du point commun aux droites b et c , on remarque que la forme l_x^2 doit coïncider avec la jacobienne

$$(bc)b_x c_x = (b_0 c_1 - b_1 c_0)x_1^2 + (b_0 c_2 - b_2 c_0)x_1 x_2 + (b_1 c_2 - b_2 c_1)x_2^2,$$

des deux formes b_x^2 et c_x^2 . Les formes attachées aux trois droites l, m, n doivent ainsi être égales à

$$l_x^2 = (bc)b_x c_x, \quad m_x^2 = (ca)c_x a_x, \quad n_x^2 = (ab)a_x b_x.$$

Les relations qui existent entre les rapports anharmoniques déterminés par la conique C^2 sur les côtés des deux triangles abc et lmn pourront donc être déduites de celles qui relient les invariants du système des formes a_x^2, b_x^2, c_x^2 à ceux du système covariant l_x^2, m_x^2, n_x^2 .

On parvient ainsi à ce résultat :

Les formules fondamentales de la trigonométrie sphérique correspondent aux relations qui lient les invariants simultanés du système de formes binaires

$$a_x^2, \quad b_x^2, \quad c_x^2$$

à ceux du système covariant

$$(1) \quad l_x^2 = (bc)b_x c_x, \quad m_x^2 = (ca)c_x a_x, \quad n_x^2 = (ab)a_x b_x.$$

Nous allons indiquer tout de suite comment on peut passer effectivement de l'un de ces systèmes de formules à l'autre.

II. Soient α, β, γ les côtés d'un triangle sphérique; λ, μ, ν ceux de son triangle polaire. Soient aussi a, b, c et l, m, n les traces sur le plan à l'infini des plans qui portent respectivement les arcs α, β, γ et λ, μ, ν ; et supposons que les couples de points suivant lesquels le cercle à l'infini sur la sphère est coupé par les droites a, b, c et l, m, n soient représentés respectivement par les formes binaires a_x^2, b_x^2, c_x^2 et l_x^2, m_x^2, n_x^2 , liées entre elles par les relations (1).

Les invariants du système simultanée a_x^2, b_x^2, c_x^2 sont, comme on sait,

$$\begin{aligned} D_{11} &= (aa')^2 = 2(a_0a_2 - a_1^2), & D_{22} &= (bb')^2, & D_{33} &= (cc')^2, \\ D_{23} &= (bc)^2 = b_0c_2 - 2b_1c_1 + b_2c_0, & D_{31} &= (ca)^2, & D_{12} &= (ab)^2, \end{aligned}$$

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

De même les invariants du système l_x^2, m_x^2, n_x^2 sont :

$$d_{11} = (ll')^2, \quad d_{22} = (mm')^2, \quad d_{33} = (nn')^2, \quad d_{23} = (mn)^2, \quad \dots$$

$$r = \begin{vmatrix} l_0 & m_0 & n_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}.$$

Mais, comme les formes l_x^2, m_x^2, n_x^2 sont liées à a_x^2, b_x^2, c_x^2 par les relations (1), on doit avoir

$$(2) \left\{ \begin{aligned} d_{11} &= \frac{1}{2}(D_{22}D_{33} - D_{23}^2), \dots, d_{23} = \frac{1}{2}(D_{31}D_{12} - D_{11}D_{13}), \dots, \\ r &= R^2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} \\ D_{12} & D_{22} & D_{32} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{vmatrix}, \\ R^2 D_{11} &= 2(d_{22}d_{33} - d_{23}^2), \dots, R^2 D_{23} = 2(d_{31}d_{12} - d_{11}d_{13}), \dots, \\ 0 &= D_{11}d_{21} + D_{12}d_{22} + D_{13}d_{23}, \quad 0 = D_{11}d_{31} + D_{12}d_{32} + D_{13}d_{33}, \dots \end{aligned} \right.$$

Maintenant les formules, essentielles pour notre but, qui permettent de passer des relations précédentes, bien connues, aux formules fondamentales de la Trigonométrie sphérique sont les suivantes :

$$(3) \left\{ \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{D_{23}}{\sqrt{D_{22}D_{33}}}, \quad \cos \beta = \frac{D_{31}}{\sqrt{D_{33}D_{11}}}, \quad \cos \gamma = \frac{D_{12}}{\sqrt{D_{11}D_{22}}}, \\ \sin \alpha &= \sqrt{\frac{2d_{11}}{D_{22}D_{33}}}, \quad \dots, \\ \cos \lambda &= \frac{d_{23}}{\sqrt{d_{22}d_{33}}}, \quad \cos \mu = \frac{d_{31}}{\sqrt{d_{33}d_{11}}}, \quad \cos \nu = \frac{d_{12}}{\sqrt{d_{11}d_{22}}}, \\ \sin \lambda &= \varepsilon R \sqrt{\frac{\frac{1}{2}D_{11}}{d_{22}d_{33}}}, \quad \dots \end{aligned} \right.$$

(où ε doit être pris égal à $+1$ ou à -1 , suivant que R est positif ou négatif).

Dans ces formules, nous avons supposé : 1° que les formes a_x^2 , b_x^2 , c_x^2 ont été préparées de telle manière que l'on ait pour $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ des valeurs avec des signes voulus; 2° que les angles α , β , γ , et par conséquent aussi les angles λ , μ , ν ne sont point supérieurs à π . Si l'angle α (β ou γ) devait être plus grand que π , il faudrait faire précéder partout le radical $\sqrt{d_{11}}$ ($\sqrt{d_{22}}$ ou $\sqrt{d_{33}}$) du signe —.

La manière dont on peut tirer des relations (2) et (3) les formules fondamentales de la Trigonométrie sphérique n'offre aucune particularité notable.

Sur le centre des moyennes distances des points d'une courbe unicursale; par M. WEILL.

(Séance du 5 mai 1882.)

Considérons une courbe unicursale d'ordre p définie par les équations

$$x = \frac{f(t)}{(t-\alpha)(t-\beta)\dots(t-\zeta)}, \quad y = \frac{f_1(t)}{(t-\alpha)(t-\beta)\dots}.$$

Soit un système de courbes de degré m dont l'équation contient un paramètre variable λ au degré k . Nous nous proposons de trouver le lieu du centre des moyennes distances des sommets du polygone formé par les points communs à la courbe variable et à la courbe fixe.

L'équation de la courbe variable étant

$$(1) \quad \lambda^k S_m + \lambda^{k-1} S_{1m} + \dots + S_m = 0,$$

les valeurs du paramètre t correspondant aux points considérés satisferont à l'équation obtenue en remplaçant dans l'équation (1), x et y par leurs valeurs en fonction de t , équation qui sera de la forme

$$(2) \quad \lambda^k \varphi_{mp}(t) + \dots = 0.$$

Les abscisses des points communs seront données par les relations

$$\begin{aligned}x_1 &= A + \frac{B}{t_1 - \alpha} + \frac{C}{t_1 - \beta} + \dots + \frac{L}{t_1 - \gamma_s}, \\x_2 &= A + \frac{B}{t_2 - \alpha} + \dots, \\&\dots\dots\dots, \\x_{m_p} &= A + \frac{B}{t_{m_p} - \alpha} + \dots\end{aligned}$$

Si donc on désigne par X l'abscisse du centre des moyennes distances, on aura

$$m_p X = m_p A + B \sum_1^{m_p} \frac{1}{t - \alpha} + C \sum_1^{m_p} \frac{1}{t - \beta} + \dots,$$

ou bien

$$m_p X = A + B \frac{\lambda^k \varphi'_{m_p}(\alpha) + \dots}{\lambda^k \varphi_{m_p}(\alpha) + \dots} + C \frac{\lambda^k \varphi'_{m_p}(\beta) + \dots}{\lambda^k \varphi_{m_p}(\beta) + \dots} + \dots$$

On trouve pour Y une expression analogue, et l'on conclut de là que le centre des moyennes distances décrit une courbe unicursale de degré ρk ; soit λ_1 une racine de l'équation

$$\lambda^k \varphi_{m_p}(\alpha) + \dots = 0.$$

Pour $\lambda = \lambda_1$, X et Y deviennent infinis, et le rapport $\frac{Y}{X}$ est égal à $\frac{B_1}{B}$: donc les asymptotes de la courbe sont parallèles à celles de la courbe unicursale donnée, et chaque direction asymptotique de la courbe unicursale est une direction asymptotique multiple d'ordre k du lieu cherché.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le lieu du centre des moyennes distances des points communs à une courbe unicursale fixe d'ordre ρ et à un système de courbes d'ordre m , dont l'équation contient un paramètre variable au degré k , est une courbe unicursale d'ordre ρk , ayant pour directions asymptotiques multiples d'ordre k les directions asymptotiques de la courbe unicursale.*

Il faut remarquer que le degré du lieu ne dépend pas de m . Le théorème précédent donne lieu à un grand nombre de résultats par-

ticuliers ; l'un des plus intéressants est celui où l'on a $k = 1$: alors le système des courbes variables forme un faisceau, et le lieu λ est une courbe d'ordre p , ayant mêmes directions asymptotiques que la courbe unicursale.

En particulier, considérons une conique fixe et un polygone variable inscrit dans cette conique et circonscrit à une autre conique fixe. Si l'on appelle t le paramètre définissant un sommet du polygone, nous avons établi que les m valeurs de t correspondant à l'un des polygones satisfaisaient à une équation de degré m dont les coefficients sont des fonctions linéaires d'un paramètre λ , la variation de ce paramètre correspondant au déplacement continu de ce polygone ; dès lors les calculs et les résultats sont applicables, et l'on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le lieu des centres des moyennes distances des sommets d'un polygone inscrit et circonscrit à deux coniques fixe est une conique homothétique à celle dans laquelle le polygone est inscrit.*

On en conclut, en particulier, que si un polygone se déplace en restant inscrit à un cercle et circonscrit à une conique, le centre des moyennes distances des sommets décrit un cercle ; ce cercle se réduit à un point lorsque la conique à laquelle le polygone est circonscrit a l'un de ses foyers au centre du cercle dans lequel le polygone est inscrit.

Sur une nouvelle méthode de résolution de l'équation du quatrième degré, et son application à quelques équations de degrés supérieurs ; par M. PERRIN.

(Séance du 19 mai 1882.)

1. La résolution de l'équation du troisième degré, privée de son second terme

$$(1) \quad x^3 + px + q = 0,$$

peut être considérée comme se déduisant immédiatement de

l'identité évidente

$$(2) \quad (a+b)^3 - 3ab(a+b) - (a^3 + b^3) = 0,$$

dans laquelle a et b sont deux quantités arbitraires.

Pour identifier (1) avec (2), il suffit, en effet, de poser

$$x = a + b, \quad p = -3ab, \quad q = -(a^3 + b^3),$$

et ces trois relations montrent que, si l'on détermine a et b de telle sorte que a^3 et b^3 soient les racines de l'équation

$$y^2 + qy - \frac{p^3}{27} = 0,$$

et que le produit ab soit bien égal à $-\frac{p}{3}$, la valeur $x = a + b$ satisfera à l'équation (1), et fournira, par conséquent, l'expression d'une de ses racines, d'où la formule de Cardan et la règle à suivre pour associer entre elles les valeurs des deux radicaux cubiques.

2. Essayons de ramener de même la résolution de l'équation du quatrième degré, débarrassée de son second terme,

$$(3) \quad x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

à une identité analogue à (2), c'est-à-dire dont le premier membre soit une fonction symétrique et homogène du quatrième degré de trois arbitraires a, b, c , et ne renferme que la somme $a + b + c$ d'une part, et que des fonctions symétriques de puissances semblables de a, b, c d'autre part. Cette identité devra être de la forme

$$(4) \quad (a + b + c)^4 + A(a + b + c)^2 + B(a + b + c) + C = 0,$$

où A, B, C devront être des fonctions symétriques de a, b, c respectivement du deuxième, du troisième et du quatrième degré; il est naturel, puisque le produit abc nous fournit déjà pour B une fonction du troisième degré, d'essayer de former A et C avec des fonctions symétriques de a^2, b^2, c^2 , et de poser par conséquent, en désignant par λ, μ, ν, ρ quatre indéterminées numériques,

$$(5) \quad \begin{cases} (a + b + c)^4 + \lambda \Sigma a^2(a + b + c)^2 + \mu abc(a + b + c) \\ \quad + \nu (\Sigma a^2)^2 + \rho \Sigma a^2 b^2 = 0. \end{cases}$$

Pour que cette relation soit identique, c'est-à-dire vraie, quelles que soient les valeurs de a, b, c , il est nécessaire et suffisant de faire en sorte que les coefficients de a^4, a^3b, a^2b^2, a^2bc soient nuls; car, en vertu de la symétrie, tous les autres termes disparaîtront aussi d'eux-mêmes. Mais, pour annuler ces quatre coefficients, nous disposons précisément de quatre indéterminées λ, μ, ν, ρ . Écrivant donc que les quatre coefficients dont il s'agit sont nuls, nous avons, pour déterminer λ, μ, ν, ρ , les quatre équations

$$\begin{array}{ll} a^4 \dots\dots\dots & 1 + \lambda + \nu = 0, \\ a^3b \dots\dots\dots & 4 + 2\lambda = 0, \\ a^2b^2 \dots\dots\dots & 6 + 2\lambda + 2\nu + \rho = 0, \\ a^2bc \dots\dots\dots & 12 + 2\lambda + \mu = 0, \end{array}$$

d'où on déduit

$$\lambda = -2, \quad \mu = -8, \quad \nu = 1, \quad \rho = -4,$$

ce qui donne, pour l'identité cherchée,

$$(6) \quad \begin{cases} (a+b+c)^4 - 2\Sigma a^2(a+b+c)^2 \\ - 8abc(a+b+c) + (\Sigma a^2)^2 - 4\Sigma a^2b^2 = 0. \end{cases}$$

Il ne reste plus dès lors qu'à identifier les premiers membres de (3) et de (6) en posant

$$x = a + b + c, \quad p = -2\Sigma a^2, \quad q = -8abc, \quad r = (\Sigma a^2)^2 - 4\Sigma a^2b^2;$$

on en conclut

$$\Sigma a^2 = -\frac{p}{2}, \quad \Sigma a^2b^2 = \frac{p^2 - 4r}{16}, \quad abc = -\frac{q}{8}.$$

Si donc on prend pour a^2, b^2, c^2 les trois racines y_1, y_2, y_3 de la résolvante

$$(7) \quad y^3 + \frac{p}{2}y^2 + \frac{p^2 - 4r}{16}y - \frac{q^2}{64} = 0,$$

$a + b + c$ ou $\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}$ sera une racine de l'équation (3), pourvu que l'on ait associé les radicaux carrés avec les signes convenables pour que leur produit donne bien $-\frac{q}{8}$; ce qui fera disparaître l'ambiguïté provenant des doubles signes et fournira seulement les quatre racines.

La résolvante (7) est précisément, à un facteur constant près, celle que donne la méthode de Lagrange appliquée à la fonction suivante des racines de (3)

$$y = x_1 + x_2 - x_3 - x_4.$$

3. Si l'on pouvait, par un moyen quelconque, former pour les degrés supérieurs au quatrième des identités analogues à (2) et (6), on pourrait sans doute en déduire la résolution d'équations correspondantes. Or, il est facile de former de telles identités soit par la méthode des coefficients indéterminés que nous venons d'employer pour obtenir l'identité (6), soit d'une manière beaucoup plus simple en utilisant les formules bien connues qui donnent les fonctions symétriques des racines d'une équation exprimées au moyen des coefficients de cette équation. Soient en effet $a_1, a_2, \dots, a_n$, n quantités arbitraires; désignons par $x_1, x_2, \dots, x_n$ leur somme, la somme de leurs produits deux à deux, trois à trois, etc., jusqu'à leur produit $a_1 a_2 \dots a_n$. Désignons de même par $y_1, y_2, \dots, y_n$ la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ de ces quantités, la somme des produits deux à deux, trois à trois, etc., de ces puissances, la dernière quantité y_n étant par conséquent égale à x_n^m . On sait exprimer les $n - 1$ quantités $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ en fonction entière de $x_1, x_2, \dots, x_n$. Si entre ces $n - 1$ relations on élimine $n - 2$ des quantités $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, on obtiendra une relation qui ne contiendra plus que les y , avec x_n qui peut être remplacé par $\sqrt[m]{y_n}$, et celle que l'on voudra des quantités x , par exemple x_1 . On aura donc une identité homogène qui contiendra les diverses puissances de x_1 , c'est-à-dire de $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$, multipliées par des fonctions symétriques des puissances $a_1^m, a_2^m, \dots, a_n^m$, et, si cette identité renferme x_1 à une puissance r supérieure à n , on pourra s'en servir pour ramener la résolution d'une certaine classe d'équations de degré r à la résolution d'une équation de degré n .

Si, en particulier, on suppose $n = 2$, $m = 3$, ce procédé donne immédiatement l'identité (2); si l'on fait $n = 3$, $m = 2$, il conduit à éliminer x_2 entre les deux relations

$$y_1 = x_1^2 - 2x_2,$$

$$y_2 = x_2^2 - 2x_1x_3,$$

ce qui donne

$$x_1^4 - 2y_1x_1^2 - 8x_3x_1 + y_1^2 - 4y_3 = 0,$$

c'est-à-dire, en remplaçant respectivement x_1, x_3, y_1, y_3 par leurs valeurs $a + b + c, abc, a^2 + b^2 + c^2, a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$, précisément l'identité (6).

Au lieu d'éliminer x_2 , on aurait pu éliminer x_1 , ce qui aurait donné

$$x_1^4 - 2y_1x_1^2 - 8x_3x_1 + y_1^2 - 4y_3x_3^2 = 0,$$

et par conséquent l'identité

$$(8) \quad \begin{cases} (ab + ac + bc)^4 - 2 \Sigma a^2 b^2 (ab + ac + bc)^2 \\ - 8 a^2 b^2 c^2 (ab + ac + bc) + (\Sigma a^2 b^2)^2 - 4 a^2 b^2 c^2 \Sigma a^2 = 0. \end{cases}$$

En appliquant cette identité à la résolution de l'équation du quatrième degré (3), on aurait été conduit à la nouvelle résolvante que voici

$$z^3 + \frac{p^2 - 4r}{2q} z^2 - \frac{p}{2} z + \frac{q}{8} = 0.$$

Si z_1, z_2, z_3 sont ses trois racines, les quatre racines de (3) seront données par la formule

$$\pm \sqrt{z_1 z_2} \pm \sqrt{z_1 z_3} \pm \sqrt{z_2 z_3},$$

les signes étant choisis de manière que le produit des trois radicaux donne bien $-\frac{q}{8}$.

4. L'hypothèse $n = 3, m = 3$ conduit, quelle que soit la quantité x éliminée, à une identité qui n'offre aucun intérêt, parce que l'équation correspondante du neuvième degré se ramène immédiatement au troisième. Il en est de même pour le cas de $n = 2, m = 4$, où les identités qu'on obtient correspondent à des équations du huitième degré se ramenant immédiatement au quatrième.

Faisons encore $n = 2, m = 5$. Les formules de Newton donnent

$$y_1 = x_1^5 - 5x_1^3x_2 + 5x_1x_2^2,$$

d'où l'identité, d'ailleurs facile à établir directement,

$$(9) \quad (a + b)^5 - 5ab(a + b)^3 + 5a^2b^2(a + b) - (a^5 + b^5) = 0.$$

7 Comparons avec l'équation du cinquième degré privée de son second terme

$$(10) \quad x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0.$$

Pour identifier les premiers membres de (9) et (10), il faudra supposer $q = 0$, puis poser

$$\begin{aligned} -5ab &= p, \\ 5a^2b^2 &= r, \\ a^5 + b^5 &= -s; \end{aligned}$$

ce qui n'est possible que si $p^2 = 5r$.

Si donc les coefficients de l'équation (10) satisfont à ces deux conditions, savoir

$$(11) \quad q = 0, \quad p^2 - 5r = 0,$$

elle admettra pour racine $a + b$, a^5 et b^5 étant les deux racines de

$$y^2 + sy - \frac{p^5}{5^5} = 0,$$

et ayant, par suite, pour valeurs

$$-\frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} + \frac{p^5}{5^5}}.$$

Si donc a , b sont respectivement deux valeurs des radicaux

$$\sqrt[5]{-\frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} + \frac{p^5}{5^5}}}, \quad \sqrt[5]{-\frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2}{4} + \frac{p^5}{5^5}}},$$

choisies de manière que leur produit ab soit bien égal à $-\frac{p}{5}$, et si

θ est une racine cinquième de l'unité, autre que 1, les cinq racines de l'équation (10) seront évidemment

$$\begin{aligned} a + b, \\ \theta a + \theta^4 b, \\ \theta^2 a + \theta^3 b, \\ \theta^3 a + \theta^2 b, \\ \theta^4 a + \theta b. \end{aligned}$$

Comme exemple simple d'équation du cinquième degré satisfaisant aux conditions (11), on peut citer celle qui donne

$x = \sin \frac{\varphi}{5}$ en fonction de $\sin \varphi = m$; cette équation est la suivante :

$$x^5 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{5}{16}x - \frac{m}{16} = 0,$$

et l'expression générale de ses cinq racines est, par suite,

$$\frac{1}{2} \left\{ \sqrt[5]{m + \sqrt{m^2 - 1}} + \sqrt[5]{m - \sqrt{m^2 - 1}} \right\}.$$

d'après la formule donnée ci-dessus. Il est remarquable que, lorsque $-1 < m < 1$, les cinq racines soient toutes réelles, et que cependant la formule les donne compliquées d'imaginaires, comme la formule de Cardan pour le cas irréductible du troisième degré.

L'équation générale du cinquième degré ne peut être ramenée à satisfaire aux conditions (11), par une transformation de Tschirnhaus, qu'en résolvant trois équations simultanées du premier, du troisième et du quatrième degré; et, par une transformation linéaire, que s'il existe entre les invariants de la forme du cinquième degré, qui constitue le premier membre de l'équation, une certaine relation qu'il est facile de trouver. Désignons, suivant la notation de M. Salmon (*Leçons d'Algèbre supérieure*), par J, K, L les invariants fondamentaux du quatrième, du huitième et du douzième ordre; en supposant les relations (11) satisfaites et le coefficient de x^4 nul, ces invariants deviennent des fonctions de p et s ; en éliminant ces deux quantités entre les trois expressions obtenues, on trouve aisément la relation cherchée, qui peut s'écrire sous la forme suivante

$$(12) \quad \alpha(125 + 361\alpha)^2 - 4(238\alpha + 5\beta)^2 = 0,$$

α désignant l'invariant absolu $1 - \frac{128K}{J^2}$, qui s'annule quand la forme admet un facteur carré, et β l'invariant absolu $1 - \frac{2048L}{J^3}$, qui s'annule en même temps que le précédent lorsque la forme admet deux facteurs carrés. On voit que, si la condition (12) est satisfaite, l'un des invariants absolus α, β ne peut s'annuler sans l'autre; il existe donc zéro ou deux facteurs carrés, ce qui résulterait aussi de la discussion des valeurs données ci-dessus pour les cinq racines.

5. Les identités (2) et (9) ne sont que des cas particuliers de celle-ci,

$$(13) \left\{ \begin{aligned} & (a+b)^m - mab(a+b)^{m-2} + m \frac{m-3}{1.2} a^2 b^2 (a+b)^{m-4} \\ & - m \frac{(m-4)(m-5)}{1.2.3} a^3 b^3 (a+b)^{m-6} \\ & + m \frac{(m-5)(m-6)(m-7)}{1.2.3.4} a^4 b^4 (a+b)^{m-8} - \dots - (a^m + b^m) = 0, \end{aligned} \right.$$

dont il est aisé de vérifier l'exactitude en s'assurant que, si elle est vraie pour $m = p-1$ et $m = p$, elle l'est aussi pour $m = p+1$.

Au moyen de cette identité (13), on peut évidemment obtenir l'expression des m racines de toute équation de degré impair ne contenant que les puissances impaires de l'inconnue, et dans laquelle les coefficients de ces puissances ne dépendent que d'un seul paramètre, en vertu de $\frac{m-3}{2}$ relations qu'il est facile d'écrire, à l'inspection de l'identité (13), sous la forme abrégée

$$(14) \quad p_{2k} = \frac{(m-k-1)(m-k-2)\dots(m-2k+1)}{1.2\dots k.m} p_2^k,$$

où p_{2k} est le coefficient de x^{m-2k} , le terme indépendant restant d'ailleurs tout à fait arbitraire.

En se plaçant à ce point de vue, la formule de Cardan apparaît comme la première d'une série indéfinie de formules semblables, qui s'appliquent à une série de groupes d'équations de tous les degrés impairs; pour chaque degré m , le groupe d'équations résolubles par cette formule est défini par $m-4$ équations de condition entre les invariants de la forme de degré m . Pour $m=3$, ce groupe comprend donc la totalité des équations de ce degré, et la formule donne la résolution de l'équation générale; pour $m>3$, il ne comprend plus qu'un groupe spécial d'équations du degré considéré, et d'autant plus spécial que ce degré est lui-même plus élevé.

Sur les intégrales définies uniformément convergentes;
par M. SELIVANOFF.

(Séances du 19 mai et du 2 juin 1882.)

Supposons que la fonction $f(x, z)$ reste finie et continue entre les limites de l'intégration, lorsqu'on donne à x les valeurs contenues dans un certain contour et que l'intégrale soit finie et déterminée.

La fonction

$$\Phi(x) = \int_a^\infty f(x, z) dz$$

n'est plus une fonction continue, et généralement l'égalité

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = \int_a^\infty \frac{\partial f(x, z)}{\partial x} dz$$

est en défaut.

En effet, supposons que, pour toutes les valeurs de z entre a et b , la fonction soit décomposable de la manière suivante :

$$f(x + h, z) = f(x, z) + h\varphi(x, z) + h\psi(h, z),$$

$\psi(h, z)$ s'annulant pour $h = 0$.

La fonction $\varphi(x, z)$ est alors la dérivée de $f(x, z)$ par rapport à x .

En intégrant, on aura

$$\begin{aligned} \Phi(x + h) &= \int_a^b f(x + h, z) dz \\ &= \int_a^b f(x, z) dz + h \int_a^b \varphi(x, z) dz + h \int_a^b \psi(h, z) dz. \end{aligned}$$

Pour que l'intégrale

$$\int_a^b \varphi(x, z) dz = \int_a^b \frac{\partial f(x, z)}{\partial x} dz$$

soit la dérivée de $\Phi(x)$, il faut et il suffit que

$$\int_a^b \psi(h, z) dz = (b - a)\psi(h, \zeta)$$

s'annule pour $h = 0$.

Cette condition sera évidemment satisfaite dans le cas où a et b sont finis et $\psi(0, z) = 0$, pour toutes les valeurs de z entre a et b .

Si la fonction $\psi(h, z)$ a la forme $h\psi_1(h, z)$, la condition à laquelle elle est soumise sera satisfaite pourvu que $\psi_1(0, z)$ reste finie entre les limites d'intégration.

Si la fonction $f(x, z)$ a deux dérivées par rapport à x , on peut écrire, d'après le théorème de Taylor,

$$f(x+h, z) = f(x, z) + hf'(x, z) + \frac{h^2}{1.2} f''(x + \theta h, z).$$

$f''(x, z)$ sera finie, si $f(x, z)$ et $f'(x, z)$ restent finies et continues pour toutes les valeurs de z entre a et b .

Nous avons donc le théorème :

On peut différentier sous le signe $\int$ l'intégrale

$$\int_a^b f(x, z) dz,$$

ayant ses limites finies, si la fonction $f(x, z)$ et sa première dérivée restent finies et continues entre les limites d'intégration et si la deuxième dérivée existe.

Nous nous proposons la question : *Peut-on, dans certains cas, différentier sous le signe, si une des limites d'intégration est infinie?* La proposition précédente est en défaut et il faut trouver un autre moyen de résoudre la question.

Les mêmes difficultés subsistent pour les séries. Chacun des termes de la série est une fonction continue de la variable ; il n'en est pas toujours de même pour la série. La dérivée de la série n'est pas toujours égale à la somme des dérivées de ses termes.

Il y a cependant une classe de séries infinies qui offre une certaine analogie avec les fonctions rationnelles. Ce sont les séries *uniformément convergentes*, ainsi qu'a démontré M. Weierstrass dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Berlin* du mois d'août 1880. (Voir la traduction française de ce Mémoire dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* de M. Darboux, avril 1881, p. 161-164.)

La méthode de M. Weierstrass, appliquée aux intégrales définies, donne le moyen de résoudre notre question.

1. L'intégrale

$$\Phi(x) = \int_a^\infty f(x, z) dz$$

est dite *uniformément convergente* si, pour toutes les valeurs de x contenues dans l'intérieur d'un certain contour, on peut déterminer un nombre p tel, qu'en prenant $m \geq p$ on ait

$$\text{mod} \int_m^\infty f(x, z) dz < k,$$

k étant une quantité aussi petite qu'on voudra, et donnée d'avance.

Considérons la différence

$$\Phi(x+h) - \Phi(x).$$

En partageant l'intégrale en deux parties, nous aurons

$$\begin{aligned} & \Phi(x+h) - \Phi(x) \\ &= \int_a^m [f(x+h, z) - f(x, z)] dz \\ &+ \left[\int_m^\infty f(x+h, z) dz - \int_m^\infty f(x, z) dz \right]. \end{aligned}$$

Le premier terme est infiniment petit avec h , car il est égal à

$$(m-a)[f(x+h, \zeta) - f(x, \zeta)],$$

ζ étant compris entre a et m .

Si les quantités x et $x+h$ sont contenues dans le contour de convergence uniforme, on a pour le second terme

$$\left| \int_m^\infty f(x+h, z) dz - \int_m^\infty f(x, z) dz \right| < 2k^{(1)}.$$

Nous avons donc le théorème suivant :

Si l'intégrale est uniformément convergente, elle est une fonction continue, pour les valeurs du paramètre contenues dans le contour de convergence uniforme.

(¹) Le signe $| |$ désigne, d'après M. Weierstrass, le module.

2. Supposons que, pour toutes les valeurs de z plus grandes que a , on ait le développement

$$f(x, z) = \varphi_0(z) + \varphi_1(z)x + \varphi_2(z)x^2 + \dots + \varphi_n(z)x^n + \dots$$

Si, pour $|x| = r$,

$$|f(x, z)| \leq g,$$

g étant une fonction de z finie pour $z > a$, on a, d'après une proposition connue,

$$|\varphi_n(z)| \leq g r^{-n}.$$

En se fondant sur ce théorème, nous avons, pour $|x| = r_1 < r$,

$$\begin{aligned} |R_n| &= |\varphi_n(z)x^n + \varphi_{n+1}(z)x^{n+1} + \varphi_{n+2}(z)x^{n+2} + \dots| \\ &\leq g \left(\frac{r_1}{r}\right)^n \left[1 + \frac{r_1}{r} + \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 + \dots\right], \end{aligned}$$

ou

$$|R_n| \leq \frac{g}{1 - \frac{r_1}{r}} \cdot \left(\frac{r_1}{r}\right)^n.$$

On voit que, pour toutes les valeurs de x dont le module est $< r$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x, z) = 0.$$

En intégrant depuis a jusqu'à m , on trouve

$$\begin{aligned} \int_a^m f(x, z) dz &= \int_a^m \varphi_0(z) dz + x \int_a^m \varphi_1(z) dz + \dots \\ &\quad + x^{n-1} \int_a^m \varphi_{n-1}(z) dz + \int_a^m R_n(x, z) dz. \end{aligned}$$

Le terme complémentaire a pour limite zéro quand m croît indéfiniment, comme on le voit facilement d'après la valeur moyenne de cette intégrale, à savoir

$$(m - a)R_n(x, \zeta).$$

Mais il est indispensable que m soit fini et que $|x| < r$.

Sous ces conditions, l'intégrale

$$\int_a^\infty f(x, z) dz$$

est développable suivant les puissances croissantes de x .

Nous allons démontrer que la même proposition a lieu pour l'intégrale

$$\int_a^\infty f(x, z) dz,$$

si elle est uniformément convergente, pour $|x| \leq r$.

Supposons que

$$\left| \int_m^\infty f(x, z) dz \right| \leq k, \quad |x| \text{ étant } \leq r.$$

En prenant un nombre m' plus grand que m , mais fini, nous avons

$$\begin{aligned} \int_m^{m'} f(x, z) dz \\ = \int_m^{m'} \varphi_0(z) dz = x \int_m^{m'} \varphi_1(z) dz + \dots + x^n \int_m^{m'} \varphi_n(z) dz + \dots \end{aligned}$$

Pour $|x| = r$, nous aurons *a fortiori*

$$\left| \int_m^{m'} f(x, z) dz \right| \leq k,$$

et, d'après le théorème déjà mentionné,

$$\left| \int_m^{m'} \varphi_n(z) dz \right| \leq kr^{-n}.$$

Rien n'oblige maintenant à laisser m' fini, puisque la seconde partie est indépendante de m' .

Nous avons donc

$$\left| \int_m^\infty \varphi_n(z) dz \right| \leq kr^{-n};$$

l'intégrale

$$\int_a^\infty \varphi_n(z) dz$$

est par conséquent finie.

Il ne reste plus que quelques mots pour achever la démonstration.

Faisons la différence

$$\begin{aligned} S &= \int_a^\infty f(x, z) dz - \sum_{n=0}^m x^n \int_a^\infty \varphi_n(z) dz \\ &= \int_m^\infty f(x, z) dz - \sum_{n=0}^m x^n \int_m^\infty \varphi_n(z) dz, \end{aligned}$$

puisque nous avons déjà démontré que

$$\int_a^m f(x, z) dz = \sum_{n=0}^m x^n \int_a^m \varphi_n(z) dz.$$

Posons $|x| = r_1 < r$,

$$|S| \leq \left| \int_m^\infty f(x, z) dz \right| + \sum_{n=0}^m r_1^n \left| \int_m^\infty \varphi_n(z) dz \right|,$$

ou

$$|S| \leq k + \sum_{n=0}^m k \left(\frac{r_1}{r} \right)^n \leq k \left(1 + \frac{r_1}{r - r_1} \right).$$

En faisant grandir m , on peut faire k aussi petit que l'on veut; S , pouvant devenir aussi petite que l'on veut, doit être égal à 0, parce qu'elle est indépendante de m . Donc

$$\int_a^\infty f(x, z) dz = \sum_{n=0}^\infty x^n \int_a^\infty \varphi_n(z) dz.$$

3. Voici une conséquence de cette proposition.

Supposons que l'intégrale

$$\Phi(x + h) = \int_a^\infty f(x + h, z) dz$$

soit uniformément convergente pour les valeurs de h dont le module est égal ou $< r$ et que la fonction $f(x + h, z)$ soit pour les mêmes valeurs développable suivant les puissances entières et positives de h .

D'après le théorème de Taylor,

$$f(x + h, z) = f(x, z) + h \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{h^2}{1.2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dots,$$

et, comme nous avons démontré,

$$\begin{aligned} \Phi(x + h) \\ = \int_a^\infty f(x, z) dz + h \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x} dz + \dots + \frac{h^n}{1.2.3 \dots n} \int_a^\infty \frac{\partial^n f}{\partial x^n} dz + \dots \end{aligned}$$

Nous voyons que $\Phi(x + h)$ est aussi développable suivant les puissances entières et positives de h , ou, d'après M. Weierstrass, la fonction $\Phi(x)$ se comporte régulièrement dans le voisinage du point x .

Par conséquent,

$$\Phi(x + h) = \Phi(x) + h \frac{d\Phi}{dx} + \dots + \frac{h^n}{1.2.3 \dots n} \frac{d^n \Phi}{dx^n} + \dots$$

En égalant les coefficients, nous trouvons

$$\frac{d^n}{dx^n} \int_a^\infty f(x, z) dz = \int_a^\infty \frac{\partial^n f(x, z)}{\partial x^n} dz.$$

On peut donc différentier sous le signe $\int$ autant de fois que l'on veut, si, dans le voisinage du point x , l'intégrale est uniformément convergente et la fonction f se comporte régulièrement.

4. Comme exemple, considérons l'intégrale

$$\Phi(x) = \int_0^\infty e^{-xz^2} dz.$$

Elle est uniformément convergente pour toutes les valeurs réelles et positives de x , ou imaginaires dont la partie réelle est positive.

En effet, posons

$$x = t + ui, \quad t > 0;$$

$$\left| \int_m^\infty e^{-(t+ui)z^2} dz \right| < \int_m^\infty e^{-tz^2} dz,$$

ou

$$< \frac{e^{-mt}}{t}.$$

En prenant pour t une valeur positive α , on détermine m de telle façon que

$$\frac{e^{-mt}}{t} < k;$$

cette inégalité aura lieu pour toutes les valeurs de t plus grandes que α .

Donc

$$\left| \int_m^\infty e^{-xz^2} dz \right| < k.$$

La fonction $\Phi(x)$ est continue dans le voisinage de tous les points x situés à droite de l'axe des ordonnées.

L'intégrale

$$\Phi(x+h) = \int_a^\infty e^{-(x+h)z^2} dz$$

est uniformément convergente pour les valeurs de h telles que les points $x+h$ soient à l'intérieur d'un cercle situé à droite de l'axe des ordonnées et ayant x pour centre.

La fonction $e^{-(x+h)z^2}$ est développable suivant les puissances entières et positives de h dans ce même cercle.

Donc

$$\frac{d^n}{dx^n} \int_a^\infty e^{-xz^2} dz = \int_a^\infty \frac{\partial^n}{\partial x^n} (e^{-xz^2}) dz.$$

5. Comme second exemple, considérons l'intégrale de Laplace

$$\Phi(x) = \int_0^\infty \frac{\cos xz}{1+z^2} dz,$$

finie et déterminée pour x réel.

La fonction

$$\frac{\cos(x+h)z}{1+z^2}$$

est développable suivant les puissances entières et positives de h , mais l'intégrale $\Phi(x+h)$ n'est pas uniformément convergente pour toutes les valeurs de h dont le module est inférieur ou égal à r .

L'intégrale

$$\Phi(x+h) = \int_0^\infty \frac{\cos(x+h)z}{1+z^2} dz$$

devient même infinie, si h est imaginaire. La valeur absolue de $\cos x$ est < 1 seulement dans le cas de x réel. Lorsqu'on donne à x une valeur imaginaire, $\cos x$ croît indéfiniment avec le module de x et de telle façon que

$$\lim \left| \frac{\cos x}{x^n} \right| = \infty, \quad \lim |x| = \infty.$$

Pour reconnaître si l'on peut différentier notre intégrale sous le signe $\int$, il faut recourir à la méthode générale.

En employant la formule de Taylor

$$\cos(x + h) = \cos x - h \sin x - h^2 \cos(x + \theta h),$$

on trouve sur-le-champ

$$\Phi(x + h) = \Phi(x) - h \int_0^\infty \frac{z \sin xz}{1 + z^2} dz - h^2 \int_0^\infty \frac{z^2 \cos(x + \theta h)z}{1 + z^2} dz.$$

On a l'égalité

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = - \int_0^\infty \frac{z \sin xz}{1 + z^2} dz$$

l'expression

$$h \int_0^\infty \frac{z^2 \cos(x + \theta h)z}{1 + z^2} dz$$

s'annule pour $h = 0$, ce qui a lieu en effet.

L'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{z^2 \cos xz}{1 + z^2} dz$$

est décomposable en deux :

$$\int_0^\infty \cos xz dz - \int_0^\infty \frac{\cos xz dz}{1 + z^2}.$$

La première intégrale est finie, quoique indéterminée ; la seconde est finie et déterminée. Le produit de cette expression par h s'annule donc pour $h = 0$.

Voici la conclusion :

L'intégrale

$$\Phi(x) = \int_0^\infty \frac{\cos xz}{1 + z^2} dz$$

peut être différenciée sous le signe et on obtient l'intégrale

$$- \int_0^{\infty} \frac{z \sin xz}{1+z^2} dz,$$

qui est nécessairement finie et déterminée pour toutes les valeurs réelles de x .

Appliquons le même raisonnement à l'intégrale

$$\Phi(x) = \int_0^{\infty} \frac{z \sin xz}{1+z^2} dz.$$

Nous trouverons qu'elle peut être différenciée si l'expression

$$h \int_0^{\infty} \frac{z^3 \sin(x + \theta h)z}{1+z^2} dz$$

s'annule pour $h = 0$.

Nous ne savons pas ce que devient cette expression pour $h = 0$, puisque l'intégrale qui multiplie h est infinie.

Dans ce cas particulier, il y a un moyen indirect de conclure que la différenciation est impossible. Le résultat est l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{z^3 \cos xz}{1+z^2} dz,$$

indéterminée pour toutes les valeurs réelles de x , et il est impossible qu'elle soit la dérivée d'une fonction finie et déterminée.

On sait que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos xz dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2} e^{-x}.$$

Par la différentiation, on trouve

$$\int_0^{\infty} \frac{z \sin xz}{1+z^2} = dz \frac{\pi}{2} e^{-x};$$

c'est donc une fonction finie et déterminée ayant une dérivée.

Donc l'égalité

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{z \sin xz}{1+z^2} dz = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z \sin xz}{1+z^2} \right) dz$$

est en défaut.

6. La règle de différentiation sous le signe $\int$ n'est pas applicable aux intégrales de la forme

$$\Phi(x) = \int_a^b \frac{f(x, z)}{(z-b)^n} dz,$$

puisque la quantité sous le signe devient infinie pour $z = b$.

Cette intégrale a une valeur finie et déterminée, si n est < 1 .

En faisant la substitution

$$z - b = \frac{1}{t},$$

nous ramènerons l'intégrale à la forme déjà considérée

$$= \int_{\frac{1}{a-b}}^{\infty} \frac{f\left(x, b + \frac{1}{t}\right)}{t^{1-n}} dt.$$

La fonction sous le signe $\int$ est finie et continue entre les limites d'intégration.

Sur les résidus cubiques et biquadratiques, suivant un module premier; par M. A.-E. PELLET.

(Séance du 16 juin 1882.)

1. Soient θ une racine de l'équation $\frac{x^p-1}{x-1} = 0$, p étant un nombre premier, g une racine primitive de p , et e un diviseur de $p-1$; nous poserons

$$\frac{p-1}{e} = \omega.$$

θ^{gi+je} ne prend que ω valeurs différentes lorsque, i étant constant, on fait varier j . Soit

$$s_i = \sum_{j=0}^{j=\omega-1} \theta^{gi+je}.$$

s_i admet e valeurs distinctes, qu'on obtiendra en donnant à i les valeurs $0, 1, 2, \dots, e-1$; ces e valeurs de s_i se transforment l'une dans l'autre, lorsqu'on remplace θ par une autre racine, θ^{s^k} , de $\frac{x^p-1}{x-1} = 0$. Ces quantités s_i sont dites les périodes des racines d'ordre p de l'unité correspondant au diviseur e de $p-1$. Depuis Gauss, on connaît l'équation aux périodes pour e égal à l'un des trois nombres 2, 3, 4.

I. L'équation à deux périodes est

$$s^2 + s + \frac{1-p}{4} = 0 \quad \text{ou} \quad s^2 + s + \frac{1+p}{4} = 0,$$

suivant que $p-1$ est divisible ou non par 4.

II. L'équation à trois périodes est

$$\omega^3 - 3p\omega - pL = 0,$$

ω représentant $3s+1$, et L un nombre entier déterminé par l'équation $4p = L^2 + 27M^2$, avec la condition $L \equiv 1 \pmod{3}$.

III. L'équation à quatre périodes affecte deux formes différentes suivant que $p-1$ est ou n'est pas divisible par 8. Désignons dans l'un et l'autre cas par y une racine de l'équation

$$y^2 + y + \frac{1-p}{4} = 0,$$

et par a un nombre entier déterminé par l'équation

$$p = a^2 + b^2,$$

avec la condition $a \equiv -1 \pmod{4}$.

L'équation à quatre périodes est

$$s^2 - ys - \frac{p-1+(a+1)(2+4y)}{16} = 0,$$

si $p-1$ est divisible par 8;

$$s^2 - ys + \frac{3p+1-(a+1)(2+4y)}{16} = 0,$$

si $p-1$ n'est pas divisible par 8.

2. La fonction $\frac{x^p - 1}{x - 1}$ se décompose suivant le module premier q en $\frac{p-1}{v}$ facteurs irréductibles de degré v , v étant l'exposant auquel appartient q relativement au module p , c'est-à-dire le plus petit nombre tel que $q^v \equiv 1 \pmod{p}$ (SERRET, *Algèbre supérieure*, t. II). Le premier membre de l'équation aux e périodes des racines d'ordre p de l'unité se décompose en facteurs du premier degré, suivant le module premier q , si e divise $\frac{p-1}{v}$; dans le cas où e ne divise pas $\frac{p-1}{v}$, le premier membre de l'équation aux e périodes admet des facteurs irréductibles de degré supérieur à 1.

Comme on connaît l'équation aux périodes pour e égal à 2, 3 ou 4, ce théorème permet souvent de voir si $\frac{p-1}{v}$ est divisible par l'un de ces trois nombres, c'est-à-dire si q est résidu quadratique, cubique et biquadratique suivant le module premier p .

D'ailleurs si $p - 1$ n'est pas divisible par 3, tout nombre q est résidu cubique mod. p ; et si $p - 1$ n'est pas divisible par 4, tout nombre q résidu quadratique mod. p est aussi résidu biquadratique.

Ainsi, d'après I du n° 1, le nombre premier q est ou n'est pas résidu quadratique mod. p , suivant que la fonction

$$s^2 + s + \frac{1 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} p}{4}$$

est ou n'est pas réductible suivant le mod. q ; ou, si q est différent de 2, suivant que $(-1)^{\frac{p-1}{2}} p$ est ou n'est pas résidu quadratique suivant le mod. q . Ainsi les deux congruences

$$q^{\frac{p-1}{2}} \pm 1 \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{et} \quad (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}} p^{\frac{q-1}{2}} \pm 1 \equiv 0 \pmod{q}$$

ont lieu en même temps, en faisant correspondre les signes supérieurs entre eux, et de même pour les inférieurs. Ce qui se traduit dans le système de notation de Legendre par

$$\left(\frac{q}{p}\right) \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}},$$

et démontre le célèbre théorème auquel ce géomètre a attaché son nom. Cette démonstration a été donnée la première fois par M. Mathieu, dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (année 1867).

La seule fonction irréductible (mod. 2) du second degré est $x^2 + x + 1$; on en déduit facilement que 2 est résidu quadratique pour tous les nombres premiers de la forme $8k \pm 1$, et n'est pas résidu quadratique pour les nombres premiers de la forme $8k \pm 3$.

Si $p \equiv 1 \pmod{3}$, pour que le nombre premier q soit résidu cubique suivant le module p , il faut et il suffit que la fonction $x^3 - 3px - pL$ se réduise suivant le module premier q , supposé différent de 3. Pour $q = 2$, on voit qu'il faut et suffit que L soit pair. L'entier L est déterminé par l'équation $L^2 + 27M^2 = 4p$, avec la condition $L \equiv 1 \pmod{3}$. Si L est pair, M l'est aussi et p est de la forme $l^2 + 27m^2$; donc la condition nécessaire et suffisante pour que 2 soit résidu cubique de p est

$$p = l^2 + 27m^2;$$

lorsque $p - 1$ est divisible par 3.

2 n'est pas résidu quadratique pour les nombres premiers de la forme $4k + 1$, k étant impair; donc 2 ne peut être résidu biquadratique que pour les nombres premiers de la forme $8k + 1$, k pouvant être quelconque. Soient donc $p = 8k + 1$, a le nombre entier déterminé par l'équation $p = a^2 + b^2$, avec la condition $a \equiv -1 \pmod{4}$; en se reportant au n° III du paragraphe précédent, on voit que la condition nécessaire et suffisante pour que 2 soit résidu biquadratique (mod. p) est que le nombre

$$\frac{4k - a - 1}{8},$$

qui est toujours entier, soit pair.

3. Pour qu'un nombre de la forme $a^n - 1$ soit premier, il est nécessaire que a soit égal à 2, et n premier. De ce qui précède on déduit facilement les propositions suivantes.

Si $n = 4q - 1$ est un nombre premier en même temps que $2n + 1$, le nombre $N = 2^n - 1$ est divisible par $2n + 1$.

Si $n = 4q + 1$ est un nombre premier en même temps que $6n + 1$, le nombre $N = 2^n - 1$ est divisible par $6n + 1$, pourvu qu'on puisse satisfaire à l'équation

$$6n + 1 = 4l^2 + 27m^2.$$

Un nombre de la forme $a^b + 1$ ne peut être premier que si b est égal à une puissance de 2. Les nombres premiers diviseurs de $2^{2^n} + 1$ sont de la forme $2^{n+1}m + 1 = p$; et il faut que 2 soit résidu d'une puissance $m^{\text{ième}}$ suivant ce module p . Ainsi 2 n'est pas résidu cubique suivant les deux nombres premiers

$$2^{12}.3 + 1 = 12289, \quad 2^{18}.3 + 1 = 786433,$$

car aucun d'eux n'est de la forme $l^2 + 27m^2$; ces nombres ne divisent par conséquent aucun nombre de la forme $2^{2^n} + 1$.

Caractère biquadratique de 2.

4. Soit un nombre premier impair $p = 2^{2^{\alpha}+1}m + 1$, m n'étant pas divisible par 2. Nous avons vu que, α étant déterminé par l'équation $p = a^2 + b^2$ avec la condition $a \equiv -1 \pmod{4}$, 2 est résidu biquadratique ou non suivant que

$$\frac{2^{2^{\alpha}+1}m - a - 1}{8}$$

est un nombre pair ou impair. Si 2 est résidu biquadratique $\pmod{p}$, on a donc

$$a \equiv 2^{2^{\alpha}+1}m - 1 \pmod{16},$$

d'où

$$b^2 = p - a^2 \equiv -2^{2^{\alpha}+4}m^2 + 2^{2^{\alpha}+4}m \pmod{32};$$

$2^{2^{\alpha}+4}m - 2^{2^{\alpha}+4}m^2$ est divisible par 32, pour $\alpha = 0$ comme pour les valeurs de α supérieures à 0; donc b^2 est divisible par 64.

Si 2 n'est pas résidu biquadratique $\pmod{p}$, on a

$$a \equiv 2^{2^{\alpha}+1}m - 1 + 8 \equiv 2^{2^{\alpha}+1}m + 7 \pmod{16},$$

d'où

$$b^2 = p - a^2 \equiv -2^{2^{\alpha}+4}m^2 - 3.2^{2^{\alpha}+4}m - 16 \pmod{32};$$

on en déduit $b^2 \equiv +16 \pmod{32}$. Donc, dans ce cas, b^2 n'est

pas divisible par une puissance de 2 supérieure à 16. Ainsi 2 est résidu biquadratique pour les nombres premiers de la forme $a^2 + 64b^2$; 2 n'est pas résidu biquadratique pour les nombres premiers de la forme $a^2 + 16b^2$, b étant impair dans la dernière formule. Ce caractère a déjà été donné par Lejeune-Dirichlet (*Journal de Liouville*, 1859); comme on voit, il découle facilement de la méthode précédente.

Sur les courbes planes du sixième degré à neuf points doubles;
par M. HALPHEN.

(Séance du 16 juin 1882) (1).

1. Si l'on assigne à une courbe plane neuf points doubles donnés, on lui impose par là vingt-sept conditions. C'est précisément le nombre des conditions nécessaires pour déterminer une courbe du sixième degré. Il semble donc qu'on puisse trouver une courbe du sixième degré à neuf points doubles donnés. Il n'en est rien. Par les neuf points passe, en effet, une courbe de troisième degré : c'est cette courbe, comptant double, qui constitue l'unique solution, purement illusoire.

Néanmoins, il existe assurément des courbes *propres* du sixième degré, à neuf et même à dix points doubles. Pour de telles courbes, les neuf points ne sont donc pas susceptibles d'être pris arbitrairement. C'est la liaison entre ces points que je me propose de rechercher ici. Je donnerai ensuite la solution de quelques problèmes se rattachant au même sujet, et une généralisation concernant les courbes de degré $3m$, à neuf points multiples d'ordre m .

2. Soit $C = 0$ l'équation d'une courbe du sixième degré, à neuf points doubles. Soit aussi $A = 0$ l'équation d'une courbe du troisième degré, passant en ces mêmes neuf points. Par l'équation

(1) A la fin d'un Mémoire *Sur les réseaux de courbes planes* (t. I de ce *Bulletin*, p. 129), M. Kœhler a signalé ce sujet de recherches, mais en indiquant des résultats tout à fait erronés.

$C + \lambda A^2 = 0$ se trouve représenté un faisceau de courbes du sixième degré, ayant encore les mêmes points doubles. Donc *neuf points doubles d'une courbe du sixième degré sont les points doubles d'une infinité de courbes du sixième degré.*

Ces points comptent, au moins, pour dix-huit intersections des courbes C , A . Or ce nombre dix-huit est précisément le produit des degrés 6 et 3. Par conséquent, la courbe A est unique, sans quoi la courbe C serait décomposable. Ainsi, *par les neuf points doubles d'une courbe propre du sixième degré passe une seule courbe du troisième degré.*

3. Supposons les points de A représentés, à l'ordinaire, par les arguments d'une fonction doublement périodique, un des points d'inflexion ayant l'argument zéro. Soient $u_1, \dots, u_9$ les arguments des neuf points. Ces points, comptés deux fois, constituent l'intersection complète de C et de A . Donc le double de la somme $u_1 + \dots + u_9$ est une période. La somme elle-même ne peut être une période; car alors la courbe A ne serait pas unique. *La somme $u_1 + \dots + u_9$ est donc une des trois demi-périodes.* Telle est la relation entre les neuf points; on peut d'ailleurs lui faire revêtir diverses formes géométriques. Considérons le point de A dont l'argument u'_9 est égal à u_9 diminué de la demi-période: la somme $u_1 + \dots + u_8 + u'_9$ est une période; ceci conduit aux énoncés suivants :

Pour que neuf points $a_1, \dots, a_8, a_9$, appartenant à une seule courbe du troisième degré A , soient les points doubles d'une courbe propre du sixième degré, voici la condition nécessaire et suffisante.

Choisissez huit de ces points $a_1, \dots, a_8$, et prenez le point a'_9 où passent toutes les courbes du troisième degré, menées par les huit premiers;

Les tangentes de la courbe A aux points a_9 et a'_9 doivent se rencontrer sur cette même courbe A .

Ou bien encore : Par a'_9 menez les quatre tangentes à A ; les quatre points de contact donnent lieu à trois couples de cordes conjuguées. Le point a_9 doit être l'intersection de deux cordes conjuguées.

Voici maintenant une autre forme de la relation, où les neuf points figurent symétriquement :

Par les neuf points menez une courbe du quatrième degré; cette dernière rencontre A en trois autres points. Il existe une conique touchant A en ces trois points.

Réciproquement : *par les trois points de contact d'une conique et d'une courbe du troisième degré A, menez une courbe du quatrième degré : les neuf points où cette dernière rencontre, en outre, A, peuvent être pris pour les points doubles d'une courbe du sixième degré.*

Effectivement la somme des arguments des neuf points et celle des arguments des trois points font ensemble une période; si l'une d'elles est une demi-période, il en est de même pour l'autre.

4. Je vais maintenant résoudre ce problème : *Trouver le lieu du neuvième point quand les huit autres sont donnés.*

Quelques mots auparavant sur un autre lieu géométrique beaucoup plus simple : à chaque courbe A d'un faisceau du troisième degré on mène la tangente en l'un des pivots, et l'on prend le point de rencontre z de cette tangente avec A. Le lieu de ce point z est, comme on le verra aisément, une courbe du quatrième degré, ayant pour point triple le point dont il s'agit, et passant en chacun des huit autres.

J'arrive au problème proposé. Pour le résoudre, j'emploie le premier énoncé du n° 3. Les points $a_1, \dots, a_8$ étant donnés, j'envisage le faisceau du troisième degré que ces points déterminent, et le neuvième pivot a'_9 . A chaque courbe A du faisceau, je mène la tangente en a'_9 , rencontrant la courbe en z ; par z je mène une nouvelle tangente à A. Le point de contact de cette tangente est un point du lieu. On aura donc l'équation du lieu en éliminant le paramètre du faisceau entre l'équation de A et celle de la première polaire de z .

Désignons par α_x^3 et α_x^2 les symboles des premiers membres des équations de A et de sa hessienne. Employons la lettre y pour les coordonnées du point a'_9 . Le point z est donné, comme on sait,

par les deux équations

$$\alpha_y^2 \alpha_z = 0, \quad \alpha_y^2 \alpha_x = 0,$$

en sorte que ses coordonnées sont proportionnelles aux trois déterminants

$$\alpha_y^2 \alpha_z^2 (\alpha_1 \alpha_3), \quad \alpha_y^2 \alpha_x^2 (\alpha_3 \alpha_1), \quad \alpha_y^2 \alpha_x^2 (\alpha_1 \alpha_2),$$

L'équation de sa polaire est donc

$$\alpha_y^2 \alpha_x^2 (abx) b_x^2 = 0.$$

Le premier membre est du cinquième degré par rapport aux coefficients de α_x^2 , du second degré par rapport aux coordonnées x . L'élimination du paramètre entre cette équation et celle de A donne donc une équation du degré 17. On voit de plus que le lieu ainsi représenté a pour point sextuple le pivot α'_0 et pour point quintuple chacun des autres pivots. Mais il est manifeste que ce lieu se décompose en deux parties, dont l'une est le lieu de z , comptant double. Donc :

Étant donnés huit points doubles d'une courbe du sixième degré, qui doit avoir un neuvième point double, le lieu de ce dernier est une courbe du neuvième degré, sur laquelle chacun des huit points donnés est triple.

Sur chaque cubique A du faisceau se trouvent trois points du lieu. Quand cette cubique a un point double, deux de ces trois points s'y réunissent. Donc :

Le lieu passe en chacun des douze points doubles des cubiques du faisceau déterminé par les huit points.

Dans le cas particulier où les pivots sont les points d'inflexion des cubiques, le point α_0 est un point sextactique situé sur l'axe harmonique correspondant au point α'_0 . Ainsi : *Quand les huit points sont les points d'inflexion d'une courbe du troisième degré, le lieu se réduit à une ligne droite.*

§. Une courbe C, du sixième degré, ayant neuf points doubles, et A étant la cubique qui passe en ces neuf points, on a les mêmes points doubles pour toute courbe du faisceau

$C + \lambda A^2 = 0$. Dans ce faisceau se trouvent comprises des courbes ayant un point double de plus. Ainsi le lieu précédent est aussi celui du neuvième et du dixième point double des courbes unicursales du sixième degré ayant huit points doubles donnés.

Dans le faisceau $C + \lambda A^2 = 0$ combien y a-t-il de courbes ayant un dixième point double? Pour résoudre cette question, considérons le lieu (c) du point de contact de la tangente menée à chaque courbe du faisceau par un point arbitraire c . L'existence de la courbe double A^2 réduit de trois unités la seconde caractéristique du faisceau; elle est ainsi égale à 7, et la courbe (c) est du huitième degré. Cette courbe (c) passe en chaque pivot du faisceau; elle s'y compose de deux branches dont l'une a pour tangente la droite qui passe en c ; l'autre tangente, au contraire, est indépendante de c ; c'est la conjuguée harmonique de la tangente de A par rapport aux deux tangentes de C . Deux courbes analogues (c) , (c') , relatives à deux points différents c , c' , ont ainsi cinq intersections réunies en chacun des pivots. Elles ont, en outre, en commun les sept points de contact des courbes du faisceau avec la droite cc' ; les autres points, au nombre de $8^2 - 9 \cdot 5 - 7 = 12$ sont les points doubles supplémentaires des courbes du faisceau. Ainsi, parmi les courbes du sixième degré ayant les mêmes neuf points doubles, il y en a douze qui ont un dixième point double.

6. Je me propose de former effectivement l'équation générale des courbes du sixième degré à neuf points doubles. Je me servirai, à cet effet, de la dernière proposition énoncée au n° 3. Je prendrai une cubique A triplement tangente à une conique donnée, et je supposerai les neuf points déterminés par l'intersection de la cubique avec une courbe B , du quatrième degré, passant aux trois points de contact de A et de la conique. Le triangle de ces trois points sera le triangle de référence.

Représentant par $C = 0$ la courbe cherchée, j'envisage la ligne composée $x_1 x_2 x_3 C$. Elle a pour points doubles tous les points d'intersection de A et de B . On aura donc une identité de cette forme

$$x_1 x_2 x_3 C = \alpha B^2 - \beta AB + \gamma A^2.$$

dans laquelle α , β , γ sont des polynômes avec les degrés respectifs

1, 2, 3. Le problème consiste donc uniquement à déterminer trois pareils polynômes, de telle sorte que le second membre soit divisible par x_1, x_2, x_3 . Comme la solution n'offre ainsi aucune difficulté, je donnerai seulement le résultat.

Prenons A sous cette forme

$$A = \alpha_1 x_1^2 (x_2 + x_3) + \alpha_2 x_2^2 (x_3 + x_1) + \alpha_3 x_3^2 (x_1 + x_2) + a x_1 x_2 x_3,$$

de telle sorte que la cubique soit triplement tangente à la conique

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 0.$$

Le polynôme du 4^e degré B a pour forme générale

$$B = x_1 x_3 P + x_2 x_1 Q + x_3 x_2 R,$$

P, Q, R étant du 2^e degré. J'écrirai ces polynômes sous la forme usuelle

$$P = P_{11} x_1^2 + P_{22} x_2^2 + P_{33} x_3^2 + 2 P_{12} x_1 x_2 + 2 P_{23} x_2 x_3 + 2 P_{31} x_3 x_1,$$

et ainsi des deux autres.

Voici maintenant quels sont les polynômes α, β, γ . En raison de la symétrie des notations, je peux abréger et n'écrire qu'un seul terme de chaque type; les autres termes se déduisent par la permutation des indices 1, 2, 3, accompagnée de la permutation correspondante des lettres P, Q, R.

$$\alpha = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3,$$

$$\beta = (Q_{11} + R_{11}) x_1^2 + \left(2 P_{23} + \frac{Q_{33} \alpha_2}{\alpha_3} + \frac{R_{22} \alpha_3}{\alpha_2} \right) x_2 x_3 + \dots$$

$$\gamma = \lambda x_1 x_2 x_3 + \frac{Q_{11} R_{11}}{\alpha_1} x_1^2 + \left(2 \frac{R_{22} P_{23}}{\alpha_2} + \frac{Q_{33} P_{22}}{\alpha_3} \right) x_2^2 x_3 + \dots$$

Les trois polynômes sont entièrement déterminés, sauf le seul terme arbitraire $\lambda x_1 x_2 x_3$ dans γ ; d'où résulte, comme il convient, que l'équation cherchée renferme le terme arbitraire λA^2 .

7. Voici maintenant un cas particulier où le calcul peut être fait tout autrement, et dans lequel s'offre une circonstance intéressante. Suivant la remarque faite dans une autre occasion (1),

(1) Voir *Bulletin de la Société mathématique*, t. IX, p. 105.

les vingt-sept points sextactiques d'une cubique se partagent en trois groupes de neuf points : un même groupe comprend les points de contact de la cubique avec une courbe de troisième classe; la somme des arguments de ces neuf points est une demi-période. Ils peuvent donc être pris pour les points doubles d'une courbe C.

Les neuf points dont il s'agit se déduisent de l'un d'eux $x_1 = x_2 = \rho$, $x_3 = 1$ par le changement de x_1 et x_2 en ωx_1 et $\omega^2 x_2$, ω étant racine cubique de l'unité, et par la permutation des indices. Il en résulte que la courbe C reste inaltérée par ces changements, et que son équation est comprise dans la forme

$$C = a \Sigma x_1^6 + 2b \Sigma x_1^3 x_2^3 + 3c x_1^3 x_2^3 x_3^3 + 6d x_1 x_2 x_3 \Sigma x_1^3 = 0.$$

Il suffit de déterminer les coefficients de telle sorte que cette courbe ait le point double $x_1 = x_2 = \rho$, $x_3 = 1$; elle aura, en même temps, les huit autres. Cette détermination conduit au résultat suivant, où λ est arbitraire :

$$a = 3(1 + \lambda)\rho^4,$$

$$b = -3\rho(\rho^3 + 1),$$

$$c = \lambda(2\rho^6 + 6\rho^3 + 1) + 3(2\rho^3 + 1),$$

$$d = -\lambda\rho(\rho^3 + 1).$$

La circonstance suivante fait l'intérêt de cet exemple. Les courbes du faisceau, douées d'un dixième point double, dégèrent chacune en l'ensemble de trois coniques. On obtient un de ces groupes en supposant $\lambda = -1$, et l'on a alors

$$C = (x_1^2 - \rho x_2 x_3)(x_2^2 - \rho x_3 x_1)(x_3^2 - \rho x_1 x_2).$$

Les trois autres groupes se déduisent de celui-là par le changement du triangle d'inflexions. Il suffit, à cet effet, d'accentuer les lettres x , ρ et de faire successivement les substitutions suivantes, ω désignant toujours une racine cubique de l'unité :

$$\begin{array}{lll} x'_1 = x_3 + \omega x_2 + \omega^2 x_1, & x'_2 = x_3 + \omega^2 x_2 + \omega x_1, & x'_3 = x_3 + x_1 + x_2, \\ x''_1 = \omega x_1 + x_2 + x_3, & x''_2 = x_1 + \omega x_2 + x_3, & x''_3 = x_1 + x_2 + \omega x_3, \\ x'''_1 = \omega^2 x_1 + x_2 + x_3; & x'''_2 = x_1 + \omega^2 x_2 + x_3; & x'''_3 = x_1 + x_2 + \omega^2 x_3; \end{array}$$

$$\rho' = 1 - \rho,$$

$$\rho'' = 1 - \omega^2 \rho,$$

$$\rho''' = 1 - \omega \rho.$$

Dans chaque groupe, les trois coniques se coupent deux à deux en trois points, les neuf points donnés étant laissés de côté. Ces trois points sont les sommets d'un triangle d'inflexions. Les douze points doubles appartenant, d'après le n° 5, aux courbes du faisceau sont ainsi les sommets des quatre triangles d'inflexions.

Ces faits s'expliquent très facilement. Chacun des neuf points considérés a pour argument celui d'un point d'inflexion, augmenté d'une demi-période h , la même pour tous. Soient 1, 2, 3 les points d'inflexion situés sur un des côtés d'un des triangles; 4, 5, 6 sur un autre côté du même triangle, et 7, 8, 9 sur le troisième côté. La somme des arguments des points correspondant à 1, 2, 3, 4, 5, 6, est une période; ces points sont donc sur une conique. De même les points qui correspondent à 4, 5, 6, 7, 8, 9 sont sur une conique, et à 7, 8, 9, 1, 2, 3 sur une troisième conique. Ainsi est composé le groupe de trois coniques correspondant à un triangle d'inflexions.

8. Pour généraliser les résultats qui précèdent, envisageons une courbe C_m , de degré $3m$, avec neuf points multiples d'ordre m . Une pareille courbe peut exister; son genre sera égal à l'unité, car on a

$$\frac{(3m-1)(3m-2)}{2} - 9 \frac{m(m-1)}{2} = 1.$$

En outre, si l'on donne les neuf points, on impose ainsi des conditions au nombre de $9 \frac{m(m+1)}{2}$, juste égal à celui des arbitraires qu'admet une courbe de degré $3m$. Cependant si les points sont quelconques, la courbe n'existe pas. La solution illusoire consiste en une cubique A , comptant m fois.

Pour les mêmes raisons qu'au n° 2, on voit que *les neuf points multiples d'ordre m d'une courbe de degré $3m$ sont les points multiples, de ce même ordre, d'une infinité de pareilles courbes. Il n'y passe qu'une seule courbe du troisième degré.*

Sur la cubique A , passant en ces neuf points, la somme des arguments, répétée m fois, fait une période. La somme est donc elle-même la $\mu^{\text{ième}}$ partie d'une période, μ étant un diviseur de m . Mais, si μ diffère de m , les courbes C_μ , de degré 3μ , ayant ces

points pour multiples d'ordre μ , forment un faisceau, et la courbe C_m dégénère en l'ensemble de $\frac{m}{\mu}$ courbes C_μ . Donc la liaison entre les points consiste en ce que la somme de leurs arguments soit proprement la $m^{\text{ième}}$ partie d'une période.

9. Huit de ces points $a_1, \dots, a_8$ étant donnés, si l'on prend une cubique A du faisceau qu'ils déterminent, on obtient sur cette cubique autant de points a_9 qu'il y a de solutions au problème de la division propre des périodes par le nombre m . Soit m décomposé en facteurs premiers

$$m = p^a q^b r^c \dots,$$

le nombre des solutions est cette fonction arithmétique

$$\psi(m) = m^2 \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \left(1 - \frac{1}{q^2}\right) \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \dots$$

Tel est le nombre des points mobiles où une cubique du faisceau rencontre le lieu du point a_9 . Il est d'ailleurs visible que ce lieu ne passe pas au neuvième pivot a'_9 , l'argument de a_9 devant différer de celui de a'_9 par une fraction de période.

Soit δ l'ordre de multiplicité de chacun des huit pivots sur le lieu de a_9 . Ces huit points donnent, dans la somme des arguments des intersections de ce lieu et d'une cubique A, l'élément $\delta(u_1 + \dots + u_8)$. Soit v l'argument de a'_9 ; et soient aussi $h_1, h_2, \dots$, les $m^{\text{ièmes}}$ parties des périodes. La somme $h_1 + h_2 + \dots$ est une période. Donc les divers points a_9 situés sur A apportent à la somme des arguments l'élément $\psi(m)v$, ou $-\psi(m)(u_1 + \dots + u_8)$. La somme totale devant faire une période, on a $\delta = \psi(m)$.

D'autre part, si d est le degré du lieu, on aura $3d - 8\delta = \psi(m)$. Donc $d = 3\psi(m)$. Ainsi :

Étant donnés huit points multiples d'ordre m d'une courbe de degré $3m$, qui doit avoir un neuvième point multiple d'ordre m , le lieu de ce neuvième point est une courbe du degré $3\psi(m)$, sur laquelle chacun des huit points est multiple d'ordre $\psi(m)$.

Pour une cubique unicursale A, la division des périodes, au lieu d'avoir trait aux fonctions elliptiques, se rapporte aux fonctions

circulaires. Le nombre des solutions est alors cette autre fonction arithmétique

$$\varphi(m) = m \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{q}\right) \left(1 - \frac{1}{r}\right) \dots$$

Les autres solutions se réunissent au point double. Par conséquent : *en chacun des douze points doubles des cubiques du faisceau déterminé par les huit points le lieu précédent a, avec la cubique, des intersections réunies au nombre de $\psi(m) - \varphi(m)$.*

Une étude plus approfondie serait sans doute nécessaire pour examiner, dans chaque cas, la nature de ces points sur ce lieu. Par exemple, pour $m = 3$, on a $\psi(m) - \varphi(m) = 6$. Eu égard aux autres points singuliers, c'en est assez pour conclure qu'en chacun des douze points la courbe a deux branches tangentes aux deux branches de la cubique.

10. Dans le faisceau $C_m + \lambda A^m = 0$ se trouvent des courbes ayant, en outre, un point double. Leur nombre se trouve par une analyse semblable à celle du n° 5. La seconde caractéristique est réduite de $3(m-1)$ unités par l'existence de la courbe multiple A^m . Elle est ainsi

$$v = 2(3m-1) - 3(m-1) = 3m+1.$$

Le lieu (c) des points où les courbes du faisceau sont touchées par les tangentes issues d'un point c est ainsi de degré $3m+2$. En chaque pivot, il a une tangente passant en c , et $(m-1)$ tangentes indépendantes de c . Deux pareilles courbes (c), (c'), ont, de la sorte, en chaque pivot, des intersections réunies au nombre de $m^2 + m - 1$. Le nombre des points doubles est, par conséquent

$$(3m+2)^2 - (3m+1) - 9(m^2 + m - 1) = 12.$$

Ainsi, *parmi les courbes de degré $3m$, ayant les mêmes neuf points multiples d'ordre m , il y en a douze qui ont, en outre, un point double.* Cet énoncé singulier s'applique aussi, comme on voit, au cas $m = 1$.

11. Le lieu du neuvième point, dont le degré est $3\psi(m)$, se

simplifie notablement quand les huit points donnés sont les points d'inflexion d'une cubique. On a déjà vu, au n° 5, qu'il se réduit à une ligne droite pour $m = 2$. Pour $m = 3$, il cesse manifestement d'exister; les courbes C_m n'existent pas non plus. Pour les autres cas, la simplification se trouve aisément au moyen des résultats que j'ai démontrés dans un Mémoire sur les courbes du troisième degré (*Mathematische Annalen*, t. XV, p. 375), et voici le résultat :

Si les huit points sont les points d'inflexion d'une cubique, le degré du lieu du neuvième point se réduit à $\frac{1}{3}\psi(m)$, au lieu de $3\psi(m)$; ce lieu ne passe plus en aucun des points donnés. En outre, si m est divisible par 3, le lieu se décompose en huit courbes distinctes.

Par exemple, pour $m = 9$, le lieu se compose de huit cubiques équiharmoniques dont chacune est inscrite et circonscrite à la fois à trois des triangles d'inflexions (*loc. cit.*, p. 362); pour $m = 6$, il se compose de huit droites; pour $m = 4$, d'une courbe du quatrième degré.

Quelques théorèmes de Géométrie à n dimensions;
par M. V. SCHLEGEL.

(Séance du 7 juillet 1882.)

Introduction. — Parmi les notions de Géométrie susceptibles d'être étendues à n dimensions se trouve aussi celle de la figure complètement limitée. Quant aux figures régulières (polygones et polyèdres), on sait qu'il y a dans l'espace à quatre dimensions six figures de cette espèce, et, en général, qu'il y a trois séries de figures régulières, dont les premiers termes sont : 1° le triangle et le tétraèdre ; 2° le carré et le cube ; 3° le carré et l'octaèdre (¹).

Mais il n'est pas nécessaire de se restreindre aux figures régu-

(¹) STRINGHAM, *Regular figures in n dimensional space* (*Americ. Journal of Math.*, Vol. III, p. 1.)

lières. Dans un Mémoire intitulé : *Théorie des figures composées homogènement*, qui va paraître bientôt dans les *Nova Acta Academiae Leopold. Carol.*, vol. XLIV, j'ai établi la notion des figures limitées homogènement. Je dis qu'une figure à n dimensions est limitée homogènement si : 1° à chaque sommet se rencontrent le même nombre d'arêtes, de plans, de corps, etc. ; 2° suivant chaque arête se rencontrent le même nombre de plans, de corps, etc., etc. En disant, pour abrégé, « homogène » pour « limité homogènement », on voit que tous les polygones plans sont homogènes. On peut démontrer que, dans l'espace à trois dimensions, il n'y a que cinq espèces de polyèdres homogènes, dont les cas spéciaux (les polyèdres réguliers) naissent par la supposition que les figures limitantes soient régulières. Également, il y a six figures homogènes dans l'espace à quatre dimensions et trois dans tout autre espace.

Dans ce qui va suivre, je vais démontrer qu'on peut étendre quelques théorèmes de Géométrie à l'espace à n dimensions. A cet effet, il sera nécessaire d'examiner les trois séries de figures l'une après l'autre.

Quant à la méthode de recherche, il n'y en a qu'une seule qu'on puisse employer, si l'on veut obtenir les résultats géométriques par des calculs simples : c'est la méthode de M. Grassmann. Pour comprendre les recherches suivantes, il suffira de savoir que, si e_1 et e_2 sont deux points d'une droite, chaque point x de la droite peut être représenté par l'équation

$$(x_1 + x_2)x = x_1e_1 + x_2e_2,$$

où x_1 et x_2 sont deux nombres réels, dont la somme peut être posée égale à 1. On tire de cette équation

$$\frac{e_1 - x}{x - e_2} = \frac{x_2}{x_1}.$$

Cette équation dit que le rapport des distances e_1x et xe_2 est égal à $\frac{x_2}{x_1}$. Il faut encore savoir que le « produit extérieur » de deux points A et B est la longueur de la droite entre A et B ; que

$$(AB) = -(BA),$$

d'où il suit que

$$(AA) = 0.$$

(La distance $A - B$ et la *partie linéaire* AB sont deux notions différentes. Deux distances de même longueur $A - B$ et $A_1 - B_1$ sont égales, si elles sont situées sur la même droite ou sur deux parallèles; au contraire, deux parties linéaires AB et $A_1 B_1$ seulement, si elles se trouvent sur la même droite.)

Également on peut dériver un point x , situé dans le plan, de trois points e_1, e_2, e_3 , au moyen des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, par l'équation

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \quad (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1);$$

et ainsi de suite.

I. — FIGURES DE LA PREMIÈRE SÉRIE (').

Triangle. — Soient e_1, e_2, e_3 les sommets d'un triangle. Les centres des arêtes (x_1, x_2, x_3) sont déterminés par les équations

$$(1) \quad x_1 = \frac{e_2 + e_3}{2}, \quad x_2 = \frac{e_3 + e_1}{2}, \quad x_3 = \frac{e_1 + e_2}{2},$$

d'où l'on tire

$$(2) \quad e_1 + e_2 + e_3 = 2x_1 + e_1 = 2x_2 + e_2 = 2x_3 + e_3.$$

- Ces équations disent que les droites $x_1 e_1, x_2 e_2, x_3 e_3$ passent par un point (x) qui est donné par l'équation

$$(3) \quad 3x = e_1 + e_2 + e_3;$$

par conséquent, x est le centre de gravité du triangle.

Si l'on remplace dans l'équation (3) $e_2 + e_3$ par sa valeur $2x_1$, on obtient

$$3x = e_1 + 2x_1$$

et, en retranchant $3e_1$,

$$3(x - e_1) = 2(x_1 - e_1)$$

ou

$$\frac{x - e_1}{x_1 - e_1} = \frac{2}{3},$$

ce qui exprime la propriété connue des transversales.

(') La première figure de cette série est, à proprement parler, la *partie* d'une droite comprise entre deux points, mais elle n'offre pas de qualités remarquables pour notre but.

Tétraèdre. — Soient e_1, e_2, e_3, e_4 les sommets d'un tétraèdre. Alors les centres des arêtes sont

$$x_{rs} = \frac{e_r + e_s}{2}$$

et les centres des faces

$$x_u = \frac{e_r + e_s + e_t}{3} \quad (r, s, t, u = 1, 2, 3, 4).$$

Soient y_1 et y_2 des points quelconques donnés sur les droites $x_1 e_1$ et $x_2 e_2$; on a

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 e_1 + \beta_1 x_1 \quad (\alpha_1 + \beta_1 = 1), \\ y_2 &= \alpha_2 e_2 + \beta_2 x_2 \quad (\alpha_2 + \beta_2 = 1) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 e_1 + \frac{\beta_1}{3} e_2 + \frac{\beta_1}{3} e_3 + \frac{\beta_1}{3} e_4, \\ y_2 &= \frac{\beta_2}{3} e_1 + \alpha_2 e_2 + \frac{\beta_2}{3} e_3 + \frac{\beta_2}{3} e_4. \end{aligned}$$

Pour que les deux points y_1 et y_2 coïncident en un point x , il faut que les coefficients des points $e_1, e_2, \dots$ soient égaux deux à deux, parce qu'un point ne peut être dérivé de quatre autres points que d'une seule manière. On a donc les conditions

$$\alpha_1 = \frac{\beta_2}{3}, \quad \alpha_2 = \frac{\beta_1}{3}, \quad \beta_1 = \beta_2$$

ou

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\beta_1}{3} = \frac{\beta_2}{3}.$$

En ajoutant la condition

$$\alpha_1 + \beta_1 = 1,$$

on obtient

$$\alpha_1 = \frac{1}{4}, \quad \beta_1 = \frac{3}{4},$$

et les valeurs de y_1 et y_2 deviennent

$$x = \frac{e_1 + e_2 + e_3 + e_4}{4};$$

donc les droites $x_1 e_1$ et $x_2 e_2$ passent par le centre de gravité du tétraèdre. En changeant les indices, on voit que les droites $x_3 e_3$ et $x_4 e_4$ ont la même propriété. On a donc le théorème connu :

Les quatre droites qui joignent les sommets d'un tétraèdre

avec les centres de gravité des faces opposées passent par le centre de gravité du tétraèdre.

En remplaçant dans la formule

$$4x = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$$

$e_2 + e_3 + e_4$ par la valeur $3x_1$, on obtient

$$4x = e_1 + 3x_1$$

et, en retranchant $4e_1$ des deux côtés,

$$4(x - e_1) = 3(x_1 - e_1)$$

ou

$$\frac{x - e_1}{x_1 - e_1} = \frac{3}{4},$$

ce qui exprime la propriété connue des transversales du tétraèdre

En remplaçant, d'autre part, $e_1 + e_2$ par $2x_{12}$ et $e_3 + e_4$ par $2x_{34}$, il vient

$$4x = 2x_{12} + 2x_{34}$$

ou

$$x = \frac{x_{12} + x_{34}}{2}.$$

De même

$$x = \frac{x_{13} + x_{24}}{2} = \frac{x_{14} + x_{23}}{2}.$$

On a donc le théorème :

Le centre de gravité d'un tétraèdre est au milieu de la droite qui joint les centres de deux arêtes opposées quelconques.

Pour le triangle $x_{34}e_1e_2$, les résultats obtenus donnent encore le théorème :

Les droites qui joignent deux sommets d'un triangle (e_1, e_2 au milieu de la troisième transversale ($x_{34}x_{12}$) divisent les arêtes ($x_{34}e_1, x_{34}e_2$) dans la proportion 1 : 2, et se divisent entre elles dans la proportion 1 : 3.

La projection d'un tétraèdre sur le plan est un quadrilatère avec ses deux diagonales (il y a deux formes de cette figure, selon qu'un sommet est situé dans le triangle formé par les trois autres

ou non). Les théorèmes énoncés ci-dessus sur le tétraèdre deviennent pour la projection les suivants :

Si l'on joint chaque sommet d'un quadrilatère avec le centre de gravité du triangle formé par les trois autres sommets, ces quatre droites passent par le même point et se divisent entre elles suivant la proportion 1 : 3. Passent aussi par le même point les trois droites qui joignent les milieux de deux arêtes opposées et ceux des diagonales du quadrilatère. Ces droites se divisent en parties égales.

Pentaédroïde. — Nous appelons ainsi (suivant M. Stringham) la figure à quatre dimensions qui est limitée par cinq tétraèdres, dont quatre ont chaque fois un sommet commun.

Soient $e_1, e_2, \dots, e_5$ les sommets de cette figure. Alors les centres des dix arêtes sont

$$x_{rs} = \frac{e_r + e_s}{2},$$

les centres des dix faces

$$x_{rst} = \frac{e_r + e_s + e_t}{3}$$

et les centres des cinq corps limitants

$$x_v = \frac{e_r + e_s + e_t + e_u}{4} \quad (r, s, t, u, v = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Soient y_1 et y_2 des points quelconques donnés sur les droites $x_1 e_1$ et $x_2 e_2$; on a

$$y_1 = \alpha_1 e_1 + \beta_1 x_1 \quad (\alpha_1 + \beta_1 = 1),$$

$$y_2 = \alpha_2 e_2 + \beta_2 x_2 \quad (\alpha_2 + \beta_2 = 1)$$

ou

$$y_1 = \alpha_1 e_1 + \frac{\beta_1}{4} e_2 + \frac{\beta_1}{4} e_3 + \frac{\beta_1}{4} e_4 + \frac{\beta_1}{4} e_5,$$

$$y_2 = \frac{\beta_2}{4} e_1 + \alpha_2 e_2 + \frac{\beta_2}{4} e_3 + \frac{\beta_2}{4} e_4 + \frac{\beta_2}{4} e_5.$$

Pour que les deux points y_1 et y_2 coïncident en un point x , il faut que les coefficients des points $e_1, e_2, \dots$ soient égaux deux à deux (comme ci-dessus). On a donc les conditions

$$\alpha_1 = \frac{\beta_2}{4}, \quad \alpha_2 = \frac{\beta_1}{4}, \quad \beta_1 = \beta_2$$

ou

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\beta_1}{4} = \frac{\beta_2}{4}.$$

En ajoutant la condition

$$\alpha_1 + \beta_1 = 1,$$

on obtient

$$\alpha_1 = \frac{1}{5}, \quad \beta_1 = \frac{4}{5},$$

et les valeurs de y_1 et y_2 deviennent

$$x = \frac{e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5}{5}.$$

Donc les droites $x_1 e_1$ et $x_2 e_2$ passent par un point qu'on peut appeler, par analogie, « centre » du pentaédroïde. En changeant les indices, on voit que les droites $x_3 e_3$, $x_4 e_4$, $x_5 e_5$ ont la même propriété. On a donc le théorème :

Les cinq droites qui joignent les sommets d'un pentaédroïde avec les centres des corps opposés passent par le centre du pentaédroïde.

En remplaçant dans la formule

$$5x = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5$$

$e_2 + e_3 + e_4 + e_5$ par la valeur $4x_1$, on obtient

$$5x = e_1 + 4x_1,$$

et, en retranchant $5e_1$ des deux côtés,

$$5(x - e_1) = 4(x_1 - e_1)$$

ou

$$\frac{x - e_1}{x_1 - e_1} = \frac{4}{5}.$$

Donc : *Les cinq droites ci-dessus mentionnées se divisent entre elles suivant la proportion de 1 : 4.*

En remplaçant, d'autre part, $e_1 + e_2$ par $2x_{12}$ et $e_3 + e_4 + e_5$ par $3x_{345}$, il vient

$$5x = 2x_{12} + 3x_{345}$$

ou

$$5(x - x_{12}) = 3(x_{345} - x_{12}),$$

ou

$$\frac{x - x_{12}}{x_{345} - x_{12}} = \frac{3}{5};$$

c'est-à-dire que : *Les dix droites qui joignent le milieu de chaque arête avec le centre de la face opposée passent par le centre du pentaédroïde et se divisent entre elles suivant la proportion de 2 : 3.*

La projection d'un pentaédroïde dans l'espace est un corps qui affecte deux formes, selon qu'un sommet est situé dans le tétraèdre formé par les quatre autres ou non. On obtient les deux formes en joignant un point (5) situé dans un tétraèdre, ou en dehors, avec les quatre sommets (1, 2, 3, 4). Alors les cinq tétraèdres sont 1234, 1235, 1345, 1245, 2345. On voit aussi facilement qu'aucune des arêtes et des faces du pentaédroïde n'a disparu par la projection.

Les théorèmes énoncés ci-dessus sur le pentaédroïde, appliqués à sa projection, deviennent les suivants :

Si l'on joint un point avec les sommets d'un tétraèdre et chacun de ces cinq points avec le centre du tétraèdre formé par les quatre autres, ces cinq droites passent par le même point et se divisent entre elles dans la proportion de 1 : 4. Passent aussi par le même point les dix droites qui joignent deux à deux les milieux des arêtes avec les centres des faces opposées. Ces droites se divisent dans la proportion de 2 : 3.

Figure à n dimensions. — Sur la figure à n dimensions se trouvent des figures limitantes à 0, 1, 2, ... ($n - 1$) dimensions, c'est-à-dire des sommets, arêtes, faces (triangles), corps (tétraèdres), etc. Alors le nombre des figures limitantes à k dimensions est ⁽¹⁾

$$\frac{(n+1)(n)(n-1)\dots[n-(k-1)]}{1.2.3\dots(k+1)} = (n+1)^{k+1}.$$

⁽¹⁾ Voir STRINGHAM, *loc. cit.*, p. 2. — Pour $k = n - 1$, on obtient $(n+1)^{(n)}$ ou $n+1$.

Par conséquent, il y a

$$\begin{aligned} (n+1) & \text{ sommets,} \\ (n+1)^2 & \text{ arêtes,} \\ (n+1)^3 & \text{ faces, etc.} \end{aligned}$$

Soient $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$ les sommets de la figure. Alors les centres des arêtes sont

$$\frac{e_{r_1} + e_{r_2}}{2},$$

les centres des faces

$$\frac{e_{r_1} + e_{r_2} + e_{r_3}}{3},$$

et, en général, les centres des figures limitantes à k dimensions

$$\frac{e_{r_1} + e_{r_2} + \dots + e_{r_{k+1}}}{k+1} \quad (r=1, 2, 3, \dots, n+1).$$

Chaque figure à k dimensions est située vis-à-vis d'une autre à $(n-k-1)$ dimensions. Le nombre des unes est aussi grand que celui des autres, à cause de l'identité

$$(n+1)^{(k+1)} = (n+1)^{(n-k-1+1)}.$$

Soient

$$x_1^k = \frac{e_2 + e_3 + \dots + e_{k+2}}{k+1}, \quad x_2^k = \frac{e_1 + e_3 + \dots + e_{k+2}}{k+1}$$

les centres de deux figures limitantes à k dimensions,

$$x_1^{n-k-1} = \frac{e_{k+2} + e_{k+3} + \dots + e_{n+1} + e_1}{n-k},$$

$$x_2^{n-k-1} = \frac{e_{k+2} + e_{k+3} + \dots + e_{n+1} + e_2}{n-k}$$

les centres des figures situées vis-à-vis des premières.

En outre,

$$y_1 = \alpha_1 x_1^k + \beta_1 x_1^{n-k-1} \quad (\alpha_1 + \beta_1 = 1),$$

$$y_2 = \alpha_2 x_2^k + \beta_2 x_2^{n-k-1} \quad (\alpha_2 + \beta_2 = 1)$$

deux points quelconques donnés sur les droites $x_1^k x_1^{n-k-1}$ et $x_2^k x_2^{n-k-1}$. En remplaçant les points x par leurs valeurs, on ob-

tiendra

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{\beta_1 e_1}{n-k} + \frac{\alpha_1 e_2}{k+1} + \frac{\alpha_1 e_3}{k+1} + \dots + \frac{\alpha_1 e_{k+1}}{k+1} \\ &\quad + \frac{\beta_1 e_{k+3}}{n-k} + \frac{\beta_1 e_{k+4}}{n-k} + \dots + \frac{\beta_1 e_{n+1}}{n-k}, \\ y_2 &= \frac{\alpha_2 e_1}{k+1} + \frac{\beta_2 e_2}{n-k} + \frac{\alpha_2 e_3}{k+1} + \dots + \frac{\alpha_2 e_{k+1}}{k+1} \\ &\quad + \frac{\beta_2 e_{k+3}}{n-k} + \frac{\beta_2 e_{k+4}}{n-k} + \dots + \frac{\beta_2 e_{n+1}}{n-k}. \end{aligned}$$

Pour que les deux points y_1 et y_2 coïncident en un point x , il faut avoir

$$\frac{\beta_1}{n-k} = \frac{\alpha_2}{k+1}, \quad \frac{\alpha_1}{k+1} = \frac{\beta_2}{n-k}, \quad \alpha_1 = \alpha_2,$$

et, par conséquent,

$$\beta_1 = \beta_2,$$

ce qu'on peut écrire ainsi :

$$\frac{\alpha_1}{k+1} = \frac{\alpha_2}{k+1} = \frac{\beta_1}{n-k} = \frac{\beta_2}{n-k}.$$

En ajoutant la condition

$$\alpha_1 + \beta_1 = 1,$$

on obtient

$$\alpha_1 = \frac{k+1}{n+1}, \quad \beta_1 = \frac{n-k}{n+1},$$

et les valeurs de y_1 et y_2 deviennent

$$x = \frac{e_1 + e_2 + \dots + e_{n+1}}{n+1},$$

ce qui est le centre de la figure donnée à n dimensions.

On a donc le théorème général :

Dans une figure de la première série et à n dimensions, les $(n+1)^{(k+1)}$ droites, qui joignent les centres de toutes les figures limitantes à k dimensions avec les centres des figures opposées à $(n-k-1)$ dimensions, passent par le centre de la figure donnée et se divisent entre elles suivant la proportion de $(k+1) : (n-k)$.

Ce théorème ne change pas si les $n+1$ sommets de la figure

donnée sont situés dans une étendue à moindre nombre de dimensions. On a, en particulier, si les points sont situés dans l'espace ou dans un plan :

1^o Pour $k = 0$:

Étant donnés $n + 1$ points, les droites qui joignent chacun d'eux avec le centre de gravité des n autres passent par le centre de gravité des $(n + 1)$ points et se divisent entre elles suivant la proportion de $1 : n$.

2^o Pour $k = 1$:

Si l'on joint les $(n + 1)$ points donnés deux à deux par des droites, et le point milieu de chaque droite avec le centre de gravité des $(n - 1)$ autres points, ces dernières $(n + 1)$ ⁽²¹⁾ droites passent par le centre de gravité des $(n + 1)$ points donnés et se divisent entre elles suivant la proportion de $2 : (n - 1)$, etc.

Il est enfin aisé de voir qu'il y a encore d'autres propriétés du triangle, susceptibles d'être étendues à la figure à n dimensions. Mais il arrive quelquefois que ce n'est pas la figure générale qui a la propriété dont il s'agit, mais une forme spéciale. Nous verrons la même chose dans ce qui suit.

II. — FIGURES DE LA DEUXIÈME SÉRIE.

Nous nous proposons maintenant d'étendre les propriétés du quadrilatère complet aux autres figures de cette série ; mais il faudra auparavant rechercher la figure analogue située sur la droite. C'est, comme dans le premier cas, la partie comprise entre deux points (e_1, e_2), complétée par deux points harmoniques.

Points harmoniques. — Si deux points x_1 et x_2 sont harmoniques par rapport à e_1 et e_2 , on a

$$(x_1 + x_2) x_1 = x_1 e_1 + x_2 e_2,$$

$$(x_1 - x_2) x_2 = x_1 e_1 - x_2 e_2;$$

car il suit de ces équations

$$x_1(x_1 - e_1) = x_2(e_2 - x_1),$$

$$x_1(x_2 - e_1) = x_2(x_2 - e_2)$$

ou

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{x_1 - e_1}{e_2 - x_1} = \frac{x_2 - e_1}{x_3 - e_1},$$

ce qui est la relation connue entre les points harmoniques. En outre, on voit que, x_1 étant choisi à volonté, x_2 est complètement déterminé à l'aide des nombres α_1 et α_2 .

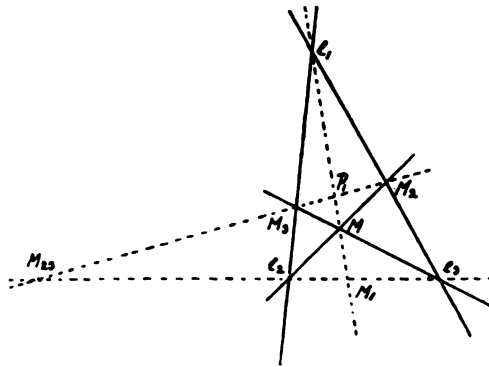
Avec les points A, B, C, on peut former les couples (A, B), (B, C), (C, A). Alors on peut déterminer trois points C_1 , A_1 , B_1 , de façon que les couples

$$(A, B), (C, C_1), (B, C), (A, A_1), (C, A), (B, B_1)$$

soient harmoniques. On peut facilement établir les équations qui expriment ce fait connu.

Quadrilatère complet (fig. 1). — Soit donné (fig. 1) un

Fig. 1.



point M dans le plan d'un triangle $e_1 e_2 e_3$ par l'équation

$$(1) \quad M = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \quad (1).$$

Alors les points d'intersection des droites Me_1 , Me_2 , Me_3 avec les arêtes du triangle sont :

$$(2) \quad \begin{cases} M_1 = M - \alpha_1 e_1 = \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \\ M_2 = M - \alpha_2 e_2 = \alpha_3 e_3 + \alpha_1 e_1, \\ M_3 = M - \alpha_3 e_3 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2. \end{cases}$$

(1) Nous omettons, pour abréger, le facteur numérique à gauche, qui est toujours égal à la somme des facteurs à droite.

On a maintenant trois quadrilatères, $MM_2e_1M_3$, $MM_3e_2M_1$, $MM_1e_3M_2$, dont les troisièmes diagonales sont respectivement e_2e_3 , e_3e_1 , e_1e_2 .

Nous nous bornerons à étudier la première de ces figures, $MM_2e_1M_3$. Les diagonales sont M_2M_3 , Me_1 , e_2e_3 . Les points d'intersection de ces droites sont donnés par les équations

$$(3) \quad \begin{cases} P_1 = M_2 + M_3 = M + \alpha_1 e_1, \\ M_1 = \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = M - \alpha_1 e_1, \\ M_{23} = M_2 - M_3 = \alpha_3 e_3 - \alpha_2 e_2. \end{cases}$$

On voit par ces équations que les couples

$$(P_1 M_1, Me_1), (M_1 M_{23}, e_2 e_3), (M_{23} P_1, M_2 M_3)$$

sont harmoniques.

En permutant les indices circulairement, on obtient les mêmes résultats pour les deux autres quadrilatères.

Comme

$$M_{12} + M_{23} + M_{31} = (M_1 - M_2) + (M_2 - M_3) + (M_3 - M_1) = 0,$$

on voit que les points M_{12} , M_{23} , M_{31} sont situés sur la même droite.

Les centres des diagonales M_2M_3 et Me_1 (multipliés par 2) sont

$$(a) \quad (M_2 + M_3) = \frac{\alpha_3 e_3 + \alpha_1 e_1}{\alpha_3 + \alpha_1} + \frac{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2}{\alpha_1 + \alpha_2},$$

$$(b) \quad (e_1 + M) = (1 + \alpha_1)e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3.$$

On tire de (a)

$$(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_3)(M_2 + M_3) = \alpha_1[\alpha_3 e_3 + \alpha_2 e_2 + (1 + \alpha_1)e_1] + \alpha_2 \alpha_3 (e_2 + e_3),$$

ou, à l'aide de (b),

$$(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_3)(M_2 + M_3) = \alpha_1(e_1 + M) + \alpha_2 \alpha_3 (e_2 + e_3).$$

Cette équation dit qu'il existe une relation numérique entre les centres $[\frac{1}{2}(M_2 + M_3)$, $\frac{1}{2}(e_1 + M)$, $\frac{1}{2}(e_2 + e_3)$] des diagonales du quadrilatère complet, ou que ces centres sont situés sur la même droite.

Tous ces résultats sont bien connus, mais il fallait les démontrer ici, eu égard à l'analogie des figures à plus de deux dimen-

sions et pour mieux préparer le lecteur aux calculs dont nous allons faire usage.

Ainsi nous allons démontrer l'analogie entre le quadrilatère complet et la figure de quatre points harmoniques sur une droite :

1° Si l'on multiplie extérieurement les équations des points harmoniques

$$\begin{aligned}(\alpha_1 + \alpha_2) x_1 &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \\ (\alpha_1 - \alpha_2) x_2 &= \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2\end{aligned}$$

par e_1 et par e_2 , on obtient (comme $e_1 e_1 = e_2 e_2 = 0$)

$$\begin{aligned}(\alpha_1 + \alpha_2)(x_1 e_1) &= \alpha_2(e_2 e_1), & (\alpha_1 + \alpha_2)(e_2 x_1) &= \alpha_1(e_2 e_1), \\ (\alpha_1 - \alpha_2)(x_2 e_1) &= -\alpha_2(e_2 e_1), & (\alpha_1 - \alpha_2)(x_2 e_2) &= \alpha_1(e_1 e_2). \\ &= \alpha_2(e_1 e_2).\end{aligned}$$

Donc, par division,

$$\frac{(x_1 e_1)}{(e_2 x_1)} = \frac{(x_2 e_1)}{(x_2 e_2)}.$$

En remplaçant $(e_2 x_1)$ par $-(x_1 e_2)$, on peut donner à cette équation la forme

$$\frac{(x_1 e_1)}{(x_1 e_2)} \frac{(x_2 e_2)}{(x_2 e_1)} = -1.$$

Multiplions alors extérieurement les équations du quadrilatère complet $MM_2e_1M_3$,

$$(2) \quad \begin{cases} M_1 = \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 & \text{par } (e_1 e_2) \text{ et } (e_3 e_1), \\ M_2 = \alpha_3 e_3 + \alpha_1 e_1 & \text{par } (e_2 e_3) \text{ et } (e_1 e_2), \\ M_3 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 & \text{par } (e_3 e_1) \text{ et } (e_2 e_3). \end{cases}$$

En ajoutant à gauche les facteurs omis, nous obtiendrons

$$(3) \quad \begin{cases} (M_1 e_1 e_2) = \alpha_3(e_3 e_1 e_2), & (M_1 e_3 e_1) = \alpha_2(e_2 e_3 e_1), \\ (M_2 e_2 e_3) = \alpha_1(e_1 e_2 e_3), & (M_2 e_1 e_2) = \alpha_3(e_3 e_1 e_2), \\ (M_3 e_3 e_1) = \alpha_2(e_2 e_3 e_1), & (M_3 e_2 e_3) = \alpha_1(e_1 e_2 e_3). \end{cases}$$

Or on a

$$(e_1 e_2 e_3) = (e_2 e_3 e_1) = (e_3 e_1 e_2),$$

parce qu'un produit extérieur reste invariable par deux permutations de facteurs voisins.

Donc, par division,

$$(3a) \quad \frac{(M_1 e_1 e_2)}{(M_1 e_3 e_1)} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2}, \quad \frac{(M_3 e_3 e_1)}{(M_3 e_2 e_3)} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad \frac{(M_2 e_2 e_3)}{(M_2 e_1 e_2)} = \frac{\alpha_1}{\alpha_3},$$

par conséquent

$$(4) \quad \frac{(M_1 e_1 e_2)}{(M_1 e_3 e_1)} \frac{(M_3 e_3 e_1)}{(M_3 e_2 e_3)} \frac{(M_2 e_2 e_3)}{(M_2 e_1 e_2)} = +1.$$

Comme un produit extérieur de trois points A, B, C représente la double aire du triangle ABC, on voit que la dernière équation établit, entre les triangles du quadrilatère complet, une relation tout à fait analogue à celle qui existe entre les distances des points harmoniques.

Au surplus, on peut vérifier le dernier résultat par une simple réflexion géométrique. On a évidemment

$$\frac{(M_1 e_1 e_2)}{(M_1 e_3 e_1)} = \frac{(M_1 e_2)}{(e_2 M_1)} = \frac{z_1}{z_2},$$

et de même les deux autres équations (3^a).

A cause de la relation (4), on peut dire que le groupe des points M_1, M_2, M_3 est harmonique par rapport à e_1, e_2, e_3 , d'où résulte le théorème :

Il y a dans le plan un nombre infini de groupes de trois points, qui sont harmoniques par rapport à un groupe donné. Avec ce groupe (e_1, e_2, e_3) , chaque quatrième point (M) détermine trois autres points (M_1, M_2, M_3) harmoniques par rapport à (e_1, e_2, e_3) .

2° Si l'on résout les équations des points harmoniques

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \alpha_2) x_1 &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \\ (\alpha_1 - \alpha_2) x_2 &= \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2, \end{aligned}$$

par rapport à e_1 et e_2 , en posant

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2\beta_1, \quad \alpha_1 - \alpha_2 = 2\beta_2,$$

on aura

$$\begin{aligned} (\beta_1 + \beta_2) e_1 &= \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2, \\ (\beta_1 - \beta_2) e_2 &= \beta_1 x_1 - \beta_2 x_2, \end{aligned}$$

ce qui exprime ce théorème connu :

Si le couple x_1, x_2 est harmonique par rapport à (e_1, e_2) , (e_1, e_2) est aussi harmonique par rapport à x_1, x_2 .

De même, en regardant les équations du quadrilatère complet

$$M = \alpha_1 e_1 + (\alpha_2 + \alpha_3) M_1,$$

$$M = \alpha_2 e_2 + (\alpha_3 + \alpha_1) M_2,$$

$$M = \alpha_3 e_3 + (\alpha_1 + \alpha_2) M_3,$$

on voit que les groupes (e_1, e_2, e_3) , (M_1, M_2, M_3) dépendent l'un de l'autre par des équations analogues. Par conséquent, on peut dire :

Si le groupe (M_1, M_2, M_3) est harmonique par rapport à (e_1, e_2, e_3) , (e_1, e_2, e_3) est aussi harmonique par rapport à (M_1, M_2, M_3) .

Néanmoins, il faut remarquer que la réciprocité entre les groupes (M_1, M_2, M_3) et (e_1, e_2, e_3) n'est pas aussi complète que celle entre les couples harmoniques (x_1, x_2) et (e_1, e_2) .

On voit, par exemple, que deux points e sont en ligne droite avec un point M , mais non *vice versa*. Il fallait s'attendre à cette circonstance, parce qu'il y a réciprocité sur la droite entre deux points, sur le plan entre un point et une droite; par conséquent, il faut que la relation réciproque à celle de points soit une relation de droites. En effet, soit

$$\begin{aligned} (e_1 e_2) &= \varepsilon_3, & (e_2 e_3) &= \varepsilon_1, & (e_3 e_1) &= \varepsilon_2, \\ (M_1 M_2) &= \mu_3, & (M_2 M_3) &= \mu_1, & (M_3 M_1) &= \mu_2; \end{aligned}$$

alors on voit que deux droites μ passent par le même point avec une droite ε , ce qui est la relation réciproque à la susdite.

Donc on appellera exactement harmoniques entre eux les couples (e_1, e_2, e_3) , (μ_1, μ_2, μ_3) et (M_1, M_2, M_3) , $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

3° Si l'on pose

$$\alpha_3 = 0$$

dans les équations du quadrilatère complet (1), (2), (3), on voit d'abord que le point e_3 est à l'infini; puis on aura

$$M = M_3, \quad M_2 = e_1, \quad M_1 = e_2,$$

et les équations restantes sont

$$\alpha_2 e_2 = M_3 - \alpha_1 e_1,$$

$$P_1 = M_3 + \alpha_1 e_1,$$

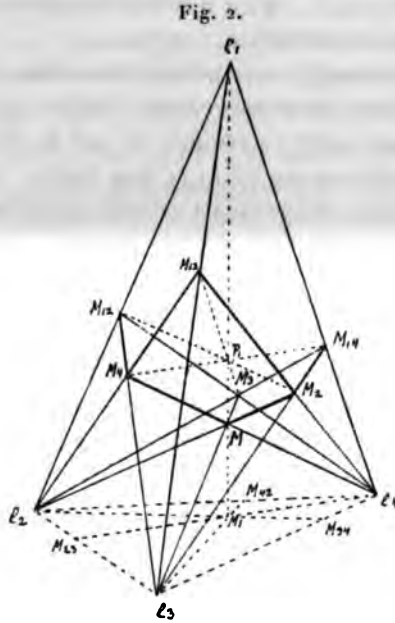
c'est-à-dire que les neuf points du quadrilatère complet se sont

transformés en quatre points harmoniques. Donc la dernière figure est un cas particulier de la précédente, et l'on a le théorème :

Soient donnés deux groupes de trois points harmoniques $(M_1, M_2, M_3), (e_1, e_2, e_3)$. Si un point (e_3) est supposé à l'infini, les autres points coïncident en trois points (e_1, M_3, e_2) d'une droite, et la figure du quadrilatère complet, dont P_1 est le point d'intersection des diagonales $M_2 M_3$ et $M_1 e_1$, se transforme en la figure des couples harmoniques $(M_3, e_1), (e_2, P_1)$.

Hexaèdre complet (fig. 2). — Soit donné un point M dans un tétraèdre $e_1 e_2 e_3 e_4$ par l'équation

$$(1) \quad M = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4.$$



Alors les points d'intersection des droites Me_1, Me_2, Me_3, Me_4 avec les faces du tétraèdre sont

$$(2) \quad \begin{cases} M_1 = M - \alpha_1 e_1 = \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4, \\ M_2 = M - \alpha_2 e_2 = \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_1 e_1, \\ M_3 = M - \alpha_3 e_3 = \alpha_4 e_4 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \\ M_4 = M - \alpha_4 e_4 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3. \end{cases}$$

Soit rst une permutation quelconque des nombres 2, 3, 4. Alors les six droites $e_r M_s$ coupent les arêtes $e_i e_j$ suivant les trois points $M_{i,j}$; car on a

$$(3) \quad \begin{cases} M_{12} = M_3 - \alpha_1 e_4 = M_4 - \alpha_2 e_3 = M - \alpha_3 e_3 - \alpha_4 e_4 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \\ M_{13} = M_4 - \alpha_2 e_3 = M_2 - \alpha_1 e_4 = M - \alpha_4 e_4 - \alpha_2 e_3 = \alpha_1 e_1 + \alpha_3 e_2, \\ M_{14} = M_3 - \alpha_3 e_3 = M_2 - \alpha_2 e_4 = M - \alpha_2 e_3 - \alpha_3 e_4 = \alpha_1 e_1 + \alpha_4 e_2. \end{cases}$$

Or les droites $e_i M$, $M_{12} M_2$, $M_{13} M_3$, $M_{14} M_4$ sont les axes diagonaux d'un hexaèdre qui est une partie du tétraèdre donné. Il y a encore trois autres hexaèdres qui en dérivent. Pour les obtenir, il faut changer trois fois circulairement les indices des axes du premier. En étudiant le premier hexaèdre, nous verrons immédiatement que ces corps, contrairement à ce qu'il fallait attendre, ne représentent pas le cas général d'un hexaèdre.

D'après les équations (2) et (3), les droites MM_2 , $e_i M_{12}$, $M_1 M_{13}$, $M_3 M_{14}$ passent par le point e_2 ; car on a

$$\begin{aligned} M_2 &= M - \alpha_2 e_3, & M_{12} &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \\ M_{13} &= M_4 - \alpha_2 e_3, & M_{14} &= M_3 - \alpha_2 e_4, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\alpha_2 e_2 = M - M_2 = M_{12} - \alpha_1 e_1 = M_4 - M_{13} = M_3 - M_{14}.$$

De même

$$\begin{aligned} \alpha_3 e_3 &= M - M_3 = M_{13} - \alpha_1 e_1 = M_2 - M_{14} = M_4 - M_{12}, \\ \alpha_4 e_4 &= M - M_4 = M_{14} - \alpha_1 e_1 = M_3 - M_{13} = M_2 - M_{12}. \end{aligned}$$

Or la troisième série est une conséquence des deux précédentes, ce qu'on voit en regardant les équations

$$M - M_2 = M_4 - M_{13}, \quad M - M_3 = M_4 - M_{12}, \quad M_{12} - \alpha_1 e_1 = M_2 M_{14}.$$

On a donc ce théorème :

Soient aa' , bb' , cc' six plans formant un hexaèdre, deux à deux opposés. Si les quatre plans bb' , cc' passent par le même point (e_2) et les plans aa' , cc' par le même point (e_3), les plans aa' , bb' passent aussi par le même point (e_4).

En d'autres termes : *Si les sommets d'un hexaèdre sont situés deux à deux sur les droites de deux faisceaux de quatre rayons, il existe encore un troisième faisceau qui a la même propriété.*

En outre, il suit des équations (1), (2), (3), si nous posons

$$P_1 = 2x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4,$$

$$(4) \quad P_1 = M + x_1e_1 = M_2 + M_{12} = M_3 + M_{13} = M_4 + M_{14},$$

c'est-à-dire que *les axes de cet hexaèdre passent par le même point* (P_1).

Si nous posons, en particulier,

$$(a) \quad x_1 = 1, \text{ d'où } x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

l'axe Me_1 est divisé en parties égales par le point P_1 . De même, l'axe M_2M_{12} si

$$(b) \quad x_2 = x_3 + x_4$$

(car, en ce cas, les coefficients des points M_2 et M_{12} sont égaux entre eux). Des deux conditions (a) et (b), il suit

$$(c) \quad x_2 = x_3 + x_4 = 0,$$

c'est-à-dire que le point e_2 est à l'infini.

L'axe M_3M_{13} est divisé de même si

$$(d) \quad x_3 = x_2 + x_4,$$

On tire de (c) et (d)

$$x_3 = x_4 = 0,$$

c'est-à-dire que, dans ce cas, e_3 et e_4 sont aussi à l'infini, et l'axe M_4M_{14} est divisé comme les autres. On a donc ce théorème :

Si les axes d'un hexaèdre passent par le même point et si trois axes se divisent entre eux en parties égales, il en est de même du quatrième, et l'hexaèdre est un parallélépipède.

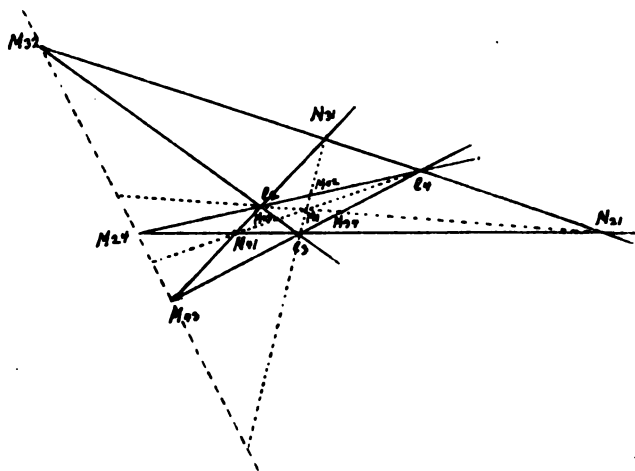
Jusqu'à présent, nous n'avons parlé que du *simple* hexaèdre. Les six faces de ce corps, étendues jusqu'à leurs points d'intersection (e_2, e_3, e_4), forment un *hexaèdre complet*, dont chaque face est un quadrilatère complet. Les troisièmes diagonales de ces six quadrilatères, deux à deux coïncidentes, sont les droites e_2e_3, e_3e_4, e_4e_2 . Nous appellerons les points e_2, e_3, e_4 *sommets secondaires*, les droites e_2e_3, e_3e_4, e_4e_2 *axes secondaires*, le plan $e_2e_3e_4$ *plan diagonal secondaire* (7°) de l'hexaèdre complet.

Si l'on construit les diagonales principales des faces de l'hexaèdre.

chaque plan diagonal principal est aussi un quadrilatère complet avec ses trois diagonales.

Les diagonales principales des six faces rencontrent les trois

Fig. 3.



sièmes diagonales, suivant les points (fig. 3)

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & \begin{cases} M_{31} = M_2 - \alpha_1 e_1 = M - M_{12} = \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4, \\ M_{42} = M_3 - \alpha_1 e_1 = M - M_{13} = \alpha_4 e_4 + \alpha_2 e_2, \\ M_{23} = M_4 - \alpha_1 e_1 = M - M_{14} = \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \end{cases} \\
 (6) \quad & \begin{cases} M_{43} = M_{14} - M_{13} = M_3 - M_4 = \alpha_4 e_4 - \alpha_3 e_3, \\ M_{24} = M_{12} - M_{14} = M_4 - M_2 = \alpha_2 e_2 - \alpha_4 e_4, \\ M_{32} = M_{13} - M_{12} = M_2 - M_3 = \alpha_3 e_3 - \alpha_2 e_2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Comme

$$M_{43} + M_{24} + M_{32} = 0,$$

il en résulte que ces trois points sont situés sur la même droite.

On a, en outre,

$$(6^a) \quad \begin{cases} -M_{32} = M_{24} + M_{43}, \\ M_1 - 3\alpha_4 e_4 = M_{24} - M_{43}, \end{cases}$$

et deux autres couples d'équations par le changement des indices 2, 3, 4, d'où résulte que les droites $M_1 e_2$, $M_1 e_3$, $M_1 e_4$ rencontrent la droite des points M_{43} , M_{24} , M_{32} , suivant les quatrièmes points harmoniques conjugués à M_{13} , M_{24} , M_{32} .

Posons

$$(7) \quad \begin{cases} N_{21} = \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 - \alpha_2 e_2 = M_{32} + \alpha_4 e_4 = \alpha_3 e_3 - M_{24}, \\ N_{31} = \alpha_4 e_4 + \alpha_2 e_2 - \alpha_3 e_3 = M_{43} + \alpha_2 e_2 = \alpha_4 e_4 - M_{32}, \\ N_{41} = \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 - \alpha_4 e_4 = M_{24} + \alpha_3 e_3 = \alpha_2 e_2 - M_{43}. \end{cases}$$

On voit, par ces équations, que les droites $M_{43}e_2$, $M_{24}e_3$, $M_{32}e_4$ forment un triangle dont les sommets sont les points N_{21} , N_{31} , N_{41} , et qu'il y a les couples harmoniques

$$(M_{43}e_2, N_{31}N_{41}), \quad (M_{24}e_3, N_{41}N_{21}), \quad (M_{32}e_4, N_{21}N_{31}).$$

Le triangle $N_{21}N_{31}N_{41}$ est circonscrit à $e_2e_3e_4$; le triangle $M_{23}M_{34}M_{42}$ est inscrit; d'où résultent des quadrilatères trois fois complets.

Les trois plans diagonaux passant par le sommet e_1 rencontrent le plan diagonal secondaire suivant les droites e_2M_{34} , e_3M_{42} , e_4M_{23} ; les trois autres plans diagonaux rencontrent le même plan suivant les droites e_2M_{43} , e_3M_{24} , e_4M_{32} (¹).

Nous avons remarqué qu'il y a des points harmoniques sur toutes les arêtes et diagonales du quadrilatère complet. De même il y a des quadrilatères complets sur toutes les faces et plans diagonaux de l'hexaèdre complet. Le septième plan diagonal (secon-

(¹) Pour démontrer ces propositions, posons

$$(e_1e_2e_3e_4) = 1.$$

Alors (1) un des plans passant par e_1 est

$$(e_1e_2M_1) = \alpha_3(e_1e_2e_3) + \alpha_4(e_1e_2e_4),$$

et le plan diagonal secondaire est

$$(e_2e_3e_4).$$

Multipliant ces deux expressions et omettant le facteur

$$(e_1e_2e_3e_4),$$

on obtient

$$\alpha_3(e_2e_3) + \alpha_4(e_2e_4).$$

ce qui est égal à

$$(e_2M_1).$$

Donc cette ligne est la ligne d'intersection des deux plans. (2) Un des autres plans est

$$(M_{12}M_{13}e_4) = \alpha_1\alpha_3(e_1e_3e_4) + \alpha_2\alpha_1e_2e_3e_4 + \alpha_2\alpha_3e_2e_3e_4.$$

En opérant comme ci-dessus on obtient

$$\alpha_1\alpha_3(e_3e_4) - \alpha_2\alpha_1(e_2e_4) = \alpha_1e_4M_{12},$$

ce qu'il fallait démontrer.

daire) correspond à la troisième diagonale. Pour compléter cette analogie, nous répétons les réflexions faites sur le quadrilatère :

1° Si l'on multiplie extérieurement les équations de l'hexaèdre complet

$$\begin{aligned} (1) \quad & M_1 = x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 \quad \text{par } (e_1 e_2 e_3) \text{ et } (e_4 e_1 e_2), \\ (2) \quad & \begin{cases} M_2 = x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_1 e_1 & \text{par } (e_2 e_3 e_4) \text{ et } (e_1 e_2 e_3), \\ M_3 = x_4 e_4 + x_1 e_1 + x_2 e_2 & \text{par } (e_3 e_4 e_1) \text{ et } (e_2 e_3 e_4), \\ M_4 = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 & \text{par } (e_4 e_1 e_2) \text{ et } (e_3 e_4 e_1), \end{cases} \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} (M_1 e_1 e_2 e_3) &= x_4 (e_4 e_1 e_2 e_3), & (M_1 e_4 e_1 e_2) &= x_3 (e_3 e_4 e_1 e_2), \\ (M_2 e_2 e_3 e_4) &= x_1 (e_1 e_2 e_3 e_4), & (M_2 e_1 e_2 e_3) &= x_4 (e_4 e_1 e_2 e_3), \\ (M_3 e_3 e_4 e_1) &= x_2 (e_2 e_3 e_4 e_1), & (M_3 e_2 e_3 e_4) &= x_1 (e_1 e_2 e_3 e_4), \\ (M_4 e_4 e_1 e_2) &= x_3 (e_3 e_4 e_1 e_2), & (M_4 e_3 e_4 e_1) &= x_2 (e_2 e_3 e_4 e_1). \end{aligned}$$

et, par les mêmes opérations que plus haut, il vient

$$(8) \quad \frac{(M_1 e_1 e_2 e_3) (M_4 e_4 e_1 e_2) (M_3 e_3 e_4 e_1) (M_2 e_2 e_3 e_4)}{(M_1 e_4 e_1 e_2) (M_4 e_3 e_4 e_1) (M_3 e_2 e_3 e_4) (M_2 e_1 e_2 e_3)} = 1.$$

Comme un produit extérieur de quatre points A, B, C, D représente le triple volume du tétraèdre ABCD, on voit que la dernière équation établit entre les tétraèdres de l'hexaèdre complet une relation analogue aux précédentes. On peut aussi, d'une façon analogue, vérifier cette relation par des considérations géométriques.

A cause de la relation (8), on dira que le groupe des points M_1, M_2, M_3, M_4 est harmonique par rapport à e_1, e_2, e_3, e_4 ; alors on a ce théorème :

Il y a dans l'espace un nombre infini de groupes de quatre points, qui sont harmoniques par rapport à un groupe donné. Avec ce groupe (e_1, e_2, e_3, e_4) , chaque cinquième point (M) détermine quatre autres points (M_1, M_2, M_3, M_4) harmoniques par rapport à (e_1, e_2, e_3, e_4) .

2° Des équations (2), il résulte que les groupes (e_1, e_2, e_3, e_4) , (M_1, M_2, M_3, M_4) dépendent l'un de l'autre par des équations analogues. Par conséquent, on peut dire :

Si le groupe (M_1, M_2, M_3, M_4) est harmonique par rapport à (e_1, e_2, e_3, e_4) , (e_1, e_2, e_3, e_4) est aussi harmonique par rapport à (M_1, M_2, M_3, M_4) .

Si nous posons

$$(e_r e_s e_t) = \varepsilon_{rst}, \quad (M_r M_s M_t) = \mu_{rst},$$

$rstu$ étant une permutation quelconque des nombres 1, 2, 3, 4, il y a une complète réciprocité : 1° entre les points e et les plans μ ; 2° entre les points M et les plans ε .

3° Si l'on pose

$$\alpha_i = 0$$

dans les équations de l'hexaèdre complet (1), (2), (3), (4), (5), le point e_i est à l'infini ; on aura ensuite

$$\begin{aligned} M &= M_4, \\ M_2 &= M_{13}, \quad M_{12} = e_2, \\ M_3 &= M_{12}, \quad M_{34} = e_3, \\ M_1 &= M_{23}, \quad M_{14} = e_1, \end{aligned}$$

et les équations restantes sont

$$\begin{aligned} M_4 &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, & M_{23} &= \alpha_1 e_2 + \alpha_3 e_3, \\ P_1 &= M_4 + \alpha_1 e_1, & M_{13} &= \alpha_3 e_3 + \alpha_1 e_1, \\ & & M_{12} &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que les seize points de l'hexaèdre complet se sont transformés en huit points qui deviennent les neuf points d'un quadrilatère complet, si on leur ajoute le point M_{32} (6). Donc la dernière figure est un cas particulier de la précédente, et l'on a ce théorème :

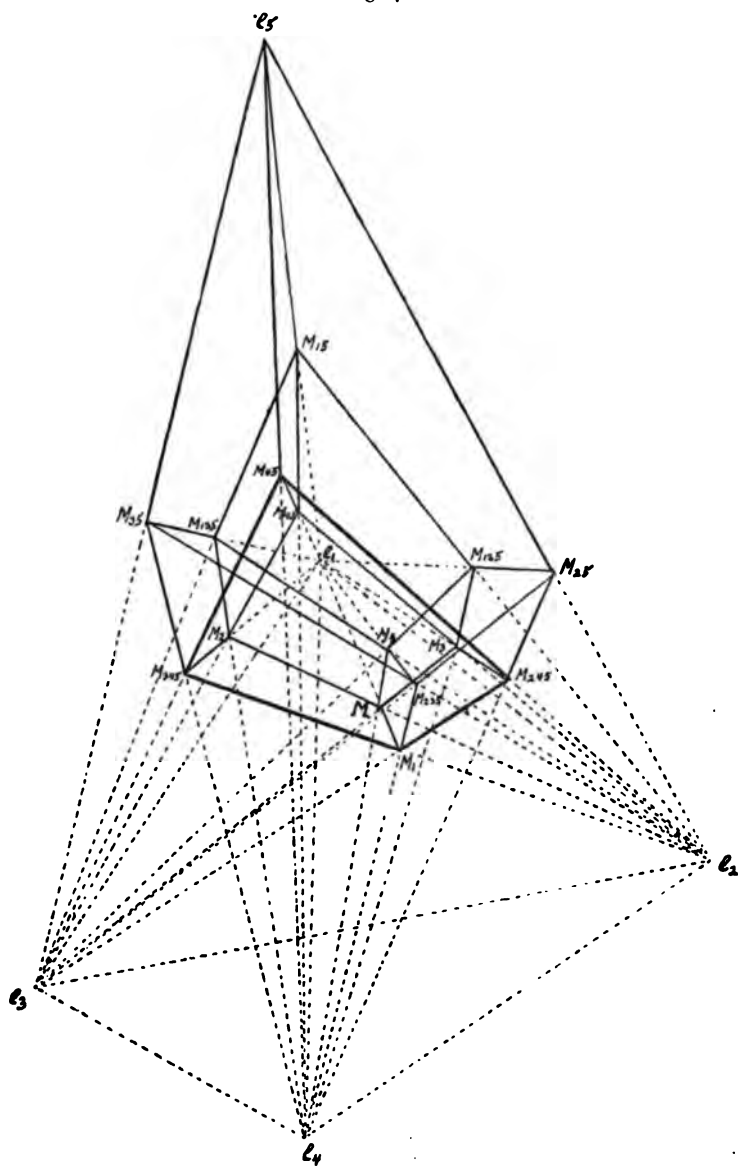
Soient donnés deux groupes de quatre points harmoniques (M_1, M_2, M_3, M_4) , (e_1, e_2, e_3, e_4) . Si un point (e_i) est supposé à l'infini, les autres forment deux groupes de trois points harmoniques avec le point M , et la figure de l'hexaèdre complet, dont e_i, M_2, M_3, M_4 sont quatre sommets, se transforme en la figure d'un quadrilatère complet.

Octaédroïde complet (fig. 4). — Nous appelons *octaédroïde* la figure à quatre dimensions qui est limitée par huit hexaèdres dont chaque fois quatre ont un sommet commun. Cette figure a seize sommets, trente-deux arêtes, vingt-quatre faces.

La projection d'un octaédroïde dans l'espace peut être effectuée de plusieurs manières. La plus commode est la suivante : on construit un hexaèdre au dedans d'un autre, de sorte que les faces de

l'un soient situées vis-à-vis de celles de l'autre, et l'on joint par

Fig. 4.



des droites les sommets des deux corps deux à deux opposés.

Nous avons vu que les figures complètes du quadrilatère et de l'hexaèdre tirent leur origine du triangle et du tétraèdre. Ainsi de chacune des figures de la première série résulte une figure complète de la deuxième série, et nous allons voir que l'on passe du pentaèdroïde à la figure de l'octaèdroïde complet par des constructions tout à fait analogues aux précédentes.

Quoiqu'il soit impossible de se faire une idée de ces figures, on peut aisément effectuer ces constructions en opérant sur les projections des figures dans l'espace, ou même sur les projections sur le plan.

On remarque aussi que l'existence (idéale) des figures de la première série entraîne celle des figures de la deuxième série.

Pour construire l'octaèdroïde complet, soit donné un point M dans un pentaèdroïde $e_1 e_2 e_3 e_4 e_5$ par l'équation

$$(1) \quad M = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_5 e_5.$$

Alors les cinq points d'intersection des droites $Me_1, Me_2, \dots, Me_5$ avec les tétraèdres limitants $e_2 e_3 e_4 e_5, e_1 e_3 e_4 e_5, \dots, e_1 e_2 e_3 e_4$, qui sont situés vis-à-vis des points $e_1, e_2, \dots, e_5$, sont

$$(2) \quad M_1 = M - \alpha_1 e_1 = \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5, \dots$$

Comme le point M_1 est situé dans le tétraèdre $e_2 e_3 e_4 e_5$, on peut construire les droites $M_1 e_2, M_1 e_3, M_1 e_4, M_1 e_5$, qui rencontrent les faces opposées aux quatre points

$$(3) \quad M_{345} = M_1 - \alpha_2 e_2 = M - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 = \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5 = M_2 - \alpha_1 e_1, \dots$$

Comme dans les formules (3) on peut remplacer le point M_1 par $M_2, \dots, M_5$, le système (3) comprend vingt formules; mais les points représentés par ces formules coïncident deux à deux, de sorte qu'il n'y a que dix points M_{pqr} , ce qu'on voit aussi immédiatement, comme il n'y a que $5^{(3)} = 10$ combinaisons de cinq nombres trois à trois.

Enfin, on construit dans la face $e_3 e_4 e_5$ les droites $M_{345} e_3, M_{345} e_4, M_{345} e_5$, qui rencontrent les arêtes opposées aux trois points

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{45} = M_{345} - \alpha_3 e_3 = M_1 - \alpha_2 e_2 - \alpha_3 e_3 = M - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \alpha_3 e_3 \\ \quad = \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5 = M_{245} - \alpha_2 e_2 = M_{145} - \alpha_1 e_1, \dots \end{array} \right.$$

Comme dans les formules (4), on peut remplacer le point M_{345} par les neuf autres points M_{pqr} ; le système (4) comprend trente formules, mais les points représentés coïncident trois à trois, de sorte qu'il n'y a que dix points M_{pq} .

Alors le pentaédroïde est décomposé en cinq octaédroïdes. Les constructions précédentes se simplifient, si l'on veut construire seulement un octaédroïde. Alors, par exemple, on omettra le point M_3 et les constructions faites sur le tétraèdre $e_1 e_2 e_3 e_4$ et ses faces; donc on n'a que les points

$$\begin{aligned} (2) \quad & M_1, M_2, M_3, M_4; \\ (3) \quad & M_{123}, M_{134}, M_{234}, M_{145}, M_{245}, M_{345}; \\ (4) \quad & M_{15}, M_{25}, M_{35}, M_{45}, \end{aligned}$$

qui font ensemble, avec les points M, e_5 les seize sommets de l'octaédroïde

$$(5) \quad \begin{cases} e_5 & M_{35} & M_{345} & M_{45} & M_{235} & M_{25} & M_{245} & M_1 \\ M & M_3 & M_{123} & M_4 & M_{145} & M_2 & M_{135} & M_{15}. \end{cases}$$

Si l'on construit la projection de l'octaédroïde de la manière susdite, la première ligne de (5) donne les sommets de l'hexaèdre extérieur; la seconde, les sommets de l'intérieur. Les points symétriques de la même ligne sont les sommets opposés de l'hexaèdre; les points symétriques de lignes différentes sont les sommets des hexaèdres qu'il faut joindre pour obtenir la figure de l'octaédroïde. Enfin deux points situés l'un sous l'autre sont des sommets opposés de l'octaédroïde.

D'après les équations (2), (3), (4), les quatre couples de droites

$$\begin{array}{cccc} 1. & 2. & 3. & 4. \\ M & M_2, & M_{345} M_1, & M_{145} M_3, & M_{135} M_4, \\ M_{125} M_{15}, & M_{245} M_{45}, & M_{235} M_{35}, & e_5 & M_{25} \end{array}$$

ou les six faisceaux de rayons 12, 13, 14, 23, 24, 34 passent par le point e_2 . On peut aussi dire que le point e_2 est commun aux six corps (espaces) limitant l'octaédroïde, qui contiennent les six faisceaux susdits, ou que ces corps (espaces) limitants passent par le point e_2 .

Cette relation est représentée par les équations

$$\begin{aligned} x_2 e_2 = M & - M_2 = M_1 - M_{345} = M_3 - M_{145} = M_4 - M_{135} \\ & = M_{125} - M_{15} = M_{245} - M_{45} = M_{235} = M_{35} = M_{25} - x_5 e_5. \end{aligned}$$

On a de même

$$\begin{aligned} \alpha_3 e_3 &= M - M_3 = M_2 - M_{415} = M_4 - M_{215} = M_1 - M_{245} \\ &= M_{235} - M_{25} = M_{315} - M_{15} = M_{345} - M_{45} = M_{35} - \alpha_5 e_5, \\ \alpha_4 e_4 &= M - M_4 = M_3 - M_{125} = M_1 - M_{325} = M_2 - M_{315} \\ &= M_{345} - M_{35} = M_{425} - M_{25} = M_{415} - M_{15} = M_{45} - \alpha_5 e_5, \\ \alpha_5 e_5 &= M - M_5 = M_4 - M_{235} = M_2 - M_{435} = M_3 - M_{425} \\ &= M_{415} - M_{45} = M_{135} - M_{35} = M_{125} - M_{25} = M_{15} - \alpha_3 e_3. \end{aligned}$$

Or le dernier groupe d'équations est une conséquence des précédents ; donc on a le théorème :

Soient aa', bb', cc', dd' huit espaces, formant un octaédroïde, deux à deux opposés. Si les six espaces aa', bb', cc' passent par le même point (e_3), les six espaces aa', bb', cc' par le même point (e_4) et les six espaces aa', cc', dd' par le même point (e_5), les espaces bb', cc', dd' passent aussi par le même point (e_5).

En d'autres termes : Si les seize sommets d'un octaédroïde sont situés deux à deux sur trois faisceaux de huit rayons, il existe encore un quatrième faisceau qui a la même propriété.

Ce théorème ne change pas, si l'on remplace l'octaédroïde par ses projections dans l'espace ou dans le plan. Alors on peut dire :

Si, dans l'espace ou dans le plan, trois faisceaux de huit rayons passent par les mêmes seize points, il existe encore un quatrième faisceau qui a la même propriété.

En outre, il suit des équations (1), (2), (3), (4), si nous posons

$$\begin{aligned} P_5 &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + 2 \alpha_5 e_5, \\ (6) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_5 = M + \alpha_5 e_5 = M_3 + M_{35} = M_{125} + M_{345} = M_4 + M_{45} \\ \quad = M_{235} + M_{115} = M_2 + M_{25} = M_{245} + M_{135} = M_1 + M_{15}, \end{array} \right. \end{aligned}$$

c'est-à-dire que *les axes de cet octaédroïde passent par le même point (p_5)*.

Si nous posons, en particulier,

$$(a) \quad \alpha_5 = 1 \quad (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0),$$

l'axe Me_5 est divisé en parties égales par le point e_5 . De même l'axe $M_1 M_{15}$, si

$$(b) \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4.$$

De (a) et (b), il suit

$$(c) \quad x_1 = 0 = x_2 + x_3 + x_4,$$

c'est-à-dire que le point e_1 est à l'infini. L'axe M_2M_{23} est divisé de même, si

$$(d) \quad x_2 = x_3 + x_4.$$

De (c) et (d), il suit

$$(e) \quad x_3 = 0 = x_3 + x_4;$$

donc e_2 est à l'infini. Enfin l'axe M_3M_{33} est divisé en parties égales, si

$$(f) \quad x_3 = x_4,$$

d'où il suit que

$$x_4 = 0 = x_4.$$

En ce cas, e_3 et e_4 sont à l'infini, et l'on a ce théorème :

Si les axes d'un octaédroïde passent par le même point et si quatre axes se divisent entre eux en parties égales, il en est de même des autres quatre axes.

Dans l'étendue à quatre dimensions, deux espaces ou « se coupent » suivant un plan, ou sont « parallèles », c'est-à-dire qu'ils n'ont pas de points communs. Donc on peut ajouter, au dernier théorème, que les espaces opposés de notre octaédroïde sont parallèles deux à deux.

Les huit axes de l'octaédroïde sont situés deux à deux dans un plan. Le nombre de ces plans (quadrilatères) est $8^{(2)} = 28$. De ces quadrilatères, *seize* sont formés par deux arêtes de l'octaédroïde et deux axes d'un hexaèdre limitant, *douze* par quatre diagonales des quadrilatères limitants. Nous appellerons les seize plans de la première espèce *plans diagonaux* de l'octaédroïde.

Ensuite les huit axes de l'octaédroïde sont situés trois à trois dans un espace. Le nombre de ces espaces (hexaèdres) est $8^{(3)} = 56$. De ces hexaèdres, *douze* sont formés par deux faces de l'octaédroïde et quatre plans diagonaux des hexaèdres limitants. Nous les appellerons *espaces* (corps) *diagonaux* de l'octaédroïde. Mais en chacun de ces douze hexaèdres coïncident quatre des cinquante-six corps susdits, puisque chaque fois quatre axes sont réunis dans le même espace. On a donc, outre les corps diagonaux,

encore $56 - 4 \cdot 12 = 8$ autres hexaèdres, qui coïncident en deux, formés par les douze plans susdits.

Chacun des huit corps limitant l'octaédroïde est un hexaèdre dont les axes passent par un point et qui devient complet par les constructions qui produisent les trois autres octaédroïdes. Deux hexaèdres opposés ont chaque fois les mêmes trois sommets secondaires, savoir

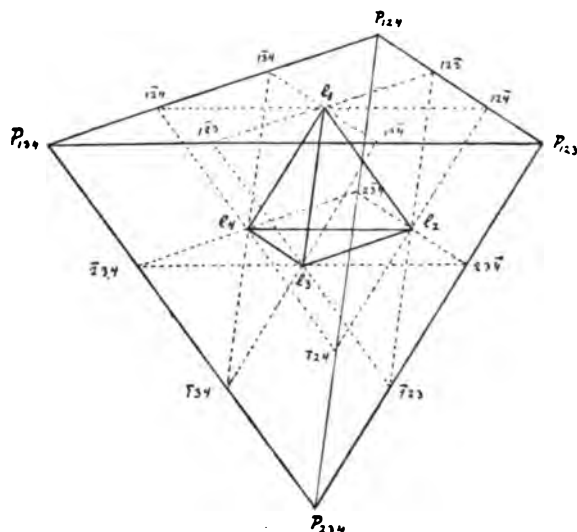
$$e_1 e_2 e_3, e_2 e_3 e_4, e_3 e_4 e_1, e_4 e_1 e_2.$$

Donc les quatre plans déterminés par ces points sont les plans diagonaux secondaires des huit hexaèdres, et le tétraèdre $e_1 e_2 e_3 e_4$ est le *corps diagonal secondaire* (13°) de l'octaédroïde.

Les axes des huit hexaèdres rencontrent les septièmes plans diagonaux dans les points (fig. 5)

$$\begin{aligned} (7) \quad & M_{341} = M - M_{25} = M_2 - \alpha_3 e_5 = \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_1 e_1; \\ (8) \quad & \begin{cases} M_{341} = M_3 - M_{235} = M_{145} - M_{35} = -\alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_1 e_1, \\ M_{341} = M_4 - M_{245} = M_{135} - M_{45} = \alpha_3 e_3 - \alpha_4 e_4 + \alpha_1 e_1, \\ M_{341} = M_1 - M_{215} = M_{345} - M_{15} = \alpha_2 e_3 + \alpha_4 e_4 - \alpha_1 e_1, \end{cases} \end{aligned}$$

Fig. 5.



où il faut encore changer trois fois circulairement les indices 1, 2, 3, 4.

De ces équations, on tire

$$M_{3,11} - M_{3,1\bar{1}} = M_{\bar{3},11} + M_{\bar{3},1\bar{1}} = 2\alpha_1 e_1$$

et deux équations analogues. Donc les droites qui joignent les sommets du triangle $M_{\bar{3},11}, M_{3,1\bar{1}}, M_{3,1\bar{1}}$ avec le point $M_{3,11}$, rencontrent les arêtes opposées suivant les points e_1, e_3, e_4 . Tous ces points donnent lieu à un quadrilatère trois fois complet.

Puis on a

$$M_{\bar{3},11} + M_{\bar{4},21} + M_{\bar{2},31} = 3\alpha_1 e_1,$$

$$M_{3,1\bar{1}} + M_{4,2\bar{1}} + M_{2,3\bar{1}} = 3\alpha_1 e_1,$$

d'où il suit que ces sept points sont situés dans le même plan. Il y a, en tout, quatre plans de cette sorte, qui forment un tétraèdre circonscrit au tétraèdre $e_1 e_2 e_3 e_4$. Les deux tétraèdres donnent lieu à un hexaèdre quatre fois complet. Les quatre couples de faces correspondantes de ces tétraèdres déterminent quatre droites situées dans un plan et formant un quadrilatère correspondant au tétraèdre $e_1 e_2 e_3 e_4$.

Les points $M_{1,23}, M_{1,24}, M_{2,34}, M_{3,41}$ forment un tétraèdre inscrit à $e_1 e_2 e_3 e_4$, et les quatre droites qui joignent deux sommets correspondants de ces tétraèdres passent par le point M_5 .

Les sommets du tétraèdre circonscrit à $e_1 e_2 e_3 e_4$ sont déterminés par l'équation

$$(9) P_{123} = 2M_{1\bar{3}4} - M_{1\bar{2}4} = 2M_{12\bar{3}} - M_{12\bar{4}} = 2M_{\bar{3}24} - M_{\bar{1}24} = M_5 - 3\alpha_3 e_3$$

et trois autres qui en naissent par permutation circulaire des indices 1, 2, 3, 4.

Six faces de l'octaédroïde passent par le point e_5 ; donc l'axe passant par e_5 est situé dans six espaces diagonaux, c'est-à-dire dans $Me_5 M_{rs} M_{3s}$, où rs est une des six combinaisons des nombres 1, 2, 3, 4. (Les six autres corps diagonaux sont

$$M_{15} M_1 M_{1rs} M_{1st},$$

$$M_{rs} M_r M_{rst} M_{rt5},$$

où $r, s, t = 2, 3, 4$.)

Si l'on multiplie les espaces $(Me_5 M_{33} M_{34})$ et $(e_1 e_2 e_3 e_4)$, en posant

$$(e_1 e_2 e_3 e_4 e_5) = 1,$$

on obtient

$$\alpha_3 \alpha_4 (e_3 e_4 M_{12}).$$

Donc les six espaces diagonaux passant par e_5 rencontrent le treizième espace diagonal suivant les six plans $(e_r e_s M_{tu})$, où $r, s, t, u = 1, 2, 3, 4$. Ces plans coïncident avec les plans $(M_{rs} M_{st} M_{tu})$, ce qui se voit, si l'on remplace M_{rs}, M_{st}, M_{tu} par leurs valeurs et que l'on effectue la multiplication. En outre, ces plans passent par le point M_5 .

Si l'on multiplie, d'autre part, $(M_{15} M_1 M_{135} M_{145})$ et $(e_1 e_2 e_3 e_4)$, on obtient

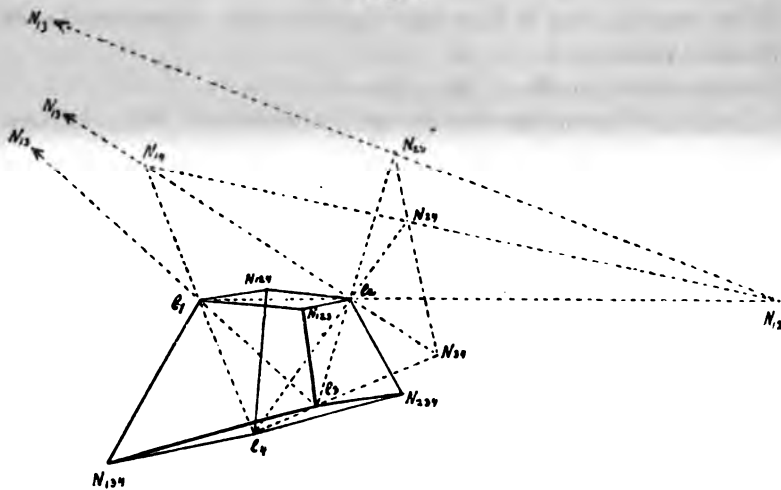
$$\alpha_3 \alpha_4 (\alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2) e_3 e_4.$$

Donc, en posant

$$(10) \quad N_{rs} = \alpha_r e_r - \alpha_s e_s \quad (1),$$

les six autres espaces diagonaux rencontrent le treizième espace diagonal suivant les six plans $(N_{rs} e_t e_u)$, où $r, s, t, u = 1, 2, 3, 4$.

Fig. 6.



Ces plans, passant comme les précédents par les arêtes du tétraèdre 1234, forment un hexaèdre circonscrit à $e_1 e_2 e_3 e_4$ (fig. 6).

(1) On a

$$\begin{aligned} N_{rs} + N_{st} + N_{tr} &= 0, \\ N_{rs} + N_{st} + N_{tu} + N_{ur} &= 0; \end{aligned}$$

donc chaque fois trois points sont situés sur une droite et quatre dans un plan. Par conséquent les six points N_{rs} forment un quadrilatère complet.

Les quatre autres sommets de cet hexaèdre sont déterminés par l'équation

$$(11) \quad N_{123} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 - \alpha_4 e_4$$

et trois autres qui s'en déduisent par permutation circulaire des indices 1, 2, 3, 4. Les axes de cet hexaèdre se rencontrent au point M_5 .

On remarque que les points M_{rs} et N_{rs} sont harmoniques par rapport à $e_r e_u$, et que les droites $e_1 M_{234}, e_2 M_{134}, e_3 M_{124}, e_4 M_{123}, M_{12} N_{34}, M_{13} N_{24}, M_{23} N_{14}$ passent par le point N_{123} ; car on peut, par exemple, écrire

$$N_{123} = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) + (\alpha_3 e_3 - \alpha_4 e_4) = M_{12} + N_{34}.$$

Enfin on peut démontrer, par des calculs analogues aux précédents, l'analogie qui existe entre l'octaédroïde et l'hexaèdre complet.

En permutant partout les indices 1, 2, 3, 4, 5, on obtient les quatre autres octaédroïdes qui se déduisent du pentaédroïde donné. Chaque octaédroïde a pour treizième corps diagonal un des tétraèdres limitant le pentaédroïde.

Les corps limitant les deux pentaédroïdes $e_1 \dots e_5, M_1 \dots M_5$ sont deux à deux opposés et se rencontrent en cinq plans, dont l'un est

$$(M_1 M_2 M_3 M_4) (e_1 e_2 e_3 e_4)$$

ou, les coefficients omis,

$$e_1 e_2 e_3 + e_2 e_3 e_4 + e_3 e_4 e_1 + e_4 e_1 e_2.$$

Ces cinq plans sont situés dans le même espace et forment un corps correspondant au pentaédroïde donné.

Figure à n dimensions. — Dans une figure à n dimensions se trouvent des sommets, arêtes, faces (quadrilatères), corps (hexaèdres), etc. Le nombre des figures limitantes à k dimensions est

$$2^{n-k} n^{(k)}.$$

Par conséquent, il y a

$$\begin{array}{ll} 2^n & \text{sommets,} \\ 2^{n-1} n & \text{arêtes,} \\ 2^{n-2} n^{(2)} & \text{faces, etc. } (1). \end{array}$$

(1) Pour $k = n - 1$ on obtient $2n$ en accord avec Stringham (*loc. cit.*, p. 14).

Le nombre des figures diagonales à $(k + 1)$ dimensions est

$$2^{n-k-1} n^{(k)}.$$

La figure complète se réalise par des constructions tout à fait analogues aux précédentes. Nous ajoutons encore ce théorème :

Si les 2^n sommets d'une figure à n dimensions (deuxième série) sont situés deux à deux sur $(n - 1)$ faisceaux de 2^{n-1} rayons, il existe encore un $n^{\text{ième}}$ faisceau qui a la même propriété. Les axes de cette figure passent par le même point.

Ce théorème subsiste encore si les 2^n points sont situés dans le même plan ou dans l'espace.

III. — FIGURES DE LA TROISIÈME SÉRIE.

Les figures de cette série s'obtiennent par des constructions précisément réciproques à celles de la précédente ⁽¹⁾ :

1° Dans le plan, le point est réciproque à la droite; donc la figure réciproque au quadrilatère est également un quadrilatère;

2° Dans l'espace, le point est réciproque au plan et la droite à elle-même; donc la figure réciproque à l'hexaèdre est l'octaèdre. De ce que le tétraèdre est réciproque à lui-même, on peut déduire l'octaèdre du tétraèdre par les constructions réciproques à celles qui s'employaient pour en déduire l'hexaèdre.

A cet effet, soient (*fig. 7*)

$$\varepsilon_1 = (e_2 e_3 e_4), \quad \varepsilon_2 = (e_3 e_4 e_1),$$

$$\varepsilon_3 = (e_4 e_1 e_2), \quad \varepsilon_4 = (e_1 e_2 e_3)$$

les quatre faces d'un tétraèdre et

$$v_1 = (M_{12} M_{13} M_{14})$$

un plan qui rencontre les plans $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ suivant les droites $M_{13} M_{14}, M_{14} M_{12}, M_{12} M_{13}$ et le plan ε_1 suivant une quatrième

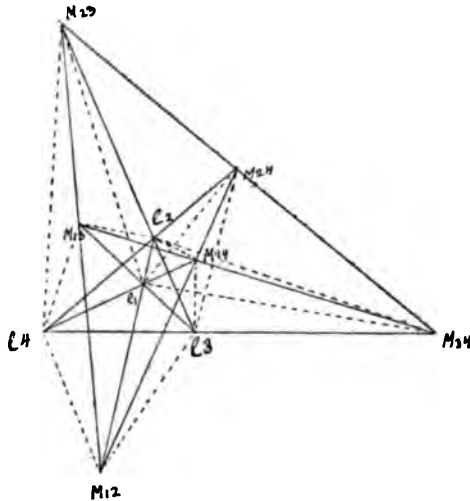
(¹) On remarque que les figures réciproques à celles de la première série sont les mêmes figures, et que le nombre des sommets $(n + 1)$ est égal à celui des figures limitantes à $(n - 1)$ dimensions.

droite m , et construisons les plans

$$\begin{aligned}\mu_2 &= M_{13} M_{14} e_2, \\ \mu_3 &= M_{14} M_{12} e_3, & \mu_1 &= m e_1. \\ \mu_4 &= M_{12} M_{13} e_4,\end{aligned}$$

Le plan μ_r rencontre les trois faces du tétraèdre passant par e_r suivant trois droites ($e_r M_{1s}$, $e_r M_{1t}$ et une troisième). Chacune de ces trois droites détermine avec la ligne d'intersection des deux

Fig. 7.



autres faces ($e_r e_s$, $e_r e_t$ et une troisième) un plan (ε_{ut} , ε_{us} et un troisième). Alors ν_i et ε_u sont deux faces opposées de quatre octaèdres, dont les sommets sont les points

$$\begin{aligned}e_2 e_3 e_4 M_{12} M_{13} M_{14}, \\ e_3 e_4 e_1 M_{23} M_{24} M_{21}, \\ e_4 e_1 e_2 M_{34} M_{31} M_{32}, \\ e_1 e_2 e_3 M_{41} M_{42} M_{43}\end{aligned}$$

(les six points M_{rs} forment un quadrilatère complet).

L'un de ces octaèdres a pour couples de faces opposées

$$\varepsilon_1 \nu_1, \varepsilon_{12} \mu_2, \varepsilon_{13} \mu_3, \varepsilon_{14} \mu_4$$

ou

$$\begin{aligned}(e_2 e_3 e_4)(M_{12} M_{13} M_{14}), & (M_{12} e_3 e_4)(e_2 M_{23} M_{24}), \\ (M_{13} e_2 e_4)(e_3 M_{12} M_{14}), & (M_{14} e_2 e_3)(e_4 M_{12} M_{13}).\end{aligned}$$

Cet octaèdre a, comme les autres, la propriété que les quatre droites d'intersection des faces opposées sont situées dans le même plan.

En outre, comme les trois axes passent évidemment par le même point e_1 , on conclura réciproquement :

Si les quatre axes d'un hexaèdre passent par le même point, les trois droites d'intersection des faces opposées sont situées dans le même plan.

Pour le parallélépipède, ce plan est le plan infiniment éloigné de l'espace.

Puis on peut établir le théorème :

Soient AA' , BB' , CC' les sommets d'un octaèdre, deux à deux opposés. Si les quatre points BB' , CC' sont situés dans le même plan (ε_2) et les points AA' , CC' dans le même plan (ε_3) , les points AA' , BB' sont aussi situés dans le même plan (ε_4) .

En d'autres termes :

Si les huit faces d'un octaèdre passent deux à deux par les arêtes de deux plans quadrilatères, il existe encore un troisième quadrilatère qui a la même propriété.

Le corps réciproque du parallélépipède est un octaèdre dont les axes se divisent entre eux en parties égales.

On établira, par des considérations réciproques aux précédentes, les notions des « plans harmoniques » et de l'« octaèdre complet ».

3° Dans l'étendue à quatre dimensions, la figure réciproque à l'octaédroïde est l'hexadécaédroïde, limité par seize tétraèdres, dont chaque fois huit ont un sommet commun. Cette figure a huit sommets, vingt-quatre arêtes, trente-deux faces. La projection d'un hexadécaédroïde dans l'espace peut être construite de la manière suivante : On construit un tétraèdre à l'intérieur d'un autre, de façon que les sommets de l'un soient situés vis-à-vis des faces de l'autre, et l'on joint, par droites, chaque sommet de l'extérieur avec les trois sommets de la face opposée de l'intérieur.

En considérant que, dans l'étendue à quatre dimensions, point

et espace, droite et plan sont réciproques entre eux, on peut aisément établir les théorèmes concernant l'hexadécaédroïde.

4° Quant à la figure à n dimensions, il suffit de considérer que le nombre des figures limitantes à k dimensions est égal au nombre des figures limitantes à $n - k - 1$ dimensions de la figure réciproque. Donc, si l'on remplace k par $n - k - 1$ dans l'expression $2^{n-k} n^{(k)}$, on trouve que le nombre des figures limitantes à k dimensions pour une figure de la troisième série est

$$2^{k+1} n^{(n-k-1)} \text{ ou } 2^{k+1} n^{(k+1)};$$

Par conséquent, il y a

$$\begin{aligned} 2n & \text{ sommets,} \\ 4n^{(2)} & \text{ arêtes,} \\ 8n^{(3)} & \text{ faces, etc. } (1). \end{aligned}$$

D'après les recherches précédentes, il est possible d'étendre les théorèmes concernant le triangle, quadrilatère, tétraèdre, hexaèdre, octaèdre, à l'étendue à n dimensions. Mais il n'en est pas de même des autres polygones, ni du dodécaèdre et icosaèdre, dont les figures analogues n'existent pas dans les étendues à plus de trois dimensions, excepté la quatrième dimension où il y a encore trois figures, limitées par vingt-quatre octaèdres, cent vingt dodécaèdres, six cents tétraèdres, dont on ne connaît pas encore les relations avec les figures à deux et trois dimensions.

Etude sur un cas singulier du mouvement d'un point matériel;
par M. GASCHEAU (2).

(Séance du 16 juin 1882.)

PRÉFACE.

En traitant diverses questions de Mécanique rationnelle, j'ai rencontré plusieurs cas singuliers auxquels il ne m'a pas paru

(1) Pour $k = n - 1$ on obtient 2^n , en accord avec Stringham (*loc. cit.*, p. 14.)

(2) En publiant l'étude de M. Gascheau, la Rédaction déclare qu'elle laisse à l'auteur toute la responsabilité de l'opinion qui y est soutenue, et elle ne ga-

possible d'appliquer le raisonnement mathématique, qui, partant de principes certains et, marchant de conséquence en conséquence, doit conduire à une solution incontestable; ces circonstances exceptionnelles exigent, à mon sens, un mode exceptionnel de raisonnement; celui que j'ai employé consiste dans l'*induction* substituée à la *déduction*. Mais il faut convenir que les solutions obtenues par ce moyen ne sont pas à l'abri de doutes et d'objections. Par ce motif, j'ai fait imprimer mon étude, non pour la publier, mais pour la distribuer aux géomètres dont les noms font aujourd'hui autorité dans la Science, et les assurer que je serais très reconnaissant à ceux qui m'adresseraient leur opinion motivée, fût-elle défavorable.

Plusieurs savants ont bien voulu répondre à mon appel. J'y distingue trois membres de l'Institut, parfaitement compétents, mais dont les trois réponses sont complètement divergentes, savoir : l'un rejette tout à fait ma solution; un autre l'admet d'une manière sommaire, sans donner les motifs de son approbation; et le troisième émet une opinion intermédiaire.

Je viens donc aujourd'hui présenter aux géomètres le calcul et le raisonnement spécial que j'ai appliqués à un problème qui est un cas particulier de l'art. 236 du *Traité de Mécanique* de Poisson (édit. de 1833).

rantit en aucune façon la rigueur de la solution qu'il propose pour un problème paradoxal. M. Gascheau admet l'existence réelle d'une force infinie qui agirait sur un point matériel. Or les forces sont toujours du même ordre de grandeur que les masses auxquelles elles sont appliquées; elles ne peuvent leur communiquer que des accélérations et des vitesses finies. L'auteur étend, par voie d'induction, le principe de l'inertie aux cas où la vitesse devient infinie, tandis que ce principe perd alors toute justesse. Qu'on cherche, par exemple, l'équation du mouvement rectiligne d'un point attiré vers un centre fixe proportionnellement à l'inverse du carré de la distance; on reconnaîtra que, dans ce cas limite, la vitesse du mobile change de signe en passant par l'infini quand il arrive au centre d'attraction, et qu'au lieu de franchir ce centre, le point mobile retourne à son point de départ, comme s'il avait rencontré une bande élastique. Le résultat admis par M. Gascheau pour la traversée du pôle est donc fictif à tous les points de vue, et rien ne prouve que le mobile ne rétrogradera pas, à partir de ce point, sans passer dans la seconde branche de la spirale hyperbolique. On observera également que les propriétés géométriques de cette courbe sont bien connues. Malgré ces objections de fond, l'analyse d'un cas singulier aussi étrange a paru présenter assez d'intérêt pour justifier l'admission du travail de M. Gascheau dans le *Bulletin de la Société mathématique*.

SOLUTION PROPOSÉE.

1. *Équations du mouvement d'un point matériel sollicité par une force centrale, attractive et inversement proportionnelle au cube de la distance du mobile au centre d'action.* — J'adopte les notations de Poisson (p. 446 et suivantes), sauf un changement indiqué ci-dessous dans l'expression de la valeur de la vitesse initiale; alors j'ai, à l'origine du mouvement,

$$(1) \quad t = 0, \quad \theta = 0, \quad r = \gamma, \quad \dot{\theta} = \alpha, \quad v = \sqrt{2gh} = a.$$

En tenant compte de la relation générale

$$\tan \dot{\theta} = \frac{r \dot{\theta}}{\dot{r}},$$

l'équation des aires est ici

$$(2) \quad r^2 d\theta = a\gamma \sin \alpha dt;$$

et celle des forces vives

$$(3) \quad v^2 = \frac{K\gamma^3}{r^3} + \alpha^2 - K\gamma.$$

L'élimination de $d\theta$ entre ces deux équations donne

$$\frac{dr^3}{dt^2} + (\alpha^2 \sin^2 \alpha - K\gamma) \frac{\gamma^3}{r^3} = \alpha^2 - K\gamma.$$

Poisson résout cette équation dans deux cas, attribuant successivement une valeur positive et une valeur négative au coefficient de $\frac{\gamma^3}{r^3}$, sans s'occuper du cas où ce multiplicateur est nul; c'est celui que je traite ici, et, en conséquence, je pose

$$K\gamma = \alpha^2 \sin^2 \alpha.$$

Cette relation, introduite dans l'équation précédente, donne

$$\frac{dr^3}{dt^2} = \alpha^2 \cos^2 \alpha$$

et, par suite,

$$\frac{dr}{dt} = \pm \alpha \cos \alpha;$$

d'où je conclus que la question de Mécanique donne lieu à deux problèmes distincts qui attribuent au rayon vecteur r , l'un une

valeur croissante et l'autre une valeur décroissante, à mesure que le temps s'écoule.

En tenant compte des conditions (1), les intégrales de ces deux équations sont

$$(4) \quad r = \gamma + a \cos \alpha t \quad \text{et} \quad r = \gamma - a \cos \alpha t.$$

Soient O le pôle et C le point de départ du mobile, de sorte que γ représente la distance OC.

Comme toutes les valeurs de la variable indépendante t sont comprises entre zéro et l'infini, sans que cette quantité prenne de valeurs négatives, si la première équation correspond au cas où le mobile est lancé dans la direction CA qui fait un angle aigu avec l'axe polaire, la deuxième s'appliquera au cas où le mobile part dans le sens opposé CA' qui correspond à $\alpha + \pi$.

J'élimine dt entre l'équation des aires (2) et l'équation différentielle ci-dessus, où je prends le signe supérieur, ce qui donne

$$r^2 d\theta = \gamma \tan \alpha dr; \quad \text{d'où} \quad d\theta = \gamma \tan \alpha \frac{dr}{r^2}.$$

En intégrant, on aura, conformément aux conditions initiales,

$$(5) \quad \theta = \tan \alpha \left(1 - \frac{\gamma}{r} \right).$$

Cette équation, dans laquelle la variable t n'entre pas explicitement, convient aux deux cas où l'on aura à employer les équations (4), puisque $\tan \alpha$ ne change pas quand l'angle α augmente de deux droits. On obtient sans difficulté ces deux dernières formules,

$$(6) \quad \tan \vartheta = \frac{\gamma \tan \alpha}{r} = \tan \alpha - \theta,$$

$$(7) \quad v^2 = a^2 \left(\cos^2 \alpha + \frac{\gamma^2}{r^2} \sin^2 \alpha \right).$$

2. Trajectoire. — Je vais exposer succinctement les propriétés géométriques de la trajectoire du mobile représentée par l'équation (5), que l'on peut écrire sous la forme

$$r = \gamma \frac{\tan \alpha}{\tan \alpha - \theta},$$

où θ sera la variable indépendante.

Asymptote rectiligne. — Soit OP l'abscisse d'un point d'un arc, on aura

$$x = r \cos \theta = \frac{\pi}{2} \gamma \frac{\cos \theta}{\frac{\pi}{2} - \theta} = \frac{\pi}{2} \gamma \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)}{\frac{\pi}{2} - \theta};$$

valeur qui se réduit à $\frac{\pi}{2} \gamma$ pour $\theta = \frac{\pi}{2}$; d'où l'on conclut qu'en prenant $OB = \frac{\pi}{2} \gamma$, et menant BL perpendiculaire à l'axe, cette droite sera asymptote aux deux arcs.

Il résulte de l'équation (6) que la *sous-tangente* d'un point quelconque de la courbe est égale à cette quantité OB et, par conséquent, *constante*; propriété qui sert souvent de définition à la spirale hyperbolique.

Pôle asymptotique. — L'équation (5) étant satisfaite par $r = 0$ et $\theta = \infty$, j'en conclus que le mobile parcourant l'une des spires en se rapprochant continuellement du pôle ne peut atteindre ce point que par un nombre infini de révolutions de son rayon vecteur.

Nœuds. — Points de croisement des deux spires sur leur axe de symétrie, tels que C, K, Q, . . ., déterminés par les valeurs de θ comprises dans la formule $n\pi$, où n est un nombre entier. L'axe est bissecteur de l'angle des tangentes aux deux spires. L'axe est le rayon vecteur d'un nœud quelconque. Les nœuds sont en nombre infini. Le point C. commun aux deux arcs et aux deux spires, est le premier nœud. Le pôle est la limite des nœuds.

Rectification. — La formule générale $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$, appliquée à la courbe représentée par l'équation (5), donne

$$ds = \frac{dr}{2r} \sqrt{4r^2 + \pi^2 \gamma^2}$$

et, en intégrant,

$$\int ds = \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 + \pi^2 \gamma^2} + \frac{\pi \gamma}{4} \log \frac{\sqrt{4r^2 + \pi^2 \gamma^2} - \pi \gamma}{\sqrt{4r^2 + \pi^2 \gamma^2} + \pi \gamma} + \text{const.}$$

Pour $r = \infty$, la première partie est infinie; donc chaque arc, CF ou CF', est infini, résultat facile à prévoir. Pour $r = 0$, la

seconde partie est également infinie : donc chaque spire est infinie, ce qui n'était pas évident *a priori*.

Corollaire. — Les formules (5), (6) et (7) donnent, sans difficulté, les conséquences suivantes.

Soient m' et m deux points symétriques de la trajectoire ; les vitesses en ces points sont égales et leurs directions $m't'$ et mt sont également inclinées par rapport à l'axe polaire ; soient n' et n deux autres points symétriques l'un de l'autre : les deux arcs symétriques $m'n'$ et nm seront parcourus en temps égaux.

Remarque. — La figure de la trajectoire, en même temps variée et régulière, ses propriétés géométriques, son rôle dans la question de Mécanique actuelle lui donnent, ce me semble, comme à la cycloïde, assez d'intérêt pour faire regretter que son étude ne tienne pas plus de place dans les Traités de Calcul infinitésimal et de Mécanique rationnelle.

Observations sur les limites et l'étendue de la solution d'un problème. — Il n'y a pas de calcul algébrique, finissant par une équation, qui ne soit la traduction d'une suite de déductions légitimes ; par conséquent, la traduction de cette équation, en langage ordinaire, est généralement une proposition admissible au rang des vérités mathématiques, mais il peut se produire des cas particuliers où un résultat obtenu sorte de la catégorie des quantités ordinaires dont la signification est connue et doit être déterminée. Alors une explication devient nécessaire et, si l'interprétation exigée par la présence d'une valeur singulière ne présente rien qui soit contraire à la raison, la solution est acceptable, en vertu du caractère infaillible appartenant au Calcul algébrique : je n'ai pas besoin d'ajouter que cette observation vise le raisonnement spécial annoncé dans la Préface.

Les valeurs critiques dont il s'agit ici sont celles qui introduisent des résultats infinis ou imaginaires ; or un de mes adversaires déclare qu'il n'a pas moins de répugnance pour les uns que pour les autres, et qu'il faut rejeter indistinctement toute solution où ils se présentent. Cependant j'y trouve une différence bien tranchée, et je regarde une *quantité infinie* comme pouvant manifester un changement brusque dans une fonction, mais sans lui

imposer la moindre interruption de réalité, tandis qu'une valeur *imaginaire* de la fonction attribuée à la variable une limite, passé laquelle cette fonction cesse d'exister. Ainsi, par exemple, quand on porte son attention : 1° sur un cercle rapporté à deux diamètres rectangulaires; 2° sur une hyperbole équilatère rapportée à deux axes rectangulaires parallèles à ses asymptotes; l'ordonnée dans chaque cas étant prise pour fonction de l'abscisse, on voit, dans le premier, que, quand la variable a atteint la grandeur du rayon, elle peut continuer à croître jusqu'à l'infini, sans que la fonction prenne jamais une valeur réelle. Il n'en arrive pas autant à l'ordonnée de l'hyperbole; car, tout infinie qu'elle devient pour une valeur *déterminée de l'abscisse*, elle n'en prend pas moins des valeurs réelles et déterminées et pour toutes les valeurs de la variable, fussent-elles aussi rapprochées que l'on voudra de sa valeur critique : seulement celle-ci correspond au changement subit du signe de la fonction. Il n'y aurait eu même aucun changement s'il se fût agi de l'hyperbole représentée par l'équation $x^2 y = 1$. De là je conclus qu'en passant par l'infini cette dernière ordonnée *reste continue*, tandis que celle de la première, représentée par $xy = 1$, devient *discontinue*.

4. *Mouvement d'un point qui s'éloigne du pôle.* — Le rapport $\frac{dr}{dt}$, obtenu (n° 1), est positif à l'origine du mouvement, et la vitesse initiale a est dirigée dans le sens CA. C'est donc la première équation (4) qui convient à ce sens, et le mouvement est déterminé par les équations

$$(4) \quad r = \gamma + a \cos \alpha t,$$

$$(5) \quad \theta = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\gamma}{r} \right),$$

$$(6) \quad \tan \phi = \frac{\pi}{2} \frac{\gamma}{r},$$

$$(7) \quad v^2 = a^2 \left(\cos^2 \alpha + \frac{\gamma^2}{r^2} \sin^2 \alpha \right),$$

desquelles on déduit, sans difficulté, les lois suivantes :

1° Le rayon vecteur croît de quantités égales en temps égaux, ou bien, le mouvement du mobile est uniforme suivant le rayon vecteur.

2° La grandeur du rayon vecteur varie depuis γ jusqu'à l'infini, et la durée de cet accroissement est infinie.

3° L'inclinaison du rayon vecteur sur l'axe polaire varie depuis zéro jusqu'à 90° , limite qu'elle n'atteint qu'après un temps infini.

4° La vitesse propre du mobile décroît depuis a jusqu'à $a \cos \alpha$, limite qu'elle n'atteint qu'après un temps infini.

5° Toute la trajectoire du mobile, dans ce mouvement, se réduit à l'arc illimité CF, asymptotique à la droite BE, dont il peut s'approcher jusqu'à une distance moindre que toute quantité donnée, quelque petite qu'elle soit, mais sans l'atteindre jamais et sans que sa vitesse soit jamais éteinte.

5. *Mouvement d'un point qui s'approche du pôle.* — La vitesse initiale a étant maintenant dirigée dans le sens CA', c'est la seconde équation (4) du n° 1 qui convient à ce cas. Je la transforme en posant

$$\frac{\gamma}{a \cos \alpha} = T,$$

et j'obtiens

$$(4) \quad r = \gamma \left(1 - \frac{t}{T} \right).$$

Les trois autres (5), (6) et (7) du n° 4 ci-dessus complètent la solution qui donne, de la manière suivante, les lois du mouvement :

1° Lorsque le temps atteint la valeur

$$t = T,$$

on trouve, par les équations (4) et (7),

$$r = 0 \quad \text{et} \quad v = \infty;$$

d'où je conclus que, pendant le temps fini T , le mobile a parcouru la spire infinie CH'KL'Q... O (n° 2), et que, par conséquent, ce point est arrivé au pôle O. Mais ce résultat a besoin d'être expliqué conformément à la première observation du n° 3. Pour cela, j'emploie la loi du mouvement rectiligne uniforme, d'après laquelle l'espace parcouru est exprimé par un produit de deux facteurs, qui sont la *vitesse* et le *temps*. Or, pourvu que le premier soit infini, le second restant fini, le produit n'en est pas moins infini ;

et c'est en admettant que cette conséquence peut être attribuée à un mouvement variable quelconque que j'obtiens une interprétation qui me paraît suffisante pour le cas actuel.

2° Je vais encore avoir recours à l'induction pour déterminer la direction suivant laquelle le point matériel atteint et quitte le centre d'action. A cet effet, je remarque d'abord qu'à l'instant où ce mobile passe par le pôle, son rayon vecteur se réduit à un point ; mais la Géométrie ne manque pas d'exemples de cas où une droite, joignant deux points réunis en un seul, n'en a pas moins une direction déterminée. Or ici les deux points dont il s'agit sont le mobile et le pôle que je considère comme la limite des nœuds (n° 2) ; d'ailleurs l'axe polaire est le rayon vecteur d'un nœud quelconque : si donc on admet que cette propriété a lieu jusqu'à la limite, il en résulte que la direction demandée est celle de l'axe polaire. Cela posé, je fais $r = 0$ dans l'équation (6), ce qui donne $\tan \delta = \infty$, par suite $\delta = \frac{\pi}{2}$; donc enfin le mouvement est dirigé suivant OY perpendiculaire à l'axe polaire OX. En outre, on peut s'assurer que cette loi, comme la première, satisfait à l'épreuve du n° 3. En effet, la valeur de la force motrice étant $\frac{K\gamma^3}{r^3}$, cette quantité devient infinie pour $r = 0$, d'où il résulte qu'à l'époque T le point matériel est retenu au pôle, par une résistance infinie ; mais, comme il est animé d'une vitesse infiniment grande, la présence de cet élément de mouvement me paraît suffisante pour autoriser à admettre que la cause contraire est détruite.

3° Je fais $t = 2T$, ce qui donne, d'après les équations (4), (5), (6) et (7),

$$r = -\gamma, \quad \theta = \pi, \quad \tan \delta = -\frac{\pi}{2} = -\tan \alpha, \quad v = a.$$

Ces résultats expriment que, *après un second intervalle fini T, le mobile, partant du point O avec sa vitesse infinie, parcourt la seconde spire infinie O...QLKHC, pour revenir à son point de départ C, où il reprend sa vitesse initiale a dirigée suivant la tangente à l'arc MC.*

4° Le mobile, à son retour en C, se retrouve dans les conditions initiales du numéro précédent, d'après lesquelles il va mettre un

temps infini à parcourir l'arc infini CF' asymptotique à la droite BE'.

5° Dans cette seconde solution, la trajectoire est composée des deux spires réunies à l'arc CF', c'est-à-dire de ce qui reste de la spirale hyperbolique totale, quand on en a retranché l'arc CF, trajectoire de la première solution.

Scolie I. — L'équation des aires donne

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\alpha \gamma \sin \alpha}{r^2};$$

au moyen de la formule (7), on peut donner à celle-ci la forme

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\gamma \sin \alpha}{\sqrt{r^2 \cos^2 \alpha + \gamma^2 \sin^2 \alpha}} \frac{v}{r}.$$

Ici le multiplicateur de $\frac{v}{r}$ devient l'unité pour $r = 0$; par conséquent, à cette limite, on a

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r};$$

donc alors, la vitesse propre du mobile étant infinie, la vitesse angulaire de son rayon vecteur devient une grandeur infinie d'un ordre supérieur à v : d'où l'on peut conclure que le mobile atteint le pôle, non en glissant, mais en tournant une infinité de fois autour de ce point fixe.

Ces observations s'accordent avec les remarques d'après lesquelles la spirale, prise depuis le point C jusqu'au pôle, a un développement linéaire infini, tandis qu'elle n'enveloppe qu'une étendue superficielle finie, ce qui est une conséquence de la loi des aires donnée par la Mécanique.

Scolie II. — Ma solution, ainsi que le scolie précédent, obtiennent une sanction importante par le n° 236 de la Mécanique de Poisson, qui résout le même problème de Dynamique, dans le cas où la trajectoire, au lieu d'être une spirale hyperbolique, est la spirale représentée par l'équation

$$r = \frac{2\gamma}{e^{n\theta} + e^{-n\theta}} \quad (\text{p. 453}).$$

A la fin de la page précédente, l'auteur dit : « Le mobile décrira

une spirale autour du pôle, et *atteindra* ce point après un nombre infini de révolutions. »

La solution se termine par une équation qu'on peut écrire sous la forme

$$t = \frac{\gamma}{n\sqrt{2gh}} \frac{1 - e^{-2n\theta}}{1 + e^{-2n\theta}},$$

pour $\theta = \infty$, la valeur de r devient nulle et celle de $t = \frac{\gamma}{n\sqrt{2gh}}$; donc le mobile arrive au pôle, après un temps fini et déterminé pendant lequel il a exécuté une infinité de circonvolutions autour de ce point. Cette dernière propriété est encore conforme au scolie précédent.

Outre ces deux équations déterminant θ et r en fonction de t , il faut en produire une troisième qui donne la valeur de la vitesse v : c'est celle qui résulte immédiatement du principe des forces vives

$$v^2 = 2gh \left[(n^2 + 1) \frac{\theta^2}{r^2} - n^2 \right],$$

et l'on obtient ainsi la solution complète.

Ainsi voilà deux exemples d'un même problème de Dynamique dans lesquels les deux trajectoires sont différentes à cause de la différence des conditions initiales du mouvement, ce qui n'empêche pas l'identité des lois de ce mouvement déduites ou du moins résultant des deux solutions.

SCOLIE III. — Quand on discute, au seul point de vue de la Géométrie, l'équation de la spirale hyperbolique, on exprime sa propriété asymptotique par rapport au pôle, en disant que chaque spire fait une infinité de circonvolutions autour de ce point, sans *jamais* l'atteindre. Mais cet *adverbe de temps* doit être réformé dans le cas où la courbe dont il s'agit devient la trajectoire d'un mobile qui peut exécuter un nombre infini de révolutions pendant un temps fini, car la Mécanique n'est point ainsi en désaccord avec la Géométrie, donnant une équation qui est satisfaite par $r = 0$ et $\theta = \infty$.

J'ai annoncé, dans la Préface, que le résultat de mon étude peut provoquer des doutes et des objections. A ce sujet, il n'est peut-

être pas sans intérêt de montrer comment peut en produire un article susceptible d'être traduit en paradoxe apparent, et de mettre cet article en regard d'un passage de la *Mécanique* de Poisson auquel on peut aussi attribuer un caractère paradoxal.

Dans le n° 5 de mon Mémoire, on trouve que :

« Un mobile met un *temps fini* à parcourir un *chemin infini* » ; au rebours de ce fait, le Traité de Poisson, p. 294, dit que :

« Un mobile met un *temps infini* à parcourir un *chemin fini*. » J'établis la première proposition par une induction que je crois être de bon aloi.

Quant à la seconde, Poisson se borne à l'exprimer; mais, s'il avait voulu la démontrer, il se serait aperçu qu'elle n'a pas toute la généralité qu'il lui attribue. Cependant, plus loin (n° 131, p. 339), il prouve que, dans un cas particulier du mouvement d'un point pesant sur la circonférence d'un cercle vertical, le mobile met effectivement un *temps infini* à parcourir l'*arc fini* ABA'E. Pour donner un sens pratique à ce résultat, j'observe que, dans une position prise à volonté, le mobile est à une distance du point culminant E, exprimée par $\sqrt{2az}$. Or on peut donner à z une valeur qui rende cette distance moindre que toute quantité donnée, quelque petite qu'elle soit : donc, si l'on porte cette valeur de z dans la formule qui exprime t en fonction de z , on connaîtra la durée du temps que le mobile emploiera à approcher, autant que l'on voudra, de la fin de son trajet; et l'on obtiendra ainsi une solution approximative, tout aussi valable que celle dont il faut bien se contenter quand on rencontre un nombre incommensurable tel que π , e , ou l'inconnue d'une équation de degré supérieur, etc.

Deux théorèmes relatifs aux centres des courbes algébriques;
par M. SCHOUTE.

(Séance du 17 novembre 1882.)

Dans son excellent Mémoire sur les courbes à centres et leurs propriétés, etc. (*Journal de Crelle*, t. 47, p. 7-105), Steiner a

donné, par rapport aux courbes du troisième ordre, les deux théorèmes suivants :

1° *Le lieu des centres des courbes C^3 à centre qui passent par six points donnés est une courbe du cinquième ordre.*

2° *Par sept points donnés on peut faire passer neuf courbes C^3 à centre.*

On a, en général, dans le cas d'une courbe C^m d'ordre

<i>Pair.</i>	<i>Impair.</i>
1° Le lieu des centres des courbes C^m à centre, qui passent par	1° Le lieu des centres des courbes C^m à centre, qui passent par
$\frac{1}{4}(m+2)^2$	$\frac{1}{4}(m+1)(m+3)$
points donnés, est une courbe de l'ordre	points donnés, est une courbe de l'ordre
$\frac{1}{24}m(m+2)(m+4),$	$\frac{1}{24}(m+1)(m+2)(m+3).$
2° Par	2° Par
$\frac{1}{4}(m+2)^2 + 1$	$\frac{1}{4}(m+1)(m+3) + 1$
points donnés, on ne peut pas faire passer plus de	points donnés, on ne peut pas faire passer plus de
$\frac{1}{576}m(m+4)$ $\times (m^4 + 8m^3 + 2m^2 - 56m + 72)$	$\frac{1}{576}(m+1)(m^2-1)$ $(m^3 + 9m^2 + 14m - 30)$
courbes C^m à centre.	courbes C^m à centre, si $m > 3$. (Pour $m = 3$, on trouve 9 au lieu de 10).

Sur le théorème de M. Laisant, relatif aux centres de gravité;
par M. SCHLEGEL.

(Séance du 15 novembre 1882.)

On sait que les opérations et notions de l'*Ausdehnungslehre* sont particulièrement propres à démontrer des théorèmes de Mé-

canique (1). C'est ce qui arrive eu égard au théorème susdit (*Bulletin*, t. X, p. 40 et 131). En remarquant: 1° que $(A - B)$ est la partie de la droite comprise entre les points A et B; 2° que la multiplication d'une droite par i^n signifie que la droite tourne de n angles droits (n étant un nombre quelconque réel); 3° que le centre de gravité G_a des n points $A_1, \dots, A_n$ est donné par l'équation

$$n G_a = A_1 + \dots + A_n,$$

on peut démontrer le théorème en question par le calcul suivant sans opérations symboliques, seulement au moyen des quatre règles.

Les équations

$$(1) \quad (A_r - B_r) i^\omega = (A_r - B'_r), \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

disent que les droites $A_r B_r$ deviennent $A_r B'_r$, en tournant de l'angle ω .

Les équations

$$(2) \quad \begin{cases} n \cdot G_a = A_1 + \dots + A_n, \\ n \cdot G_b = B_1 + \dots + B_n, \\ n \cdot G'_b = B'_1 + \dots + B'_n \end{cases}$$

disent que les points G_a, G_b, G'_b sont les centres de gravité des points A_r, B_r, B'_r .

On tire de ces équations

$$\begin{aligned} n (G_a - G_b) &= (A_1 - B_1) + (A_2 - B_2) + \dots + (A_n - B_n), \\ n (G_a - G'_b) &= (A_1 - B'_1) + (A_2 - B'_2) + \dots + (A_n - B'_n). \end{aligned}$$

En multipliant la première équation par i^ω et tenant compte des équations (1), on trouve, après avoir supprimé le facteur n ,

$$(G_a - G_b) i^\omega = (G_a - G'_b),$$

ce qui est le théorème en question.

On voit que, sans rien changer au calcul, les simples points A_r, B_r, B'_r peuvent être remplacés par $m_r A_r, m_r B_r, m_r B'_r$ (m_r signifiant la masse du point).

(1) Voir, par exemple, le Mémoire de Grassmann : *Die Mechanik nach den Principien der Ausdehnungslehre* (Mathem. Annalen, t. XII, p. 222).

Quant aux méthodes suivies par MM. Laisant et Laquière, il faut remarquer que la méthode des quaternions, ainsi que celle des équipollences, sont des cas particuliers de l'*Ausdehnungslehre*. [Voir le Mémoire : *Der Ort der Hamilton'schen Quaternionen in der Ausdehnungslehre* (*Mathem. Annalen*, t. XII, p. 375) et GRASSMANN, *Die Ausdehnungslehre*, Berlin, 1862, p. VIII]. C'est pourquoi il y a aussi de l'affinité entre les trois démonstrations du théorème de M. Laisant.

Aperçu d'une solution géométrique du problème suivant :
« Trouver le lieu des centres des hyperboles équilatères qui ont un contact du troisième ordre avec une parabole donnée » ⁽¹⁾; par M. SCHOUTE.

(Séance du 17 novembre 1882.)

Le problème en question se résout sans peine par l'analyse; le lecteur en trouvera sans doute une solution géométrique avec les indications suivantes. Si l'on fait une figure où A représente un point arbitraire de la parabole, B le point d'intersection de la normale en A à la parabole et de sa directrice, C un point de cette normale déterminé au delà de la directrice de manière que $CB = 3BA$:

(a) Les hyperboles équilatères, qui ont au point A un contact du second ordre avec la parabole, passent toutes par le point C;

(b) Le lieu des centres des hyperboles équilatères, qui ont au point A un contact du second ordre avec la parabole, est le cercle, dont B est le centre et BA le rayon;

(c) Le centre de l'hyperbole équilatère, qui a au point A un contact du troisième ordre avec la parabole, est le point symétrique de A par rapport à la directrice;

⁽¹⁾ Le problème a été posé par M. W. Mantel dans un Recueil hollandais : *Wiskundige opgaven*.

(d) *Le lieu cherché est la parabole symétrique de la parabole donnée par rapport à sa directrice.*

En passant, on trouve ce théorème :

(e) *Les deux paraboles, qui ont en un point donné un contact du troisième ordre avec une hyperbole équilatère donnée, ont la même directrice, la droite élevée perpendiculairement sur le milieu du rayon vecteur du point par rapport au centre de la courbe,*

et la solution géométrique des deux problèmes :

(f) *Construire les deux asymptotes, les sommets et les foyers de l'hyperbole équilatère, qui a un contact du troisième ordre avec une parabole donnée en un point donné.*

(g) *Construire la directrice et les foyers des deux paraboles qui ont un contact du troisième ordre avec une hyperbole équilatère donnée en un point donné.*

Je termine par une remarque. Le théorème fondamental : *Toute hyperbole équilatère qui contient les trois sommets d'un triangle contient aussi le point d'intersection des hauteurs*, théorème dont j'ai fait usage dans la démonstration du lemme (a), permet de remplacer la condition quadruple imposée à l'hyperbole équilatère, d'avoir en A un contact du troisième ordre avec la parabole donnée, par deux conditions doubles, celles de toucher en A la parabole et en C une droite déterminée qu'on construit sans peine.

Intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre à n variables indépendantes; par M. H. LEMONNIER (1).

(Séance du 21 juillet 1882.)

1. Étant donnée l'équation

$$(1) \quad f(x, x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, p_2, \dots, p_n) = 0,$$

où $x_1, \dots, x_n$ désignent n variables indépendantes, et x une fonc-

(1) L'auteur de ce travail vient d'être inopinément enlevé à la Science, à sa

tion de ces variables ayant $p_1, \dots, p_n$ pour dérivées partielles par rapport à elles, nous nous proposons d'en obtenir une intégrale complète.

L'équation

$$(2) \quad F(x, x_1, \dots, x_n) = 0$$

sera une intégrale de (1) lorsque par la substitution de toute valeur de x qui en provient et des dérivées partielles correspondantes, dans cette équation (1), on obtient une identité, sans attribuer de valeurs particulières à $x_1, \dots, x_n$, ni à des constantes arbitraires pouvant figurer dans F , étrangères à f .

Soit posé

$$(3) \quad df = X dx + X_1 dx_1 + \dots + X_n dx_n + P_1 dp_1 + \dots + P_n dp_n.$$

Tant que dans le facteur f on considère $x, p_1, \dots, p_n$ comme dues à l'équation (2), les dérivées partielles de f par rapport aux variables $x_1, \dots, x_n$ sont nulles séparément.

On a donc

$$(4) \quad X_i + X p_i + P_1 \frac{\partial p_1}{\partial x_i} + \dots + P_n \frac{\partial p_n}{\partial x_i} = 0,$$

i variant de 1 à n .

En raison des égalités

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial p_n}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial x_n},$$

c'est avoir

$$(4') \quad X_i + X p_i + P_1 \frac{\partial p_i}{\partial x_1} + \dots + P_n \frac{\partial p_i}{\partial x_n} = 0;$$

mais de

$$dp_i = \frac{\partial p_i}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial p_i}{\partial x_n} dx_n$$

on tire

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\partial x_i} \left(\partial p_i - \frac{\partial p_i}{\partial x_1} dx_1 - \dots - \frac{\partial p_i}{\partial x_{i-1}} dx_{i-1} - \frac{\partial p_i}{\partial x_{i+1}} dx_{i+1} - \frac{\partial p_i}{\partial x_n} dx_n \right),$$

famille et à ses amis. Le 27 octobre dernier, cet homme de bien, ce savant aussi modeste qu'il était distingué, ce professeur de mérite que tant de travaux désignaient pour une situation plus brillante, est mort à Caen des suites d'une chute qu'il avait faite quelques jours auparavant. La Société mathématique de France perd en lui un membre actif et dévoué, dont le Conseil a plus d'une fois apprécié les lumières; quelques-uns de ses membres regrettent un ami sincère et éclairé. Puisse ce dernier hommage adoucir les regrets d'une famille si éprouvée! H. P.

ce qui, substitué dans (4'), change la relation en

$$(4'') \quad \left\{ \begin{array}{l} (X_i + X p_i) dx_i + P_i dp_i + (P_1 dx_i - P_i dx_1) \frac{\partial p_i}{\partial x_i} + \dots \\ + (P_{i-1} dx_i - P_i dx_{i-1}) \frac{\partial p_i}{\partial x_{i-1}} \\ + (P_{i+1} dx_i - P_i dx_{i+1}) \frac{\partial p_i}{\partial x_{i+1}} + \dots + (P_n dx_i - P_i dx_n) \frac{\partial p_i}{\partial x_n} = 0. \end{array} \right.$$

Si actuellement, au lieu d'estimer indépendantes les unes des autres les valeurs de $x_1, \dots, x_n$, nous les lions par les $n - 1$ relations

$$(5) \quad \frac{dx_i}{P_i} = \frac{dx_1}{P_1} = \dots = \frac{dx_{i-1}}{P_{i-1}} = \frac{dx_{i+1}}{P_{i+1}} = \dots = \frac{dx_n}{P_n},$$

l'équation (4'') se réduit à

$$\frac{dx_i}{P_i} = \frac{-dp_i}{X_i + X p_i},$$

de sorte que l'on a

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \dots = \frac{dx_i}{P_i} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{-dp_i}{X_i + X p_i};$$

et cela s'appliquant à toutes les valeurs de i depuis 1 jusqu'à n , il s'ensuit

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{-dp_1}{X_1 + X p_1} = \frac{-dp_2}{X_2 + X p_2} = \dots = \frac{-dp_n}{X_n + X p_n}.$$

En tenant compte de ce que par l'équation (2) l'on a

$$(6) \quad dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n,$$

le système de ces équations est finalement

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} \\ = \frac{dx}{P_1 p_1 + \dots + P_n p_n} = \frac{-dp_1}{X_1 + X p_1} = \dots = \frac{-dp_n}{X_n + X p_n}. \end{array} \right.$$

Ainsi, du moment que l'équation (1) est vérifiée par l'équation (2), toute valeur de x tirée de cette équation (2) et les valeurs de p_i correspondantes satisfont au système d'équations différentielles (7), avec des valeurs de $x_1, x_2, \dots, x_n$ qui, au lieu de rester

indépendantes, soient liées entre elles par $n - 1$ relations faisant partie de ce système (7).

2. Considérons en lui-même le système (8). L'intégration complète de ce système, soit qu'elle s'étende à toutes valeurs réelles et imaginaires de l'une des variables, soit qu'elle doive se limiter à tels ou tels champs de valeurs, fournira $2n$ équations avec $2n$ constantes arbitraires $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$ susceptibles de se déterminer, de façon que pour une valeur attribuée arbitrairement à l'une des variables, à x par exemple, au moins dans un champ de valeurs possibles, on obtienne pour $x, x_2, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$ des valeurs pareillement arbitraires $x_0, x_{20}, \dots, x_{n0}; p_{10}, \dots, p_{n0}$.

Il est à remarquer que les équations (7), en même temps qu'elles impliquent la relation (6), donnent

$$X dx + X_1 dx_1 + \dots + X_n dx_n + P_1 dp_1 + \dots + P_n dp_n = 0,$$

c'est-à-dire $df = 0$, ou $f = \text{const.}$

C'est-à-dire que les valeurs de $x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n$ en fonction de x_1 , par exemple, substituées dans f , en font une constante.

En égalant le résultat à zéro, on établira une relation entre ces constantes; l'une d'elles s'ensuivra en fonction des autres; leur nombre sera réduit à $n - 1$ et l'équation (1) deviendra l'une des équations intégrales.

Pour qu'il en soit ainsi, il suffira du reste, dans le cours de l'intégration, de faire de $f = 0$ l'une des équations intégrales; le nombre des constantes arbitraires se trouvera être $n - 1$ dans le système intégral. Mais si, pour $x_1 = x_{10}$, les constantes sont alors $x_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}; p_{10}, \dots, p_{n0}$, ce sera sous la réserve d'avoir $f(x_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}; p_{10}, \dots, p_{n0}) = 0$.

Dans son beau et renommé Mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles, M. Darboux a tiré un heureux parti de l'introduction d'une nouvelle variable t dans le système (7). Suivant son inspiration, prenons pour ce système

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{P_1} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} \\ = \frac{dx}{P_1 p_1 + \dots + P_n p_n} = \frac{-dp_1}{X_1 + X p_1} = \dots = \frac{-dp_n}{X_n + X p_n} = \frac{dt}{T}. \end{cases}$$

Les valeurs des ϖ_i qui se présentent d'abord en fonction de t , $x_1, \dots, x_n$ et des constantes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, peuvent, eu égard aux équations (8), se concevoir exprimées en fonction de t et des $2n$ constantes $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$. Si alors les binômes $p_i - \varpi_i$ sont nuls identiquement, on voit que, $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ l'étant aussi, la variable t ne figurera pas explicitement dans l'équation (9).

Désignons par α l'une quelconque des $2n$ constantes dans le système intégral (8). Si on lui attribue une variation $\delta \alpha$, ces équations donneront

$$\delta x = \frac{\partial \varpi_1}{\partial \alpha} \delta \alpha, \quad \delta x_1 = \frac{\partial \varpi_1}{\partial \alpha} \delta \alpha, \quad \dots, \quad \delta x_n = \frac{\partial \varpi_n}{\partial \alpha} \delta \alpha,$$

et par l'équation (9) on aura

$$(12) \quad \delta x = \varpi_1 \delta x_1 + \dots + \varpi_n \delta x_n + \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \delta \alpha.$$

Mais, quand α sera l'une des constantes éliminées, ou une constante que l'élimination fait disparaître sans qu'on vise à l'éliminer, cette relation (12) se réduit à

$$(13) \quad \delta x = \varpi_1 \delta x_1 + \dots + \varpi_n \delta x_n.$$

Comme l'on a

$$p_1 \delta x_1 + p_2 \delta x_2 + \dots + p_n \delta x_n = p_1 \frac{\partial \varpi_1}{\partial \alpha} \delta \alpha + \dots + p_n \frac{\partial \varpi_n}{\partial \alpha} \delta \alpha,$$

on voit, par l'équation (12), que l'on a

$$(14) \quad \begin{cases} (\varpi_1 - p_1) \delta x_1 + \dots + (\varpi_n - p_n) \delta x_n \\ + \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \delta \alpha = \delta x \left(\frac{\partial \varpi_1}{\partial \alpha} - p_1 \frac{\partial \varpi_1}{\partial \alpha} - p_2 \frac{\partial \varpi_2}{\partial \alpha} - \dots - p_n \frac{\partial \varpi_n}{\partial \alpha} \right). \end{cases}$$

Quand α est une constante qui ne subsiste pas dans l'équation (9), si les $\varpi_i - p_i$ sont nuls identiquement, il en sera de même de la fonction

$$u_\alpha = \frac{\partial \varpi_1}{\partial \alpha} - p_1 \frac{\partial \varpi_1}{\partial \alpha} - \dots - p_n \frac{\partial \varpi_n}{\partial \alpha} = \frac{\partial x}{\partial \alpha} - p_1 \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} - \dots - p_n \frac{\partial x_n}{\partial \alpha}.$$

Alors que les $p_i - \varpi_i$ seront tous nuls, mais que α figurera dans la fonction Φ , la dérivée partielle $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}$, n'étant pas nulle identiquement, la fonction u_α ne sera pas nulle non plus identiquement.

Ces faits constatés, supposons que, pour chacune des n constantes éliminées, le déterminant Δ n'étant pas nul identiquement, on ait

$$u_n = 0,$$

sans détermination de t , ni des constantes; alors on a pour ces n constantes les n relations

$$(15) \quad (\varpi_1 - p_1) \frac{\partial x_1}{\partial x_i} + (\varpi_2 - p_2) \frac{\partial x_2}{\partial x_i} + \dots + (\varpi_n - p_n) \frac{\partial x_n}{\partial x_i} = 0,$$

i étant susceptible des valeurs $n+1, \dots, 2n$: ce qui, Δ étant différent de 0, exige que l'on ait

$$\varpi_i - p_i = 0,$$

pour $i = 1, 2, \dots, n$.

Mais si les p_i sont de même valeur que les ϖ_i quand leurs expressions se prennent en fonction de t et des $2n$ constantes, il est à observer que si, de part et d'autre, on remplace les constantes éliminées $\alpha_{n+1}, \dots, \alpha_{2n}$ par leurs valeurs en $x_1, x_2, \dots, x_n$, l'identité de valeurs subsistera. Par là $\varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_n$ recouvreront leurs valeurs telles que les donne l'équation (9), valeurs qui, d'après la relation (11), ne dépendront que de $x_1, x_2, \dots, x_n$ sans que t y figure.

Or l'équation (1), faisant partie du système intégral ou s'y trouvant impliquée, devient identique quand on y substitue les valeurs (9) de $x, x_1, \dots, p_n$, quelles que soient les valeurs attribuées à t et aux $2n$ constantes. Si l'on y substitue la valeur (9) de x et celles de $p_1, p_2, \dots, p_n$ qui sont celles de $\varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_n$, toutes fonctions de $x_1, x_2, \dots, x_n$ et des constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sans que t y figure, elle se trouvera satisfaite, identiquement, sans détermination aucune, ni des constantes subsistantes, ni des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, car à la place de l'indétermination des constantes $\alpha_{n+1}, \dots, \alpha_{2n}$ se trouvera là celle des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, puisque, par le fait seul que Δ est différent de zéro, l'ensemble des valeurs de $x_1, x_2, \dots, x_n$ comme indéterminées est équivalent à celui des constantes $\alpha_{n+1}, \dots, \alpha_{2n}$.

Il est donc ainsi établi que l'équation (9), si u_n est nul identiquement pour chacune des n constantes dont l'élimination conduit à l'équation (9), sans que Δ le soit, constitue, ne contenant pas t explicitement, une équation intégrale de l'équation (1).

De plus, toute constante du système intégral (8) pour laquelle u_α est différent de zéro subsiste dans l'équation (9), de sorte que c'est une intégrale complète quand les n constantes non visées dans l'élimination donnent lieu à des valeurs de u_α qui ne sont pas nulles.

Dans tous les cas où l'équation (9) est une intégrale de l'équation (1), les constantes qui y subsistent sont celles pour lesquelles l'expression u_α est différente de zéro.

Comme fonction de t , u_α est susceptible d'une expression remarquable que donne immédiatement la recherche de sa dérivée.

Observons que l'on a

$$\begin{aligned} \frac{du_\alpha}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{dx}{dt} - p_1 \frac{\partial}{\partial x} \frac{dx_1}{dt} - \dots - p_n \frac{\partial}{\partial x} \frac{dx_n}{dt} - \frac{dp_1}{dt} \frac{\partial x_1}{\partial x} - \dots - \frac{dp_n}{dt} \frac{\partial x_n}{\partial x}, \\ \frac{du_\alpha}{dt} &= \frac{\partial \frac{P_1 p_1 + \dots + P_n p_n}{T}}{\partial x} - p_1 \frac{\partial \frac{P_1}{T}}{\partial x} - \dots - p_n \frac{\partial \frac{P_n}{T}}{\partial x} \\ &\quad + \frac{X_1 + X p_1}{T} \frac{\partial x_1}{\partial x} + \dots + \frac{X_n + X p_n}{T} \frac{\partial x_n}{\partial x} \\ &= \frac{1}{T} \left(P_1 \frac{\partial p_1}{\partial x} + \dots + P_n \frac{\partial p_n}{\partial x} + X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x} + \dots + X_n \frac{\partial x_n}{\partial x} \right) \\ &\quad + \frac{X}{T} \left(p_1 \frac{\partial x_1}{\partial x} + \dots + p_n \frac{\partial x_n}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

ce qui, à cause de

$$X \frac{\partial x}{\partial x} + X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x} + \dots + X_n \frac{\partial x_n}{\partial x} + P_1 \frac{\partial p_1}{\partial x} + \dots + P_n \frac{\partial p_n}{\partial x} = 0,$$

relation qui vient de ce que, quelle que soit la constante α , l'équation $f=0$ est impliquée dans le système intégral (9), peut se changer en

$$\frac{du_\alpha}{dt} = - \frac{X}{T} \left(\frac{\partial x}{\partial x} - p_1 \frac{\partial x_1}{\partial x} - \dots - p_n \frac{\partial x_n}{\partial x} \right) = - \frac{X}{T} u_\alpha,$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{du_\alpha}{u_\alpha} &= - \frac{X}{T}, \\ u_\alpha &= u_{\alpha_0} e^{-\int_{t_0}^t \frac{X}{T} dt}. \end{aligned}$$

u_{α_0} désignant ce que devient u_α pour $t = t_0$.

Il ressort de cette expression, que si, pour $t = t_0$, on a $\frac{X}{T}$ d'une valeur finie, tant que, t variant, cela continuera d'avoir lieu, la valeur de u_x ne sera pas nulle, si u_{x_0} est différent de zéro, mais qu'elle ne cessera pas d'être nulle si u_{x_0} se trouve nul.

Cette propriété est utile pour reconnaître ce qu'il en est de u_x lorsque son expression se simplifie pour une valeur particulière de t , et surtout dans le cas où les constantes sont les valeurs de $x, x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n$ répondant à une valeur particulière de t , eu égard à ce qu'on ait $f = 0$.

Si, pour $t = t_0$, les variables deviennent $x_0, x_{10}, \dots, p_{n0}$, l'expression de $u_{p_{i0}}$ sera nulle, en ce que $\frac{\partial x_0}{\partial p_{i0}}, \frac{\partial x_{10}}{\partial p_{i0}}, \dots, \frac{\partial x_{n0}}{\partial p_{i0}}$, se trouvent nuls. Il suffira en conséquence que les p_{i0} soient indépendants les uns des autres et que le Δ correspondant à l'ensemble des p_{i0} ne soit pas nul identiquement, pour que, par l'élimination des p_{i0} on ait une équation intégrale; cette intégrale, d'ailleurs, sera complète si les $u_{x_{i0}}$ sont tous différents de zéro : c'est le procédé connu de Jacobi.

Les constantes étant les mêmes, si l'on pose avec Cauchy $x_0 = \lambda(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$, λ indiquant une fonction arbitraire, et qu'on fasse disparaître x_0 par la substitution de λ , il s'ensuivra

$$u_{x_{i0}} = \frac{\partial \lambda}{\partial x_{i0}} - p_{i0},$$

vu que

$$\frac{\partial x_{j0}}{\partial x_{i0}} = 0 \quad (j \neq i).$$

Cette valeur de $u_{x_{i0}}$ sera nulle, si p_{i0} se prend égal à $\frac{\partial \lambda}{\partial x_{i0}}$. Donc, si toutes les constantes $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$ figurent dans la fonction λ et qu'à chacune il corresponde une dérivée partielle de valeur finie, on aura par la détermination des p_{i0} dont on vient de parler des u_x de valeur nulle. Quant au déterminant Δ , il se trouve égal pour $t = t_0$ à

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & . & . & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

qu'il varie avec t d'une manière continue, $\frac{X}{T}$ étant par ailleurs d'une valeur finie, on voit que l'élimination de $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$ mènera à une intégrale de l'équation (1). Il ne s'y trouvera aucune des constantes arbitraires primitives. Mais, si l'on fait dépendre λ de n constantes $A_1, A_2, \dots, A_n$ telles qu'à leur égard les u_λ soient différents de zéro, on obtiendra une intégrale complète. Notamment, si l'on pose $x_0 = A_1 x_{10} + A_2 x_{20} + \dots + A_n x_{n0}$, il est à observer qu'il s'ensuivra, après le remplacement de x_0 et des $p_{i0} = A_i$,

$$u_{\lambda i} = u_{x_0} \frac{\partial x_0}{\partial A_i} = x_{i0} e^{-\int_{t_0}^t \frac{X}{T} dt},$$

car $u_{x_0} = 1$, pour $t = t_0$, d'où une intégrale complète où les constantes seront $A_1, A_2, \dots, A_n$.

On pourra encore prendre $x_0 = \lambda(x_{10}, \dots, x_{k0})$ avec $p_{i0} = \frac{\partial \lambda}{\partial x_{i0}}$ pour $i = 1, \dots, k$; on aura $u_\alpha = 0$ pour $\alpha = x_{10}, x_{20}, \dots, x_{k0}, p_{k+1,0}, \dots, p_{n0}$. L'élimination de ces constantes conduira à une intégrale qui dépendra de constantes introduites dans λ , si les u_α à leur égard ne sont pas de valeur nulle.

4. Je ne m'arrête pas sur des cas particuliers, comme celui où l'équation (1) est linéaire, ni celui où elle est homogène par rapport aux p_i , ni sur le cas de deux variables indépendantes.

Dans l'intégration du système (7), il se peut qu'il soit avantageux, pour les calculs, d'introduire d'autres constantes que les x_{i0} et p_{i0} . Revenons donc aux équations (8) où les constantes sont désignées par $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$.

Quand les u_α se trouvaient nuls pour n de ces constantes, et différents de zéro pour les n autres, nous avons reconnu que l'élimination des premières pour les $n+1$ équations donnant $x, x_1, \dots, x_n$ en fonction de t et des constantes, menait à une intégrale complète.

Dans les cas où il y a plus de n constantes pour lesquelles l'expression de u_α est nulle, sans qu'il en soit ainsi pour toutes, il est aisé d'opérer sur les constantes un changement qui fait rentrer dans le cas précédent.

Supposons qu'on ait

$$u_{\alpha_1} = 0, \quad u_{\alpha_2} = 0, \quad \dots, \quad u_{\alpha_n} = 0, \quad u_{\alpha_{n+1}} \neq 0.$$

Si l'on fait

$$\alpha_{k+1} = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_k x_k + A_{k+1},$$

il s'ensuivra, après substitution de cette valeur,

$$v_{\alpha_1} = u_{\alpha_1} + u_{\alpha_{k+1}} A = u_{\alpha_{k+1}} A_1 \neq 0$$

$$v_{\alpha_2} = u_{\alpha_{k+1}} A_2 \neq 0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$v_k = u_{\alpha_{k+1}} A_k \neq 0,$$

et

$$v_{A_i} = u_{\alpha_{k+1}} x_i \neq 0.$$

On voit que de cette façon on obtient à la place des u_x nuls autant de v_x correspondants qui ne le sont plus, se rapportant aux mêmes constantes. Quant à la constante pour laquelle u_x n'est pas nul, elle disparaît, mais peut se considérer comme remplacée par A_{k+1} ou l'un des coefficients A_i , en lui laissant une valeur indéterminée, les autres pouvant recevoir à volonté des valeurs numériques différentes de zéro.

Par ce moyen, on pourra réduire à n , s'il est supérieur, le nombre des constantes donnant des u_x nuls, pourvu qu'il s'en trouve un qui soit différent de zéro, ce qui permettra d'obtenir une intégrale complète.

S'il arrive que les valeurs de u_x répondant à deux constantes α_1, α_2 soient différentes de zéro, mais dans un rapport k indépendant de t et de ces constantes, de sorte que $u_{\alpha_2} = k u_{\alpha_1}$, il suffira de faire $x_1 = -k x_2 + A_1$ pour qu'il s'ensuive $v_{\alpha_2} = u_{\alpha_2} - k u_{\alpha_1} = 0$, et d'autre part $v_{A_1} = u_{\alpha_1} \neq 0$; de sorte que, à la place de α_1 se trouvera A_1 donnant pareillement un u_x différent de zéro, tandis que u_{α_2} sera remplacé par v_{α_2} égal à zéro.

Il se peut qu'en opérant ainsi une ou plusieurs fois on amène n constantes à présenter des u_x nuls, au lieu d'en avoir un moindre nombre.

À défaut de pareilles circonstances, s'il se trouve que le nombre des u_x nuls n'atteigne pas n , une ressource toujours possible sera de passer des constantes α à d'autres qui soient pour $t = t_0$ les valeurs $x_0, x_{i0}, \dots, p_{i0}$ pour agir ensuite de l'une des façons indiquées.

§. Quand le système (7) s'intègre sans y introduire une nou-

velle variable t , qu'on y prend x_1 , par exemple, pour variable indépendante, les constantes ne sont plus qu'au nombre de $2n-1$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n-1}$ susceptibles de se changer, pour $x = x_{10}$, en valeurs correspondantes $x_0, x_{20}, \dots, x_{n0}; p_{10}, \dots, p_{n0}$ qui, de fait, se réduisent à $2n-1$ à cause de la condition

$$f(x_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}; p_{10}, \dots, p_{n0}) = 0,$$

x_{10} , comme t_0 , pouvant d'ailleurs être fixé numériquement, ou laissé indéterminé.

L'analyse précédente s'appliquera à ces circonstances, t n'étant qu'à remplacer par x_1 , T par P_1 . On aura alors

$$u_x = \frac{\partial x}{\partial z} - p_2 \frac{\partial x_2}{\partial z} - \dots - p_n \frac{\partial x_n}{\partial z},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial x_{n+1}} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial x_{n+1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_{2n-1}} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial x_{2n-1}} \end{vmatrix},$$

puis

$$u_x = u_{x_0} e^{-\int \frac{\Delta}{P_1} dx_1}$$

Toutefois l'équation (9), indépendante de Δ quand les $p_i = \pi_i$ sont nuls, ne sera pas indépendante forcément de x_1 .

II.

1. Comme problème inverse de celui dont nous venons de nous occuper, se présente la question d'obtenir au moyen d'une intégrale complète de l'équation (1) un système intégral correspondant des équations (7).

La solution est immédiate lorsque l'intégrale complète connue est sous la forme

$$F(x, x_1, x_2, \dots, x_n; x_0, x_{10}, \dots, x_{n0}) = 0,$$

les $x_0, x_{10}, \dots, x_{n0}$ étant tous des indéterminées.

En effet, si le système intégral se suppose sous une forme analogue, soit que la variable indépendante s'y trouve x_k ou y soit t , la condition d'avoir $f(x_0, x_{10}, \dots, p_{n0}) = 0$ étant remplie, les

équations qui le composeront, comme toutes celles qu'on en déduirait, seront telles qu'elles subsisteront, quand un échange s'y opérera entre t ,

$$x, x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n \text{ et } t_0, x_0, x_{10}, \dots, x_{n0}; p_{10}, \dots, p_{n0}.$$

Soit

$$F(x, x_1, \dots, x_n; x_0, x_{10}, \dots, x_{n0}) = 0$$

l'intégrale complète.

Elle donnera les n équations •

$$(17) \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

qui feront partie du système intégral. Dès lors il y aura comme correspondantes les n équations

$$(18) \quad \frac{\partial F}{\partial x_{i0}} + p_{i0} \frac{\partial F}{\partial x_0} = 0,$$

où les p_{i0} constitueront $n - 1$ constantes arbitraires, l'une d'elles se déterminant par l'équation

$$f(x_0, x_{10}, \dots, x_{n0}, p_{10}, \dots, p_{n0}) = 0.$$

Il y a bien lieu d'observer que par $F = 0$ et les n équations (17) on peut obtenir l'équation (1), et par $F = 0$ avec les équations (18) obtenir $f(x_0, x_{10}, \dots, p_{n0}) = 0$. Il n'y aura de fait qu'un système de $2n$ équations distinctes comprenant ou impliquant $f = 0$, qui constituera un système intégral avec $2n - 1$ constantes arbitraires des équations (7), correspondant bien à l'intégrale complète connue.

Considérons ces équations sous la forme

$$(19) \quad F = 0, \quad \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{-1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{p_1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{p_2} = \dots = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{p_n},$$

$$(20) \quad \frac{\frac{\partial F}{\partial x_0}}{-1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{10}}}{p_{10}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{20}}}{p_{20}} = \dots = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{n0}}}{p_{n0}},$$

et soit, en supposant x_1 la variable indépendante,

$$u_i = \frac{\partial x}{\partial x_{i0}} - p_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_{i0}} - p_3 \frac{\partial x_3}{\partial x_{i0}} - \dots - p_n \frac{\partial x_n}{\partial x_{i0}} \quad (i = 2, 3, \dots, n).$$

d'où résulte

$$p_{10} + u_{10} = 0,$$

et de là

$$u_1 = -p_{10}M.$$

Par conséquent

$$(20') \quad \frac{\frac{\partial F}{\partial x_0}}{u_0} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{10}}}{u_1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{20}}}{u_2} = \dots = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{n0}}}{u_n},$$

pour les équations (20) sous une autre forme.

2. Au reste, du moment que l'équation

$$F(x, x_1, \dots, x_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$$

est une équation intégrale de l'équation (1) déduite du système des équations (7), elle devient identique quand on y porte à la place de $x_1, x_2, \dots, x_n$ leurs valeurs en fonction de x , et des constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n-1}$, de sorte que l'on a

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0,$$

ce qui, avec les équations

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

donne

$$\frac{\partial F}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} + \dots + p_n \frac{\partial x_n}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0,$$

ou

$$(21) \quad \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial x}{\partial \alpha} + 1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \alpha}}{u_n}.$$

Pour les constantes $x_0, x_{20}, \dots, x_{n0}$, cette relation se traduit en

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial x}{\partial \alpha} + 1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_0}}{u_0} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{20}}}{u_2} = \dots = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{n0}}}{u_n}.$$

Comme l'on a également

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0,$$

par conséquent

$$\frac{\partial F}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial x_1} - p_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_1} - \dots - p_n \frac{\partial x_n}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0,$$

ou

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{-1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{u_{x_1}},$$

on voit que

$$(22) \quad \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{-1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_0}}{u_0} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{u_{x_1}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{20}}}{u_2} = \dots = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{n0}}}{u_n},$$

ce qui, rapproché des formules (20'), accuse la formule

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{u_{x_1}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{10}}}{u_{x_{10}}}.$$

Pour le problème posé, le cas général, celui où dans l'intégrale complète les n constantes sont autres que celles dont il vient d'être question, demande à être traité par des considérations différentes.

3. Soit

$$(2) \quad F(x, x_1, \dots, x_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$$

une intégrale complète de l'équation (1).

Prenons-la sous la forme

$$(2') \quad x = \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

L'équation (1) peut se supposer résolue par rapport à l'une des dérivées partielles p_i . Soit ainsi

$$(1') \quad p_1 = \psi(x, x_1, \dots, x_n, p_2, \dots, p_n).$$

Considérons avec l'équation (2)' les n équations

$$(23) \quad p_i = \frac{\partial \Psi}{\partial x_i},$$

et posons, d'autre part,

$$(24) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_i} = \zeta_i.$$

les lettres β_i désignant n quantités que la suite déterminera.

Nous avons là $2n + 2$ équations, qui au fond ne reviennent qu'à $2n + 1$ équations distinctes, l'équation (1) résultant des équations (23) et de (2). Si les β_i deviennent des fonctions d'une variable t , elles détermineront $x, x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n$ également en fonction de t .

Le signe de différentiation d se rapportant à t , le signe δ se rapportera, peu importe de quelle façon, aux constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Nous aurons

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n = \psi dx_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} dx_n,$$

puis

$$\begin{aligned} \delta dx &= dx_1 \delta \psi + dx_2 \delta \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + \dots + dx_n \delta \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \\ &\quad + \psi \delta dx_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \delta dx_2 + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \delta dx_n \\ &= dx_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \delta x_1 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \delta x_n + \frac{\partial \psi}{\partial p_2} \delta p_2 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial p_n} \delta p_n \right) \\ &\quad + dx_2 \delta \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + \dots + dx_n \delta \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \\ &\quad + \psi \delta dx_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \delta dx_2 + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \delta dx_n \end{aligned}$$

ce qui devient, en y portant

$$\begin{aligned} \delta x &= \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \delta x_n + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \delta x_1 + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \delta x_n, \\ (25) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta dx &= dx_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \delta x_n \right. \\ &\quad + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \delta x_1 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \delta x_n + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \delta x_1 \\ &\quad + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \delta x_n + \frac{\partial \psi}{\partial p_2} \delta p_2 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial p_n} \delta p_n \Big) \\ &\quad + dx_2 \delta \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + \dots + dx_n \delta \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} + \psi \delta dx_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \delta dx_2 + \dots \\ &\quad + \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \delta dx_n. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

On a, d'autre part,

$$(26) \left\{ \begin{aligned} \delta x &= \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \delta x_n + \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \delta x_1 + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \delta x_n, \\ d \delta x &= \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} d \delta x_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} d \delta x_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} d \delta x_n + d \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \delta x_1 + \dots \\ &\quad + d \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \delta x_n + \delta x_1 dp_1 + \delta x_2 dp_2 + \dots + \delta x_n dp_n. \end{aligned} \right.$$

En observant que $\delta dx = d \delta x$, que

$$\psi \delta dx_1 = p_1 \delta dx_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} d \delta x_1,$$

que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \delta dx_2 = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} d \delta x_2, \dots,$$

on déduit de là

$$(27) \left\{ \begin{aligned} 0 &= \left(p_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 - dp_1 \right) \delta x_1 \\ &\quad + \left(p_2 \frac{\partial \psi}{\partial x} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_1 - dp_2 \right) \delta x_2 + \dots \\ &\quad + \left(p_n \frac{\partial \psi}{\partial x} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx_1 - dp_n \right) \delta x_n \\ &\quad + \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_2} dx_1 + dx_2 \right) \delta p_2 + \dots + \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_n} dx_1 + dx_n \right) \delta p_n \\ &\quad + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} dx_1 - d \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) \delta x_1 + \dots + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} dx_1 - d \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \right) \delta x_n. \end{aligned} \right.$$

Déterminons les $\beta_i = \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}$ par les n équations

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \beta_i dx_1 + d\beta_i = 0;$$

il s'ensuivra

$$(28) \left\{ \begin{aligned} \frac{d\beta_i}{\beta_i} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} dx_1, \\ \beta_i &= \beta_{i0} e^{\int_{t_0}^t \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx_1}{dt} dt}, \end{aligned} \right.$$

ce qui introduit n constantes arbitraires $\beta_{10}, \dots, \beta_{n0}$.

Or le signe δ est applicable à ces nouvelles constantes aussi bien qu'aux α ; les valeurs de $x, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$ dépendent des unes comme des autres; en conséquence, pourvu que, pour

$t = t_0$ les $2n$ constantes soient telles que $x_1, x_2, x_n, \dots; p_1, \dots, p_n$ puissent recevoir des valeurs quelconques, x ayant d'ailleurs une valeur correspondante fixée par l'équation (2); les variations $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n, \delta p_1, \delta p_2, \dots, \delta p_n$ peuvent s'estimer arbitraires, ces variations répondant aux variations des $2n$ constantes.

L'équation ci-dessus a donc lieu quelles que soient ces variations; il en résulte donc

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx_1}{-1} &= \frac{dx_2}{\frac{\partial \psi}{\partial p_2}} = \dots = \frac{dx_n}{\frac{\partial \psi}{\partial p_n}} \\ &= \frac{-dp_1}{\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial \psi}{\partial x}} = \dots = \frac{-dp_n}{\frac{\partial \psi}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial \psi}{\partial x}} \\ &= \frac{dx}{-p_1 + p_2 \frac{\partial \psi}{\partial p_2} + \dots + p_n \frac{\partial \psi}{\partial p_n}}. \end{aligned} \right.$$

4. En revenant des équations $x = \Psi$, $p_1 = p$ aux équations (1) et (2) $F = 0, f = 0$, on aura

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_i} = \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \quad \text{déterminé par} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_i} = 0,$$

et

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} = \frac{\partial x}{\partial x_i} = \beta_i \quad \text{par} \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_i} = 0,$$

ou

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x} \beta_i = 0,$$

de sorte que, les équations de départ étant

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} F(x, x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots, a_n) &= 0, \quad f(x, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x} p_i &= 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x} \beta_i = 0, \end{aligned} \right.$$

et les β_i ayant leurs valeurs données par

$$\beta_i = \beta_{i0} e^{\int_{t_0}^t \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x_1}{\partial t} dt} = \beta_{i0} e^{-\int_{t_0}^t \left(\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial p_1} \right) dt} = \beta_{i0} e^{-\int_{t_0}^t \frac{x}{\beta_1} dx_1},$$

x. 16

on en conclut

$$(7) \left\{ \begin{aligned} \frac{dx_1}{P_1} &= \frac{dx_2}{P_2} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dx}{P_1 p_1 + \dots + P_n p_n} = \frac{-dp_1}{X_1 + X p_1} = \dots \\ &= \frac{-dp_n}{X_n + X p_n} = \frac{dt}{T}, \end{aligned} \right.$$

T s'y trouvant à prendre à volonté.

Le système d'équations différentielles a d'après cela pour système intégral avec $2n$ constantes arbitraires, l'équation (1) s'y trouvant impliquée, les équations précédentes (30).

Lorsque f ne contient pas x , on a $X = 0$; les valeurs des β_i deviennent les β_{i0} , elles sont constantes; c'est le théorème que Jacobi a démontré directement, et auquel il a habilement ramené le cas général.

Observons que l'on a

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\beta_{10}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\beta_{20}} = \dots = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\beta_{n0}} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\beta_{x0}} e^{-\int_{t_0}^t \frac{x}{T} dt}.$$

En conséquence,

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{k_1} &= \frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{k_2} = \dots = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{k_n}, \end{aligned} \right.$$

les rapports entre les quantités constantes $k_1, k_2, \dots, k_n$ constituent $n - 1$ constantes arbitraires, et, si k_1 se prend pour valeur de β_{10} , on a

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = -k_1 \frac{\partial F}{\partial x} e^{-\int_{t_0}^t \frac{x}{T} dt},$$

à prendre $T = X$; on a par là

$$(32) \quad \frac{\partial F}{\partial x_1} = -k_1 \frac{\partial F}{\partial x} e^{-(t-t_0)},$$

pour la $(2n + 1)^{\text{ème}}$ équation du système intégral, les autres étant $F = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x} p_i = 0$, et les équations (31).

Lorsque T se prendra autrement, les $2n$ équations, où de fait t ne figure pas servant à déterminer $2n$ des variables $x, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$ en fonction de l'une d'elles, il y aura entre celle-ci et

t l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = -k_1 \frac{\partial F}{\partial x} e^{-\int_{t_0}^t \frac{X}{T} dt},$$

ou

$$L \frac{\partial F}{\partial x_1} = L(-k_1) + L \frac{\partial F}{\partial x} - \int_{t_0}^t \frac{X}{T} dt,$$

ou

$$d \frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{d \frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} + \frac{X}{T} dt = 0,$$

équation du premier ordre.

5. Si le système (7) est considéré sans la variable auxiliaire t , les intégrales seront

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

et

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{k_1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{k_2} = \dots = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{k_n},$$

équations dont le nombre est $2n$, avec $2n - 1$ constantes arbitraires qui sont $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ et les rapports entre $k_1, k_2, \dots, k_n$.

Nous terminerons en signalant l'accord que présentent ces résultats généraux, et ce qui regarde la forme d'intégrale complète examinée d'abord.

Supposons que x_1 soit prise pour variable indépendante à l'égard du système intégral, que $x_0, x_{20}, \dots, x_{n0}$ soient les constantes arbitraires dans l'intégrale complète.

L'équation $\frac{\partial F}{\partial x_i} + \beta_i \frac{\partial F}{\partial x} = 0$ devient alors $\frac{\partial F}{\partial x_{i0}} + \beta_i \frac{\partial F}{\partial x} = 0$, et l'on a

$$(22) \quad \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{-1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_0}}{u_0} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{10}}}{u_1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{20}}}{u_2} = \dots = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{n0}}}{u_n}$$

u_i étant

$$\frac{\partial x}{\partial x_{i0}} - p_1 \frac{\partial x_2}{\partial x_{i0}} - p_2 \frac{\partial x_3}{\partial x_{i0}} - \dots - p_n \frac{\partial x_n}{\partial x_{i0}};$$

où

$$u_7 = \frac{\partial z}{\partial \gamma} - q \frac{\partial y}{\partial \gamma} = x \frac{\partial y}{\partial \gamma} - x \frac{\partial y}{\partial \gamma} = 0, \quad u_8 \neq 0, \quad u_9 \neq 0;$$

γ est à éliminer. De là

$$(z - xy)^2 = 2ax(x - \beta).$$

2. Pour le problème inverse,

$$F = (x - xy)^2 - 2ax(x - \beta) = 0,$$

$$f = pqy - pz + aq = 0;$$

d'où

$$p(z - xy) - ax = 0, \quad \frac{-y(z - xy) - a(x - \beta)}{k} = \frac{ax}{k},$$

$$(z - xy)(q - x) = 0,$$

ce qui donne

$$q = x, \quad z = xy + \frac{ax}{p}, \quad y \frac{x}{p} + x - \beta - xy = 0.$$

Par F l'on a

$$z - xy = \sqrt{2ax(x - \beta)},$$

donc

$$p = \sqrt{\frac{ax}{2(x - \beta)}}, \quad y = -\sqrt{\frac{a(x - \beta)}{2x}} + \gamma \sqrt{\frac{ax}{2(x - \beta)}};$$

ce sont bien les intégrales précédentes.

II.

1.

$$2z - px + qy + q^2 = 0,$$

$$\frac{dx}{-x} = \frac{dy}{y + 2q} = \frac{dz}{-px + qy + 2q^2} = \frac{-dp}{p} = \frac{-dq}{3q},$$

$$p = \alpha x, \quad q = \beta x^3, \quad dy + y \frac{dx}{x} + 2\beta x^2 dx = 0,$$

$$y = \frac{\gamma}{x} - \frac{\beta x^3}{2}, \quad z = \frac{px}{2} - \frac{qy}{2} - \frac{q^2}{2} = \frac{\alpha - \beta\gamma}{2} x^2 - \frac{\beta^2}{4} x^6,$$

$$u_\alpha = \frac{x^2}{2}, \quad u_\beta = -\frac{\gamma}{2} x^2, \quad u_\gamma = -\frac{3}{2} \beta x^2.$$

Il n'y a aucune de ces constantes à éliminer.

Si, pour $x = x_0$, on fait

$$y = y_0, \quad z = z_0, \quad p = p_0,$$

d'où

$$\frac{\partial F}{\partial x_{i0}} - \frac{\beta_i}{u_0} \frac{\partial F}{\partial x_0} = 0.$$

Or $u_0 = M$ et $\beta_i = M \beta_{i0}$. Donc

$$\frac{\partial F}{\partial x_{i0}} - \beta_{i0} \frac{\partial F}{\partial x_0} = 0;$$

c'est avoir

$$\frac{\partial F}{\partial x_{i0}} + p_{i0} \frac{\partial F}{\partial x_0} = 0$$

en prenant $\beta_{i0} = -p_{i0}$.

Ajoutons que, dans le système intégral que nous venons de déduire de l'équation $F = 0$, celle-ci peut se remplacer par l'équation $f = 0$. Mais les équations (7) ne se forment que pour l'équation $f = 0$, et restent les mêmes quand à sa place on prend $f = A$, A étant une constante arbitraire. Donc il suffira de remplacer l'équation $F = 0$ par $f = A$, les autres équations restant les mêmes pour avoir le système intégral général de ces équations (7).

Il importe peut-être d'appuyer de quelques exemples l'exposé qui précède. Les trois qui suivent suffiront, je l'espère, pour confirmer les principales observations que nous avons eu à faire.

I.

1. Soit $f = pqy - pz + aq = 0$. De là

$$\frac{dx}{qy - z} = \frac{dy}{py + a} = \frac{dz}{2pqy - pz + qa} = \frac{-dp}{-p^2} = \frac{-dq}{0},$$

$$q = x, \quad \frac{-p dx}{ax} = \frac{dy}{py + a} = \frac{dz}{p^2 xy} = \frac{dp}{p^2},$$

$$\frac{dx}{ax} = -\frac{dp}{p^3}, \quad dy - y \frac{dp}{p} - a \frac{dp}{p^2} = 0,$$

$$x - \beta = \frac{ax}{2p^2}, \quad y = p\gamma - \frac{a}{2p}, \quad z = xy + \frac{ax}{p},$$

de sorte que

$$p = \sqrt{\frac{ax}{2(x-\beta)}}, \quad q = x, \quad y = \gamma \sqrt{\frac{ax}{2(x-\beta)}} - \frac{a}{2} \sqrt{\frac{2(x-\beta)}{ax}},$$

$$z = xy + \sqrt{2ax(x-\beta)}.$$

D'où

$$u_{\gamma} = \frac{\partial z}{\partial \gamma} - q \frac{\partial y}{\partial \gamma} = \alpha \frac{\partial y}{\partial \gamma} - \alpha \frac{\partial y}{\partial \gamma} = 0, \quad u_{\alpha} \neq 0, \quad u_{\beta} \neq 0;$$

γ est à éliminer. De là

$$(z - \alpha y)^2 = 2\alpha z(x - \beta).$$

2. Pour le problème inverse,

$$F = (x - \alpha y)^2 - 2\alpha z(x - \beta) = 0,$$

$$f = pqy - pz + \alpha q = 0;$$

d'où

$$p(z - \alpha y) - \alpha z = 0, \quad \frac{-y(z - \alpha y) - \alpha(x - \beta)}{k} = \frac{\alpha z}{k},$$

$$(z - \alpha y)(q - \alpha) = 0,$$

ce qui donne

$$q = \alpha, \quad z = \alpha y + \frac{\alpha z}{p}, \quad y \frac{\alpha}{p} + x - \beta - \alpha \gamma = 0.$$

Par F l'on a

$$z - \alpha y = \sqrt{2\alpha z(x - \beta)},$$

donc

$$p = \sqrt{\frac{\alpha z}{2(x - \beta)}}, \quad y = -\sqrt{\frac{\alpha(x - \beta)}{2\alpha}} + \gamma \sqrt{\frac{\alpha z}{2(x - \beta)}};$$

ce sont bien les intégrales précédentes.

II.

1.

$$2z - px + qy + q^2 = 0,$$

$$\frac{dx}{-x} = \frac{dy}{y + 2q} = \frac{dz}{-px + qy + 2q^2} = \frac{-dp}{p} = \frac{-dq}{3q},$$

$$p = \alpha x, \quad q = \beta x^3, \quad dy + y \frac{dx}{x} + 2\beta x^3 dx = 0,$$

$$y = \frac{\gamma}{x} - \frac{\beta x^3}{2}, \quad z = \frac{px}{2} - \frac{qy}{2} - \frac{q^2}{2} = \frac{\alpha - \beta\gamma}{2} x^2 - \frac{\beta^2}{4} x^6,$$

$$u_{\alpha} = \frac{x^2}{2}, \quad u_{\beta} = -\frac{\gamma}{2} x^2, \quad u_{\gamma} = -\frac{3}{2} \beta x^2.$$

Il n'y a aucune de ces constantes à éliminer.

Si, pour $x = x_0$, on fait

$$y = y_0, \quad z = z_0, \quad p = p_0.$$

sauf à avoir

$$p_0 = \frac{2x_0 + q_0y_0 + q_0^2}{x_0},$$

on trouve

$$\alpha = \frac{2x_0 + q_0y_0 + q_0^2}{x_0^2}, \quad \beta = \frac{q_0}{x_0^3}, \quad \gamma = x_0y_0 + \frac{q_0x_0}{2},$$

$$\alpha - \beta\gamma = \frac{4x_0 + q_0^2}{2x_0^2}.$$

De là

$$q_0 = \frac{2(xy - x_0y_0)x_0^3}{x_0^4 - x^4},$$

et finalement

$$(2x_0^2 - x_0x^2)(x_0^4 - x^4) = x^2x_0^2(xy - x_0y_0)^2.$$

Il est plus simple d'opérer autrement. Observons que l'on a

$$u_\beta + \gamma u_\alpha = 0,$$

de sorte que, si l'on pose

$$\alpha = \gamma\beta + A,$$

il s'ensuit

$$u_\beta = u_\alpha + u_\alpha \gamma = 0.$$

Substitution faite de α , il y a donc β à éliminer.

Cela donne

$$y = \frac{\gamma}{x} - \frac{\beta x^3}{2}, \quad z = \frac{Ax^2}{2} - \frac{\beta^2}{4} x^6,$$

puis

$$\left(z - \frac{Ax^2}{2}\right) + \left(y - \frac{\gamma}{x}\right)^2 = 0, \quad z = \frac{Ax^2}{2} - \left(y - \frac{\gamma}{x}\right)^2.$$

De même, comme l'on a

$$u_\gamma + 3\beta u_\alpha = 0,$$

en faisant

$$\alpha = 3\beta\gamma + A,$$

d'où

$$u_\gamma = u_\gamma + 3\beta u_\alpha = 0,$$

et en éliminant γ de

$$y = \frac{\gamma}{x} - \frac{\beta x^3}{2}, \quad z = \beta\gamma x^2 + \frac{A}{2} x^2 - \frac{\beta^2}{4} x^6,$$

on obtient pour intégrale

$$z = \beta x^3 y + \frac{\beta^2}{4} x^6 + \frac{A}{2} x^2.$$

2. Pour le problème inverse. — Soit

$$F = z - \frac{A x^2}{2} + \left(y - \frac{\gamma}{x}\right)^2 = 0;$$

il s'ensuit

$$\begin{aligned} p - A x + \frac{2\gamma}{x^2} \left(y - \frac{\gamma}{x}\right) &= 0, \quad q + 2 \left(y - \frac{\gamma}{x}\right) = 0, \\ 2z - px + qy + q^2 &= 0, \\ \frac{x^2}{\frac{2}{h}} &= \frac{2 \left(y - \frac{\gamma}{x}\right) \frac{1}{x}}{K}; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\gamma}{x} + B x^3, \\ q &= -2 \left(y - \frac{\gamma}{x}\right) = -2 B x^3. \\ p &= (A - 2 B \gamma) x, \\ z &= \frac{p x}{2} - \frac{q \gamma + q^2}{2} = A x^2 - B x^6. \quad \text{C. Q. F. T.} \end{aligned}$$

III.

$$\begin{aligned} f &= pq - px - qy - z = 0, \\ \frac{dx}{q - x} &= \frac{dy}{p - y} = \frac{dz}{2pq - px - qy} = \frac{-dp}{-2p} = \frac{-dq}{-2q} = \frac{dz}{pq - x - z}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} q &= x_1 p, \quad \frac{dz}{x_1 p^2 + z} = \frac{dp}{x_1 p}, \quad dz - z \frac{dp}{x_1 p} - \frac{x_1 p}{2} dp = 0, \\ dx + x \frac{dq}{2q} - \frac{dq}{2} &= 0, \quad z = x_2 \sqrt{p} + \frac{x_1}{3} p^3, \\ x &= \frac{1}{\sqrt{q}} \left(x_3 + \frac{1}{3} q^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{x_1}{\sqrt{x_1 p}} + \frac{x_1 p}{3}, \end{aligned}$$

puis

$$y = \frac{pq - px - z}{q} = \frac{p}{3} - \frac{x_3}{x_1^2 \sqrt{p}} - \frac{x_2}{x_1 \sqrt{p}}.$$

calculons

$$u_s = \frac{\partial z}{\partial x_3} - q \frac{\partial y}{\partial x_3}.$$

D'abord

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x_3} &= \left(\frac{x_3}{2\sqrt{p}} + \frac{2x_1 p}{3} \right) \frac{\partial p}{\partial x_3}, \\ \frac{\partial y}{\partial x_3} &= \left(\frac{1}{3} + \frac{x_3}{2x_1^2 p^{\frac{3}{2}}} + \frac{x_2}{2x_1 p^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{\partial p}{\partial x_3} - \frac{1}{x_1^{\frac{3}{2}} \sqrt{p}}, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\partial z}{\partial x_3} - q \frac{\partial y}{\partial x_3} = \left(x_1 \frac{p}{3} - \frac{x_3}{2\sqrt{x_1 p}} \right) \frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{x_1}}.$$

Mais de

$$3x\sqrt{x_1 p} = (x_1 p)^{\frac{3}{2}} + 3x_2,$$

on tire

$$\left(\frac{3x_3}{2p} - \frac{\frac{3}{2} p^{\frac{1}{2}}}{x_1^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{\partial p}{\partial x_3} = 3,$$

ou

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = \frac{\sqrt{\frac{p}{x_1}}}{\frac{x_3}{2\sqrt{x_1 p}} - \frac{p x_1}{3}};$$

donc

$$\frac{\partial z}{\partial x_3} - q \frac{\partial y}{\partial x_3} = 0.$$

Éliminons x_3 : on a

$$\begin{aligned} \frac{x_3}{\sqrt{x_1 p}} &= x - \frac{x_1 p}{3}, \\ y &= \frac{p}{3} - \frac{1}{x_1} \left(x - \frac{x_1 p}{3} \right) - \frac{x_2}{x_1 \sqrt{p}} = -\frac{x}{x_1} + \frac{2p}{3} - \frac{x_2}{x_1 \sqrt{p}}, \\ z &= x_2 \sqrt{p} + \frac{x_1}{3} p^2. \end{aligned}$$

Le résultat de l'élimination de p est

$$\begin{aligned} [x_2(x_1 y + x)^2 + 4x_1 x_2 z]^2 &= [3x_2^2(x_1 y + x) + 2(x_1 y + x)^3 z - \frac{4}{3}x_1 z^2] \\ &\times [6x_1 x_2^2 - (x_1 y + x)^3 + \frac{1}{3}x_1 z(x_1 y + x)] = 0 \end{aligned}$$

1. *Problème inverse.* — Prenons

$$y = -\frac{x}{\alpha_1} + \frac{2t^2}{3} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1 t} \quad \text{ou} \quad \alpha_1 y + x - \frac{2}{3} \alpha_1 t^2 + \frac{\alpha_2}{t} = 0,$$

$$z = \alpha_2 t + \frac{\alpha_1}{3} t^3$$

ou

$$z - \alpha_2 t - \frac{\alpha_1}{3} t^3 = 0, \quad \alpha_1 y + x - \frac{2}{3} \alpha_1 t^2 + \frac{\alpha_2}{t} = 0.$$

Les équations du système intégral seront, avec celles-là,

$$p = \left(\alpha_2 + \frac{4}{3} \alpha_1 t^3 \right) \frac{\partial t}{\partial x}, \quad \frac{1}{\alpha_1} = \left(\frac{4}{3} t + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 t^2} \right) \frac{\partial t}{\partial x},$$

d'où

$$\alpha_1 p = \alpha_1 t^2, \quad p = t^2,$$

$$q = \left(\alpha_2 + \frac{4}{3} \alpha_1 t^3 \right) \frac{\partial t}{\partial y}, \quad 1 = \left(\frac{4}{3} t + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 t^2} \right) \frac{\partial t}{\partial y}, \quad q = \alpha_1 t^2,$$

puis

$$\frac{t^3}{3} + \frac{\left(\alpha_2 + \frac{4}{3} \alpha_1 t^3 \right) \frac{\partial t}{\partial x_1}}{K} = \frac{t + \left(\alpha_2 + \frac{4}{3} \alpha_1 t^3 \right) \frac{\partial t}{\partial x_2}}{K'},$$

avec

$$y - \frac{2}{3} t^2 + \frac{\partial t}{\partial x_1} \left(-\frac{4}{3} \alpha_1 t - \frac{\alpha_2}{t^2} \right) = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial x_1} = \frac{t^2 \left(y - \frac{2}{3} t^2 \right)}{\frac{4}{3} \alpha_1 t^3 + \alpha_2},$$

$$\frac{1}{t} + \frac{\partial t}{\partial x_2} \left(-\frac{4}{3} \alpha_1 t - \frac{\alpha_2}{t^2} \right) = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial x_2} = \frac{t}{\frac{4}{3} \alpha_1 t^3 + \alpha_2},$$

d'où

$$\frac{\frac{t^3}{3} + t^2 \left(y - \frac{2}{3} t^2 \right)}{K} = \frac{2t}{K'}, \quad y - \frac{2}{3} t^2 = -\frac{t^2}{3} + \frac{A}{t},$$

de sorte que

$$p = t^2, \quad q = \alpha_1 t^2,$$

$$z = \alpha_2 t + \frac{\alpha_1}{3} t^3,$$

$$y = \frac{t^2}{3} + \frac{A}{t},$$

$$x = \frac{1}{3} \alpha_1 t^2 - \frac{A \alpha_1 + \alpha_2}{t}. \quad \text{C. Q. F. T.}$$

Sur la recherche des diviseurs des fonctions entières;

par M. PEROTT.

(Séance du 21 juillet 1882.)

Soit

$$f(x) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n$$

un polynôme quelconque à coefficients entiers; il est toujours possible de trouver une limite supérieure de la moyenne arithmétique des modules des racines de l'équation

$$f(x) = 0.$$

Désignons par δ cette limite, nous aurons pour toute valeur de k

$$(1) \quad \left| \frac{a_k}{a_0} \right| < \frac{n!}{k!(n-k)!} \delta^k,$$

car on a toujours

$$\sqrt[r]{\frac{\Sigma |a_{p_1}| |a_{p_2}| \dots |a_{p_r}|}{n!}} \geq \sqrt[s]{\frac{\Xi |a_{p_1}| |a_{p_2}| \dots |a_{p_s}|}{s!(s-n)!}} \frac{n!}{n!}$$

pour $r < s$, $a_1, a_2, \dots, a_n$ étant n quantités quelconques.

Les coefficients des diviseurs de $f(x)$ devront nécessairement vérifier l'inégalité (1) et, par conséquent, il suffit d'essayer la division par un nombre fini de polynômes pour obtenir la décomposition de $f(x)$ en ses facteurs premiers.

On pourra réduire le nombre des tentatives à faire par les considérations suivantes :

Soient

$$f_1(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots,$$

$$f_2(x) = c_0 x^{n-m} + c_1 x^{n-m-1} + \dots$$

deux polynômes dont le produit est égal à $f(x)$; nous savons d'abord que b_0 et c_0 doivent être deux diviseurs complémentaires de a_0 . Le choix de ces deux diviseurs une fois fixé, on obtient les coefficients b_1 et c_1 par l'équation suivante :

$$b_0 c_1 + b_1 c_0 = a'_1.$$

Cette équation donnera les valeurs de b_1 et de c_1 en fonction

d'un paramètre t , sauf le cas d'impossibilité qui montrerait que les coefficients b_0 et c_0 ont été mal choisis. Le paramètre t ne pouvant avoir qu'un nombre fini de valeurs, il en sera de même de b_1 et de c_1 . Le choix de ces deux coefficients une fois fixé, on obtiendra les coefficients b_2 et c_2 à l'aide d'une nouvelle équation indéterminée, et ainsi de suite.

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

SÉANCE DU 21 AVRIL 1882.

PRÉSIDENTE DE M. HALPHEN.

Élections : MM. Poincaré et Brésard, présentés dans la dernière séance par MM. Halphen et Stephanos; MM. L. Kronecker et Genocchi présentés dans la dernière séance par MM. Halphen et Picquet, sont élus membres de la Société.

Communications :

M. G. Tarry : *Théorèmes divers sur les centres de gravité.* —

M. Stephanos donne à cette occasion un théorème *Sur les figures homographiques.*

M. Lebon : *Extension de la construction donnée par M. Rouché pour l'intersection d'un hyperboloïde de révolution et d'une droite au cas d'une surface de révolution quelconque du second degré, sauf le paraboloïde.*

M. Stephanos : *Sur un rapprochement entre la Trigonométrie sphérique et la théorie de trois formes binaires simultanées.*

SÉANCE DU 5 MAI 1882.

PRÉSIDENTE DE M. HALPHEN.

M. L. Hugo adresse une Note manuscrite *Sur un dodécaèdre en bronze trouvé en Suisse.*

M. Laisant présente une Note manuscrite de M. Laquière, inti-

tulée : *Sur le théorème de M. Laisant relatif à certaines propriétés des centres de gravité.*

Communications :

M. Stephanos : *Sur le calcul barycentrique de Möbius.*

M. Halphen : *Sur une classe d'intégrales pseudo-elliptiques.*

M. Weill : *Sur trois coniques ayant quatre points communs.*

SÉANCE DU 19 MAI 1882.

PRÉSIDENTE DE M. HALPHEN.

Élections : M. Habich, présenté dans la dernière séance par MM. Perrin et Picquet; MM. N. Zaboudsky et D. Selivanoff, présentés par MM. Halphen et Darboux; M. Ch. Henry, présenté par MM. Laisant et Lucas, sont élus membres de la Société.

Communications :

M. Fouret : *Sur le mouvement d'un solide qui n'est soumis à aucune force.*

M. Selivanoff : *Sur les intégrales définies uniformément convergentes.*

M. Stephanos : *Sur certains déterminants fonctionnels.*

M. Perrin : *Sur une méthode de résolution pour l'équation du quatrième degré.*

SÉANCE DU 2 JUIN 1882.

PRÉSIDENTE DE M. HALPHEN.

Élections : MM. Wilson, Cheysson et Bère, présentés dans la dernière séance par MM. Laisant et Dreyfus; M. Zeller, présenté par MM. Halphen et Picquet, sont élus membres de la Société.

Communications :

M. Lebon : *Sur l'intersection de deux surfaces du second degré.*

M. Selivanoff : *Sur les intégrales uniformément convergentes.*

M. Stephanos : *Sur une généralisation du rapport anharmonique.*

M. Halphen : *Sur le Mémoire de Riemann qui traite de la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée.*

SÉANCE DU 16 JUIN 1882.

PRÉSIDENCE DE M. HALPHEN.

L'Académie des Sciences physiques et mathématiques de Naples envoie la collection de ses *Rendiconti*, en échange de celle du Bulletin de la Société.

M. Lucas analyse un Mémoire manuscrit de M. Pellet *Sur les résidus cubiques et biquadratiques suivant un module premier.*

M. Gascheau adresse un Mémoire manuscrit intitulé : *Étude sur un cas singulier du mouvement d'un point matériel.*

Communications :

M. Halphen : *Sur les sextiques à neuf points doubles.*

M. Stephanos : *Sur les éléments imaginaires en Géométrie.*

M. Lucas : *Sur les carrés diaboliques.*

M. Lucas est délégué pour représenter la Société au Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences à la Rochelle.

SÉANCE DU 7 JUILLET 1882.

PRÉSIDENCE DE M. ANDRÉ.

Élections : M. Léon Lévy, présenté dans la dernière séance par MM. Aron et Halphen, est élu membre de la Société.

M. Schlegel adresse un Mémoire manuscrit : *Sur quelques théorèmes de Géométrie à n dimensions.*

SÉANCE DU 21 JUILLET 1882.

PRÉSIDENCE DE M. ANDRÉ.

Élections : M^{me} Sophie de Kovalewski, présentée à la dernière séance par MM. Stephanos et Picquet ; M. Aubert, présenté par MM. André et Lucas, sont élus membres de la Société.

M. Perott adresse une Note manuscrite *Sur la recherche des diviseurs des fonctions entières.*

M. Lemonnier adresse un Mémoire manuscrit *Sur la recherche d'une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre, et sur le problème inverse.*

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE (1).

OUVRAGES ET MÉMOIRES REÇUS DEPUIS LE 7 AVRIL 1882.

Tarry (G.) : *Relation générale entre sept points d'une conique. Conique d'homologie. Propriétés communes à trois figures homographiques.* (Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.*)

Günther : *Operative Arithmetik und Geometrie der Gittersysteme.* (Extrait des *Zeitschrift für math. und naturw. Unterr.*)
Pamiętnik Akademii umiejętności w Krakowie. Wydział matematyczno-przyrodniczy. Tom szosty. W Krakowie, 1881.

Günther : *Comptes rendus des Ouvrages suivants :*

Cantor (M.) : *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* Leipzig, 1880.

Henry (Ch.) : *Galilée, Torricelli, Cavalieri, Castelli.* Rome, 1880.

Günther : *Die platonische Zahl.*

Rapport de la Commission parlementaire chargée d'examiner la

(1) Ce Bulletin ne comprend pas les périodiques que la Société reçoit en échange de ses publications (voir page 10).

proposition de MM. Laisant, P. Bert et Hervé Mangon, relative aux OEuvres de Fermat.

Gaspard Monge : *Traité élémentaire de Statique* (seconde édition, an III). Exemplaire offert par M. L. Hugo.

Schwedoff (Th.) : *Configurations de la grande comète de 1882, prédites d'après la théorie des ondes cosmiques*. Odessa, 1882.

Catalan : *Sur les fonctions X_n de Legendre* (second Mémoire, extrait des *Mémoires de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique*).

Stephanos : *Sur quelques propriétés du système de trois figures égales situées dans un même plan*. (Extrait du *Bulletin de la Société philomathique*.)

Schwedoff (Th.) : *Sur l'origine de la grêle*. Odessa, 1882.

Kœnigs : *Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé*. (Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Paris, 1882.)

Catalan : *Problèmes et théorèmes d'Arithmétique*. (Extrait des *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège*.)

Zeuthen : *Grundriss einer elementar-geometrischen Kegelschnittslehre*. Leipzig, 1882.

Brill : *Ueber binäre Formen und die Gleichung sechsten Grades*. (Extrait des *Mathematische Annalen*.)



ERRATA DU TOME X.

Page 20, Tableau des prix des tirages à part, dernière ligne : au lieu de 34,75, lisez 36,75.

Page 86, dernière formule, au lieu de $\int_0^\infty e^{\lambda x - \lambda z} d\lambda$, lisez $\int_0^1 \dots$

Page 140, ligne 27, au lieu de C', lisez C.

Page 190, ligne 23, au lieu de *parallélépipède*, lisez *parallélipipède*.

Page 220, ligne 20, colonne de droite, au lieu de $\frac{1}{576} (m+1) (m^2-1)$, lisez $\frac{1}{576} (m+3) (m^2-1)$.

Page 222, ligne 20, après CB = 3 BA, ajoutez *on trouve que*.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME X.

	Pages.
État de la Société mathématique de France au 1 ^{er} janvier 1882.....	5
Statuts de la Société.....	13
Règlement administratif.....	14
Avis relatif aux tirages à part.....	20
Sur les courbes d'un système linéaire trois fois infini, qui touchent une courbe algébrique donnée par un contact du troisième ordre; par M. LINDEMANN..	21
Sur certaines propriétés des centres de gravité; par M. LAISANT.....	40
Sur l'équation linéaire qui relie au module la fonction complète de première espèce; par M. GOURSAT.....	44
Remarques sur la théorie des régions et des aspects; par M. LAISANT.....	52
Sur un triangle dont les côtés sont exprimés par des nombres entiers, premiers entre eux, et dans lequel le rapport de deux angles est un nombre entier; par M. WEILL.....	55
Sur des cas de réduction des fonctions Θ de plusieurs variables à des fonctions Θ d'un moindre nombre de variables; par M. APPELL.....	59
Sur une série d'Abel; par M. HALPHEN.....	67
Sur un théorème de Gauss; par M. PEROTT.....	87
Sur l'évaluation de certaines intégrales pseudo-elliptiques; par M. GUNTHER..	88
Extraits des procès-verbaux (séances du 4 novembre 1881 au 7 avril 1882)..	97
Bulletin bibliographique.....	102
Sur le problème des aspects; par M. PERRIN.....	103
Sur les polygones dont les côtés sont tangents à une courbe, et dont tous les sommets sont sur la courbe; par M. WEILL.....	127
Sur le théorème de M. Laisant relatif à certaines propriétés des centres de gravité; par M. LAQUIÈRE.....	131
Sur la relation qui existe entre le problème de la trigonométrie sphérique et la théorie du système de trois formes quadratiques binaires; par M. STEPHANOS.....	134
Sur le centre des moyennes distances des points d'une courbe unicursale; par M. WEILL.....	137
Sur une nouvelle méthode de résolution de l'équation du quatrième degré, et son application à quelques équations de degrés supérieurs; par M. PERRIN.....	139
Sur les intégrales uniformément convergentes; par M. SELIVANOFF.....	147
Sur les résidus cubiques et biquadratiques, suivant un module premier; par M. PELLET.....	157

Sur les courbes planes du sixième degré à neuf points doubles; par M. HALL- PHEN.....	161
Quelques théorèmes de Géométrie à n dimensions; par M. SCHLEGEL.....	172
Étude sur un cas singulier du mouvement d'un point matériel; par M. GASCHÉAU.....	207
Deux théorèmes relatifs aux centres des courbes algébriques; par M. SCHOTTE.....	219
Sur le théorème de M. Laisant relatif aux centres de gravité; par M. SCHLEGEL.....	220
Sur le lieu des centres des hyperboles équilatères qui ont un contact du troisième ordre avec une parabole donnée; par M. SCHOTTE.....	222
Intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre à n va- riables indépendantes; par M. LEMONNIER.....	223
Sur la recherche des diviseurs des fonctions entières; par M. PEROTT.....	250
Extraits des procès-verbaux (séances du 21 avril au 21 juillet 1882).....	251
Bulletin bibliographique.....	254
Errata.....	256

TABLE DES MATIÈRES

DE LA PREMIÈRE SÉRIE.

(Tomes I à X.)

Arithmétique et théorie des nombres.

Sur quelques théorèmes d'Arithmétique; par M. <i>Laguerre</i>	I, 77
Théorème nouveau sur les factorielles; par M. <i>Désiré André</i>	I, 81
De la répartition des nombres entre les diviseurs de $\varphi(M)$, lorsque M est une puissance d'un nombre premier impair ou le double d'une telle puissance; par M. <i>L. Sancer</i>	IV, 17
Sur la partition des nombres; par M. <i>Laguerre</i>	V, 76
Sur une formule récurrente concernant les sommes des diviseurs des nombres entiers; par M. <i>Halphen</i>	V, 158
Sur les sommes des diviseurs des nombres entiers et les décompositions en deux carrés; par M. <i>Halphen</i>	VI, 119
Sur diverses formules récurrentes concernant les diviseurs des nombres entiers; par M. <i>Halphen</i>	VI, 173
Sur une propriété remarquable des nombres incommensurables; par M. <i>Stephanos</i>	VII, 81
Sur l'extraction de la racine carrée d'un nombre; par M. <i>N. Alexéeff</i> ..	VII, 167
Théorèmes généraux sur l'impossibilité des équations cubiques indéterminées; par M. <i>Éd. Lucas</i>	VIII, 173
Énoncé d'un théorème d'Arithmétique; par M. <i>Weill</i>	IX, 172
Sur les résidus cubiques et biquadratiques, suivant un module premier; par M. <i>Pellet</i>	X, 157

Géométrie de l'échiquier ou des quinconces.

Note sur un problème relatif à la marche du cavalier sur l'échiquier; par M. <i>Flye Sainte-Marie</i>	V, 144
Théorème sur la Géométrie des quinconces; par M. <i>Édouard Lucas</i>	VI, 9
Note sur la Géométrie des quinconces; par M. <i>Laisant</i>	VI, 156
Représentation graphique de la résolution en nombres entiers de l'équation indéterminée $ax + by = c$; par M. <i>C. de Polignac</i>	VI, 158
Note sur la Géométrie des quinconces; par M. <i>Laquière</i>	VII, 85

Solutions régulières du problème d'Euler sur la marche du cavalier; par M. <i>Laquière</i>	VIII, 82 et 132
Note sur le nombre des marches rentrantes que l'on peut obtenir en remplissant successivement les deux demi-échiquiers rectangulaires ayant pour frontière commune l'une des médianes de l'échiquier total; par M. <i>Laquière</i>	IX, 11
Note sur la marche du cavalier dans un échiquier; par M. <i>de Polignac</i>	IX, 17

Algèbre.

Sur la résolvante de deux équations du second degré; par M. <i>de Saint-Germain</i>	I, 152
Sur un théorème de Poncelet, et sa généralisation par M. <i>Horvarth</i> ; par M. <i>Resal</i>	I, 155
Détermination du nombre exact des solutions d'un système de n équations algébriques à n inconnues; par M. <i>Fouret</i>	II, 127
Sur une propriété du polynôme $(x^2 - 1)^n$; par M. <i>C. de Polignac</i>	III, 19
Mémoire sur la transformation des formes quadratiques; par M. <i>Lemonnier</i>	III, 58
Sur une question d'élimination ou sur l'intersection de deux courbes en un point singulier; par M. <i>Halphen</i>	III, 76
Résolution graphique d'un système d'équations du premier degré; par M. <i>Fouret</i>	III, 93
Note sur les substitutions linéaires; par M. <i>C. de Polignac</i>	IV, 120
Sur un problème d'Algèbre; par M. <i>Laguerre</i>	V, 26
Note sur une formule de sommation applicable à une classe de séries; par M. <i>Perrin</i>	V, 47
Sur les substitutions linéaires; par M. <i>de Polignac</i>	V, 69
Sur une représentation géométrique des covariants des formes binaires; par M. <i>Lindemann</i>	V, 113
Sur un problème d'analyse combinatoire; par M. <i>Desiré André</i>	V, 130
Sur une proposition d'Algèbre; par M. <i>Halphen</i>	V, 160
Sur des suites de fractions, analogues à la suite de Farey; par M. <i>Halphen</i>	V, 170
Sur les suites de Farey; par M. <i>Édouard Lucas</i>	VI, 118
Sur des fonctions analogues à celles de Sturm; par M. <i>Lemonnier</i>	VI, 159
Problème sur les équations génératrices des séries récurrentes; par M. <i>Desiré André</i>	VI, 166
Sur une représentation géométrique des covariants des formes binaires (seconde Note); par M. <i>Lindemann</i>	VI, 195
Sur la résolution de trois équations du second degré en x, y, z ; par M. <i>Lemonnier</i>	VII, 16
Détermination du nombre des arrangements complets où les éléments consécutifs satisfont à des conditions données; par M. <i>Desiré André</i>	VII, 43
Sur l'indice des fractions rationnelles; par M. <i>Hermite</i>	VII, 128
Calcul d'un déterminant; par M. <i>H. Lemonnier</i>	VII, 175
Note sur le calcul approché par la méthode de Poncelet des radicaux de la forme $\sqrt{x^2 - y^2}$; par M. <i>Léauté</i>	VIII, 106
Formules et considérations diverses se rapportant à la théorie des ramifications; par M. <i>de Polignac</i>	VIII, 120 et IX, 30
Note sur les déterminants bordés; par M. <i>C. Le Paige</i>	VIII, 128
Sur l'extension du théorème de Descartes; par M. <i>Ed. Lucas</i>	VIII, 187
Sur la règle de multiplication des déterminants; par M. <i>Le Paige</i>	IX, 77

Sur les conditions de convergence de certaines séries multiples; par M. <i>Camille Jordan</i>	IX, 113
Sur une formule de Gauss; par M. <i>Perott</i>	X, 87
Sur la relation qui existe entre le problème de la Trigonométrie sphérique et la théorie du système de trois formes quadratiques binaires; par M. <i>Stephanos</i>	X, 134
Sur une nouvelle méthode de résolution de l'équation du quatrième degré, et son application à quelques équations de degrés supérieurs; par M. <i>Perrin</i>	X, 139
Sur la recherche des diviseurs des fonctions entières; par M. <i>Perott</i>	X, 250

Analyse.

Sur la limite de transitivité des groupes non alternés; par M. <i>C. Jordan</i>	I, 40
Mémoire sur la théorie des dérivées principales et son application à la Mécanique analytique; par M. <i>Émile Mathieu</i>	I, 157
Mémoire sur les groupes primitifs; par M. <i>Camille Jordan</i>	I, 175
Du facteur constant dans l'expression de $\Theta(x)$ en produit illimité; par M. <i>de Saint-Germain</i>	II, 6a
Mémoire sur une application de la théorie des substitutions à l'étude des équations différentielles linéaires; par M. <i>Camille Jordan</i>	II, 100
Sur l'intégration de quelques équations différentielles; par M. <i>Turquan</i>	III, 40
Sur différentes formes que l'on peut donner à l'intégrale de l'équation d'Euler; par M. <i>Laguerre</i>	III, 101
Sur la limite du degré de la fonction entière qui satisfait à certaines conditions; par M. <i>Tchebichef</i>	III, 103
Sur l'approximation des fonctions d'une variable au moyen de fractions rationnelles; par M. <i>Laguerre</i>	V, 78
Sur le développement en fraction continue de $e^{\arctan(\frac{1}{x})}$; par M. <i>Laguerre</i>	V, 95
Sur une classe de groupes d'ordre fini contenus dans les groupes linéaires; par M. <i>C. Jordan</i>	V, 174
Sur les développements en séries des irrationnelles du second degré et de leurs logarithmes népériens; par M. <i>Édouard Lucas</i>	V, 178
Sur les congruences des nombres eulériens et des coefficients différentiels des fonctions trigonométriques, suivant un module premier; par M. <i>Éd. Lucas</i>	VI, 49
Sur les développements en séries; par M. <i>Édouard Lucas</i>	VI, 57
Sur la multiplication des fonctions elliptiques; par M. <i>Laguerre</i>	VI, 68
Sur la transformation des fonctions elliptiques; par M. <i>Laguerre</i>	VI, 72
Note sur le développement des puissances de certaines fonctions; par M. <i>Désiré André</i>	VI, 120
Sur l'intégration de l'équation $y \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{2}{3} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 6f(x)$, f étant un polynôme du second degré; par M. <i>Laguerre</i>	VI, 121
Sur la recherche du facteur d'intégrabilité des équations différentielles du premier ordre; par M. <i>Laguerre</i>	VI, 124
Sur le développement de la fonction elliptique $\mu(x)$ suivant les puissances croissantes du module; par M. <i>Désiré André</i>	VI, 163
Sur l'intégrale $\int_0^z z^n e^{-\frac{z^2}{2} + \frac{1}{2}z} dz$; par M. <i>Laguerre</i>	VII, 12

Sur l'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{x}$; par M. <i>Laguerre</i>	VII, 77
Sur l'équation différentielle des coniques; par M. <i>Halphen</i>	VII, 83
Sur le développement d'une fonction intermédiaire; par M. <i>Halphen</i> ...	VII, 92
Sur une classe de fonctions non uniformes; par M. <i>E. Picard</i>	VII, 102
Sur les équations différentielles linéaires. (Extrait d'une lettre de M. <i>Brioschi</i> à M. <i>Laguerre</i>).	VII, 105
Sur un système de trois équations différentielles totales qui définissent la moyenne arithmético-géométrique de quatre éléments; par M. <i>C.-W. Borchardt</i> . VII, 124	
Sur la fonction exponentielle; par M. <i>Laguerre</i>	VIII, 11
Sur la réduction en fractions continues d'une fonction qui satisfait à une équation linéaire du premier ordre à coefficients rationnels; par M. <i>Laguerre</i> . VIII, 21	
Remarques sur les équations différentielles linéaires du second ordre; par M. <i>Laguerre</i>	VIII, 35
Sur la fonction $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^u$; par M. <i>Laguerre</i>	VIII, 36
Sur une formule d'analyse; par M. <i>Halphen</i>	VIII, 62
Note sur certaines équations différentielles obtenues par l'élimination de deux fonctions arbitraires; par M. <i>Worms de Romilly</i>	VIII, 64
Note sur une classe d'équations différentielles; par M. <i>Haag</i>	VIII, 80
Sur les fonctions 1^x et $(-1)^x$; par M. <i>Laisant</i>	VIII, 109
Sur l'équation hypergéométrique; par M. <i>Humbert</i>	VIII, 112
Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynôme; par M. <i>Humbert</i>	VIII, 124
Sur les nouvelles formules de MM. <i>Seidel</i> et <i>Stern</i> , concernant les nombres de <i>Bernoulli</i> ; par M. <i>Ed. Lucas</i>	VIII, 169
Sur la réduction en fractions continues d'une classe de fonctions; par M. <i>Georges Humbert</i>	VIII, 182
Sur une généralisation de la théorie des fractions continues algébriques; par M. <i>Humbert</i>	VIII, 191 et IX, 24
Sur une formule de M. <i>Hermite</i> ; par M. <i>Humbert</i>	IX, 42
Sur la fonction $(x-1)^x$; par M. <i>G. Humbert</i>	IX, 56
Sur la représentation analytique des substitutions; par M. <i>de Polignac</i> . IX, 59	
Note sur une formule de <i>Gauss</i> ; par M. <i>N. Sonine</i>	IX, 162
Sur l'équation linéaire qui relie au module la fonction complète de première espèce; par M. <i>Goursat</i>	X, 44
Sur des cas de réduction des fonctions Θ de plusieurs variables à des fonctions Θ d'un moindre nombre de variables; par M. <i>Appell</i>	X, 59
Sur une série d' <i>Abel</i> ; par M. <i>Halphen</i>	X, 67
Sur l'évaluation de certaines intégrales pseudo-elliptiques; par M. <i>Gunther</i> . X, 88	
Sur les intégrales uniformément convergentes; par M. <i>Selivanoff</i>	X, 147
Intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre à n variables indépendantes; par M. <i>Lemonnier</i>	X, 223

Calcul des probabilités.

Sur une question de probabilités; par M. <i>E. Lemoine</i>	I, 39
Sur un problème de probabilités; par M. <i>Halphen</i>	I, 221
Questions de probabilités; par M. <i>Jordan</i>	I, 256 et 281
Sur une question de probabilités; par M. <i>Bienayme</i>	II, 153

Rectification d'une formule de probabilité; par M. <i>Laquière</i>	VIII, 74
Note sur un problème de probabilité; par M. <i>Laquière</i>	VIII, 79
Démonstrations élémentaires des lois fondamentales de la probabilité des écarts dans les méthodes expérimentales; par M. <i>E. Laquière</i>	IX, 69

Géométrie.

Applications nouvelles d'une proposition sur les congruences de droites; par M. <i>Halphen</i>	I, 253
Propriété nouvelle du quadrilatère et du triangle; par M. <i>Brocard</i>	III, 38
Note sur un compas trisecteur, proposé par M. <i>Laisant</i> ; par M. <i>H. Brocard</i>	III, 47
Note sur la division mécanique de l'angle; par M. <i>Perrin</i>	IV, 85
Note sur la division mécanique de l'angle; par M. <i>Brocard</i>	V, 43
Formules fondamentales de Géométrie tricirculaire et tétrasphérique; par M. <i>Éd. Lucas</i>	V, 136
Sur l'application d'un principe de la théorie des fonctions à des recherches purement géométriques; par M. <i>Elling Holst</i>	VIII, 52
Sur la Géométrie de direction; par M. <i>Laguerre</i>	VIII, 196
Remarques sur la théorie des régions et des aspects; par M. <i>Laisant</i> ..	X, 52
Sur un triangle dont les côtés sont exprimés par des nombres entiers, premiers entre eux, et dans lequel le rapport de deux angles est un nombre entier; par M. <i>Weill</i>	X, 55
Sur le problème des aspects; par M. <i>Perrin</i>	X, 163

Courbes planes.

Quelques théorèmes nouveaux sur la lemniscate; par M. <i>Émile Weyr</i> ..	I, 18
Sur la construction des courbes du cinquième et du sixième ordre à points multiples; par M. <i>Kæhler</i>	I, 27
Sur les réseaux de courbes planes; par M. <i>Kæhler</i>	I, 124
Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre; par M. <i>Halphen</i>	I, 130 et 226; II, 11
Démonstration de la proposition de Steiner, relative à l'enveloppe de la droite de Simpson; par M. <i>H. Brocard</i>	I, 224
Sur la détermination des caractéristiques dans les courbes de degré supérieur; par M. <i>Saltel</i>	II, 52
Mémoire sur les systèmes généraux de courbes planes algébriques ou transcendentes, définis par deux caractéristiques; par M. <i>Fouret</i>	II, 72
Sur les courbes planes transcendentes susceptibles de faire partie d'un système (μ, ν) ; par M. <i>Fouret</i>	II, 96
Sur la généralisation des cycliques et cyclides; par M. <i>L. Saltel</i>	III, 95
Seconde Note sur la génération des cycliques; par M. <i>L. Saltel</i>	III, 99
Sur les foyers des cycliques; par M. <i>L. Saltel</i>	III, 100
Sur les polaires d'une droite relativement aux courbes et aux surfaces algébriques; par M. <i>Laguerre</i>	III, 174
Sur la conservation du genre des courbes algébriques dans les transformations uniformes; par M. <i>Halphen</i>	IV, 29
Sur la détermination d'une courbe par une propriété de ses tangentes; par M. <i>H. Brocard</i>	IV, 42

Sur le contact des courbes planes avec les coniques et les courbes du troisième degré; par M. <i>Halphen</i>	IV, 59
Sur les courbes du troisième ordre; par M. <i>Laguerre</i>	IV, 110
Construction de la chaînette par points et division d'un arc de cette courbe en n parties proportionnelles à des segments donnés; par M. <i>G. Jung</i>	IV, 114
Nouvelles propriétés de quelques courbes; par M. <i>Mannheim</i>	IV, 158
Sur les correspondances entre les points de deux courbes; par M. <i>Halphen</i>	V, 7
Sur l'enveloppe de la droite de Simpson; par M. <i>Brocard</i>	V, 18
Sur la détermination, par le principe de correspondance, du nombre des points de contact ou d'intersection sous un angle donné des courbes d'un système avec une courbe algébrique; par M. <i>G. Fouret</i>	V, 19
Sur le lieu des points tels que les tangentes menées de ces points à deux courbes planes soient égales entre elles; par M. <i>Laguerre</i>	V, 25
Recherches sur les normales que l'on peut, d'un point donné, mener à une conique; par M. <i>Laguerre</i>	V, 30
Sur quelques théorèmes de Joachimsthal; par M. <i>Laguerre</i>	V, 92
Note sur la théorie des développoides; par M. <i>Haton de la Goupillière</i>	V, 126
Détermination, par le principe de correspondance du nombre des points d'un plan en lesquels se touchent trois courbes appartenant respectivement à trois systèmes donnés; par M. <i>G. Fouret</i>	V, 130
Sur les courbes unicursales de troisième classe; par M. <i>Laguerre</i>	VI, 54
Détermination de la classe de la courbe-enveloppe des axes des coniques, perspectives sur un plan vertical de cercles de rayons égaux situés dans un plan vertical et dont les centres sont sur une horizontale. Construction des axes de ces courbes; par M. <i>Picquet</i>	VI, 82
Sur une relation remarquable entre quelques-unes des singularités réelles des courbes algébriques planes; par M. <i>Perrin</i>	VI, 84
Sur certains réseaux singuliers formés par des courbes planes; par M. <i>Edmond Laguerre</i>	VI, 129
Sur quelques propriétés des coniques homofocales; par M. <i>Laguerre</i>	VII, 66
Sur quelques propriétés de l'hypocycloïde à trois points de rebroussement; par M. <i>Laguerre</i>	VII, 108
Sur les faisceaux ponctuels plans de caractéristique v , ayant un point principal multiple d'ordre v ; par M. <i>G. Fouret</i>	VII, 177
Note sur l'évaluation du nombre des coniques faisant partie d'un système et satisfaisant à une condition simple; par M. <i>Schubert</i>	VIII, 61
Sur certaines directions de transversales des courbes algébriques qui correspondent aux axes des coniques; par M. <i>Stephanos</i>	IX, 49
Problème concernant les courbes planes du troisième degré; par M. <i>Georges Halphen</i>	IX, 96
Sur les courbes de Clebsch dont les coordonnées s'expriment en fonction elliptique d'un paramètre; par M. <i>G. Humbert</i>	IX, 166
Sur les courbes d'un système linéaire trois fois infini, qui touchent une courbe algébrique donnée par un contact du troisième ordre; par M. <i>Lindemann</i>	X, 21
Sur les polygones dont les côtés sont tangents à une courbe, et dont les sommets sont sur la courbe; par M. <i>Weill</i>	X, 127
Sur le centre des moyennes distances des points d'une courbe unicursale; par M. <i>Weill</i>	X, 137
Sur les courbes planes du sixième degré à neuf points doubles; par M. <i>Georges Halphen</i>	X, 162
Deux théorèmes relatifs aux centres des courbes algébriques; par M. <i>Schoute</i>	X, 210

Sur le lieu des centres des hyperboles équilatères qui ont un contact du troisième ordre avec une parabole donnée; par M. *Schoute*..... X, 222

Courbes gauches.

Sur les courbes tracées sur les surfaces du second ordre; par M. *Halphen*. I, 19
 Sur l'application de la théorie des formes binaires à la géométrie des courbes tracées sur une surface du second ordre; par M. *Laguerre*..... I, 31
 Sur quelques propriétés des courbes gauches fermées; par M. *Flye Sainte-Marie*..... I, 82
 Sur la biquadratique sphérique et sur la détermination du plan osculateur en un point de cette courbe; par M. *Laguerre*..... I, 101
 Sur les courbes gauches algébriques; surface engendrée par les sécantes triples; nombre des sécantes quadruples; par M. *Picquet*..... I, 260
 Sur le plan osculateur et sur la sphère osculatrice; par M. *Saltel*..... II, 64
 Sur quelques propriétés des courbes gauches algébriques; par M. *Halphen*. II, 69
 Sur la théorie des roulettes gauches; par M. *H. Laurent*..... II, 84
 Construire la sphère osculatrice en un point de la courbe d'intersection de deux surfaces données; par M. *Mannheim*..... II, 140
 Sur les courbes gauches et sur la valeur de la torsion en un point d'une ligne géodésique tracée sur une surface du second ordre; par M. *Laguerre*.. IV, 160
 Sur les singularités des courbes gauches algébriques; par M. *Halphen*... VI, 10
 Note sur les relations entre les éléments caractéristiques d'une courbe gauche et les accélérations du point qui la décrit; par M. *Haag*..... VII, 140
 Intégrales des courbes dont les développantes par le plan et les développées par le plan sont égales entre elles; par M. l'abbé *Aoust*..... VII, 143
 Étude sur les courbes gauches unicursales; par M. *Genty*..... IX, 115

Surfaces.

Sur la représentation sur un plan de la surface du troisième ordre, qui est la réciproque de la surface de Steiner; par M. *Laguerre*..... I, 21
 Sur les cônes du second degré qui passent par six points donnés de l'espace; par M. *Laguerre*..... I, 71
 Sur les sections planes des cônes circulaires obliques; par M. *de Pistoye*. I, 117
 Détermination, par le principe de correspondance, du nombre des points d'intersection de trois surfaces algébriques d'ordres quelconques; par M. *Fouret*. I, 122
 Mémoire sur la Géométrie de la sphère; par M. *Laguerre*..... I, 241
 Sur l'application du principe de correspondance à la détermination du nombre des points d'intersection de trois surfaces ou d'une courbe gauche et d'une surface; par M. *Fouret*..... I, 258
 Sur un genre particulier de surfaces dont on peut intégrer les lignes géodésiques; par M. *Laguerre*..... I, 281
 Sur un point de la théorie du contact; par M. *Halphen*..... II, 94
 Sur les propriétés métriques des surfaces du second degré; par M. *G. Darboux*..... II, 144
 Sur le contact des surfaces; par M. *Halphen*..... III, 28
 Sur la courbure des surfaces de carène; par M. *de Saint-Germain*..... III, 37
 Sur une surface remarquable du huitième degré; par M. *Picquet*..... IV, 45

Théorèmes concernant les surfaces dont les rayons de courbure principaux sont liés par une relation; par M. Halphen.....	IV, 94
Sur une formule de la théorie des surfaces; par M. Ch. Brisse.....	IV, 96
Sur un nouveau mode de génération des surfaces du troisième degré; par M. H. Picquet.....	IV, 128
Des sections paraboliques et équilatères dans les surfaces du troisième degré; par M. H. Picquet.....	IV, 153
Sur les lignes de courbure des surfaces du second ordre; par M. Laguerre.....	V, 24
Sur les lignes asymptotiques des surfaces gauches douées de deux directrices rectilignes; par M. Halphen.....	V, 134
Sur les surfaces dont les rayons de courbure principaux sont fonctions l'un de l'autre; par M. A. Mannheim.....	V, 163
Théorème sur les surfaces; par M. Haag.....	V, 166
Sur le parabolôïde des normales d'une surface réglée; par M. A. Mannheim.....	V, 190
Démonstration géométrique d'un théorème relatif aux surfaces réglées; par M. A. Mannheim.....	VI, 7
Sur le nombre des normales communes à deux courbes, à deux surfaces, à une courbe et à une surface; par M. G. Fouret.....	VI, 43

Géométrie généralisée.

Recherches de Géométrie à n dimensions; par M. Halphen.....	II, 34
Essai sur la Géométrie à n dimensions; par M. Camille Jordan.....	III, 103
Sur les transformations linéaires successives dans le même espace à r dimensions; par M. S. Kantor.....	VIII, 208
Quelques théorèmes de Géométrie à n dimensions; par M. Schlegel.....	X, 172

Géométrie descriptive.

Ombre portée par un tore sur lui-même; par M. Cahen.....	IV, 87
Note sur l'épure du conoïde; par M. Cahen.....	IV, 88
Solution simple d'un problème de Géométrie descriptive élémentaire; par M. Hermary.....	VII, 138
Sur l'épure des vingt-sept droites d'une surface du troisième degré, dans le cas où ces droites sont réelles; par M. Caron.....	VIII, 73

Géométrie cinématique.

Sur les trajectoires des points d'une droite mobile dans l'espace; par M. Mannheim.....	I, 106
Sur le mouvement d'une droite; par M. Halphen.....	I, 114
Sur le mouvement des figures dans le plan et dans l'espace; par M. Camille Jordan.....	I, 144
Sur le déplacement d'un solide invariable; par M. Halphen.....	II, 56
Nouvelle démonstration d'un théorème relatif au déplacement infiniment petit d'un dièdre, et nouvelle application de ce théorème; par M. A. Mannheim.....	VI, 5

Note sur un théorème relatif au déplacement d'une figure plane dans son plan; par M. <i>H. Léauté</i>	VI, 170
Mémoire de Géométrie sur la construction des normales à plusieurs courbes mécaniques; par M. <i>Chasles</i>	VI, 208
Sur certains cas singuliers du déplacement d'un corps solide; par M. <i>Halphen</i>	VIII, 18

Cinématique.

Sur le lieu des points d'un système invariable mobile d'une manière générale dans l'espace, dont les accélérations du premier ordre sont constantes; par M. <i>V. Liguine</i>	I, 151
---	--------

Statique.

Sur la résultante de deux forces appliquées à un seul point; par M. <i>Tchebicheff</i>	VI, 188
Note touchant deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité; par M. <i>Laisant</i>	VI, 193
Note relative à deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité; par M. <i>G. Darboux</i>	VII, 7
Note relative à deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité; par M. <i>Jung</i>	VII, 132
Sur certaines propriétés des centres de gravité; par M. <i>Laisant</i>	X, 40
Sur le théorème de M. Laisant relatif à certaines propriétés des centres de gravité; par M. <i>Laquière</i>	X, 131
Sur le théorème de M. Laisant relatif aux centres de gravité; par M. <i>Schlegel</i>	X, 220

Dynamique.

Sur la courbe balistique; par M. <i>Allégret</i>	I, 150
Sur la durée des oscillations du pendule composé; par M. <i>de Saint-Germain</i>	II, 54
Étude d'une question relative au mouvement d'un point sur une surface de révolution; par M. <i>G. Darboux</i>	V, 100
Étude sur un cas singulier du mouvement d'un point matériel; par M. <i>Gascheau</i>	X, 207

Mécanique appliquée.

Note sur le tracé des engrenages par arcs de cercle; perfectionnement de la méthode de Willis; par M. <i>H. Léauté</i>	IV, 99
Sur la construction de la troisième courbe représentative des poussées maxima et minima dans le Mémoire de M. Peaucellier « Sur la stabilité des voûtes »; par M. <i>G. Jung</i>	IV, 163
Remarque sur le frottement d'une corde sur un cylindre, lorsque tous deux tournent avec une grande vitesse; par M. <i>Léauté</i>	IX, 46

Physique mathématique.

Théorie mathématique des expériences de Pinaud, relatives aux sons rendus par les tubes chauffés; par M. J. Bourget.....	I, 87
--	-------

Histoire des Mathématiques.

Sur un dodécaèdre antique, conservé au Musée du Louvre; par M. le comte L. Hugo.....	I, 83
Note historique sur le problème des engrenages cylindriques; par M. V. Liguine.....	I, 251
Sur un manuel du calculateur découvert dans un papyrus égyptien; par M. L. Rodet.....	VI, 139
Sur une méthode d'approximation des racines carrées, connue dans l'Inde, antérieurement à la conquête d'Alexandre; par M. L. Rodet.....	VII, 98
Sur les méthodes d'approximation chez les anciens; par M. L. Rodet ..	VII, 159
Sur un procédé ancien pour la solution en nombres entiers de l'équation indéterminée $ax + by = c$; par M. L. Rodet.....	VII, 171
Le souan-pan des Chinois et la banque des argentiers; par M. L. Rodet.....	VIII, 158

Divers.

Extrait d'une Lettre adressée à M. Chasles; par M. le Dr O.-J. Broch.....	I, 104
Questions.....	III, 46
Rectification; par M. H. Picquet.....	IV, 156
Observations sur la théorie des caractéristiques; par M. Halphen.....	VIII, 31
Réponse aux observations de M. Halphen sur la théorie des caractéristiques; par M. Schubert.....	VIII, 60

TABLE PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE

DE NOMS D'AUTEURS.

- Alexéeff.** — Sur l'extraction de la racine carrée d'un nombre (VII, 167).
- Allégret.** — Sur la courbe balistique (I, 150).
- André (Désiré).** — Théorème nouveau sur les factorielles (I, 84). — Sur un problème d'analyse combinatoire (V, 150). — Note sur le développement des puissances de certaines fonctions (VI, 120). — Sur le développement de la fonction elliptique $\mu(x)$ suivant les puissances croissantes du module (VI, 163). — Problème sur les équations génératrices des séries récurrentes (VI, 166). — Détermination du nombre des arrangements complets où les éléments consécutifs satisfont à des conditions données (VII, 43).
- Aoust (abbé).** — Intégrales des courbes dont les développantes par le plan et les développées par le plan sont égales entre elles (VII, 143).
- Appell.** — Sur un cas de réduction des fonctions Θ de plusieurs variables à des fonctions Θ d'un moindre nombre de variables (X, 59).
- Bienaymé.** — Sur une question de probabilités (II, 153).
- Borchardt.** — Sur un système de trois équations différentielles totales qui définissent la moyenne arithmético-géométrique de quatre éléments (VII, 124).
- Bourget (J.).** — Théorie mathématique des expériences de Pinaud, relatives aux sons rendus par les tubes chauffés (I, 87).
- Brisse.** — Sur une formule de la théorie des surfaces (IV, 96).
- Brioschi.** — Sur les équations différentielles linéaires (VII, 105).
- Brocard.** Démonstration de la proposition de Steiner, relative à l'enveloppe de la droite de Simpson (I, 224). — Propriété nouvelle du quadrilatère et du triangle (III, 38). — Note sur un compas trisecteur, proposé par M. Laisant (III, 47). — Sur la détermination d'une courbe par une propriété de ses tangentes (IV, 42). — Sur l'enveloppe de la droite de Simpson (V, 18). — Note sur la division mécanique de l'angle (V, 43).
- Broch (Dr O.-J.).** — Extrait d'une Lettre adressée à M. Chasles (I, 104).
- Cahen.** — Ombre portée par un tore sur lui-même (IV, 87). — Note sur l'épure du conoïde (IV, 88).
- Caron.** — Sur l'épure des vingt-sept droites d'une surface du troisième degré, dans le cas où ces droites sont réelles (VIII, 73).
- Chasles.** — Mémoire de Géométrie sur la construction des normales à plusieurs courbes mécaniques (VI, 208).

Darboux. — Sur les propriétés métriques des surfaces du second degré (II, 144).
— Étude d'une question relative au mouvement d'un point sur une surface de révolution (V, 100). — Note relative à deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité (VII, 7).

Flye Sainte-Marie. — Sur quelques propriétés des courbes gauches fermées (I, 82).
— Note sur un problème relatif à la marche du cavalier sur l'échiquier (V, 144).

Fourret. — Détermination, par le principe de correspondance, du nombre des points d'intersection de trois surfaces algébriques d'ordres quelconques (I, 132).
— Sur l'application du principe de correspondance à la détermination du nombre des points d'intersection de trois surfaces ou d'une courbe gauche et d'une surface (I, 258). — Mémoire sur les systèmes généraux de courbes planes, algébriques ou transcendentes, définies par deux caractéristiques (II, 72). — Sur les courbes planes transcendentes, susceptibles de faire partie d'un système (μ, ν) (II, 96). — Détermination du nombre exact des solutions d'un système de n équations algébriques à n inconnues (II, 127). — Résolution graphique d'un système d'équations du premier degré (III, 93). — Sur la détermination, par le principe de correspondance, du nombre des points de contact ou d'intersection sous un angle donné des courbes d'un système avec une courbe algébrique (V, 19). — Détermination, par le principe de correspondance, du nombre des points d'un plan en lesquels se touchent trois courbes appartenant respectivement à trois systèmes donnés (V, 130). — Sur le nombre des normales communes à deux courbes, à deux surfaces, à une courbe et à une surface (VI, 43). — Sur les faisceaux ponctuels plans de caractéristique ν , ayant un point principal multiple d'ordre ν (III, 177).

Gascheau. — Étude sur un cas singulier du mouvement d'un point matériel (X, 207).

Genty. — Étude sur les courbes gauches unicursales (IX, 115).

Goursat. — Sur l'équation linéaire qui relie au module la fonction complète de première espèce (X, 44).

Gunther. — Sur l'évaluation de certaines intégrales pseudo-elliptiques (X, 88).

Haag. — Théorème sur les surfaces (V, 166). — Note sur les relations entre les éléments caractéristiques d'une courbe gauche et les accélérations du point qui la décrit (VII, 140). — Note sur une classe d'équations différentielles (VIII, 80).

Halphen. — Sur les courbes tracées sur les surfaces du second ordre (I, 19). — Sur le mouvement d'une droite (I, 114). — Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre (I, 130 et 226; II, 11). — Sur un problème de probabilités (I, 221). — Applications nouvelles d'une proposition sur les congruences de droites (I, 253). — Recherches de Géométrie à n dimensions (II, 34). — Sur le développement d'un solide invariable (II, 56). — Sur quelques propriétés des courbes gauches algébriques (II, 69). — Sur un point de la théorie du contact (II, 94). — Sur le contact des surfaces (III, 28). — Sur une question d'élimination ou sur l'intersection de deux courbes en un point singulier (III, 76). — Sur la conservation du genre des courbes algébriques dans les transformations uniformes (IV, 29). — Sur le contact des courbes planes avec les coniques et les courbes du troisième degré (IV, 59). — Théorèmes concernant les surfaces dont les rayons de courbure principaux sont liés par une relation (IV, 94). — Sur les correspondances entre les points de deux courbes (V, 7). — Sur les lignes asymptotiques des surfaces gauches douées de deux directrices rectilignes (V, 134). — Sur une formule récurrente concernant les sommes des diviseurs des nombres entiers (V, 158). — Sur une proposition

- d'Algèbre (V, 160). — Sur des suites de fractions analogues à la suite de Farey (V, 170). — Sur les singularités des courbes gauches algébriques (VI, 10). — Sur les sommes des diviseurs des nombres entiers et les décompositions en deux carrés (VI, 119). — Sur diverses formules récurrentes concernant les diviseurs des nombres entiers (VI, 173). — Sur l'équation différentielle des coniques (VII, 83). — Sur le développement d'une fonction intermédiaire (VII, 92). — Sur certains cas singuliers du déplacement d'un corps solide (VIII, 18). — Observations sur la théorie des caractéristiques (VIII, 31). — Sur une formule d'analyse (VIII, 62). — Problème concernant les courbes planes du troisième degré (IX, 96). — Sur une série d'Abel (X, 67). — Sur les courbes planes du sixième degré à neuf points doubles (X, 162).
- Haton de la Goupillière.** — Note sur la théorie des développés (V, 126).
- Hermary.** — Solution simple d'un problème de Géométrie descriptive élémentaire (VII, 138).
- Hermite.** — Sur l'indice des fractions rationnelles (VII, 128).
- Holst (Elling).** — Sur l'application d'un principe de la théorie des fonctions à des recherches purement géométriques (VIII, 52).
- Humbert.** — Sur l'équation hypergéométrique (VIII, 112). — Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynôme (VIII, 124). — Sur la réduction en fractions continues d'une classe de fonctions (VIII, 182). — Sur une généralisation de la théorie des fractions continues algébriques (VIII, 191; IX, 24). — Sur une formule de M. Hermite (IX, 42). — Sur la fonction $(x-1)^a$ (IX, 56). — Sur les courbes de Clebsch dont les coordonnées s'expriment en fonction elliptique d'un paramètre (IX, 166).
- Hugo (comte L.)** — Sur un dodécaèdre antique conservé au Musée du Louvre (I, 33).
- Jordan (Camille).** — Sur la limite de transitivité des groupes non alternés (I, 40). — Sur le mouvement des figures dans le plan et dans l'espace (I, 144). — Mémoire sur les groupes primitifs (I, 175). — Questions de probabilités (I, 256 et 281). — Mémoire sur une application de la théorie des substitutions à l'étude des équations différentielles linéaires (II, 100). — Essai sur la Géométrie à n dimensions (III, 103). — Sur une classe de groupes d'ordre fini contenus dans les groupes linéaires (V, 174). — Sur les conditions de convergence de certaines séries multiples (IX, 113).
- Jung.** — Construction de la chaînette par points, et division d'un arc de cette courbe en n parties proportionnelles à des segments donnés (IV, 114). — Sur la construction de la troisième courbe représentative des poussées maxima et minima dans le Mémoire de M. Peaucellier *Sur la stabilité des voûtes* (IV, 163). — Note relative à deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité (VII, 132).
- Kantor (S.).** — Sur les transformations linéaires successives dans le même espace à r dimensions (VIII, 208). —
- Köhler.** — Sur la construction des courbes du cinquième et du sixième ordre à points multiples (I, 27). — Sur les réseaux de courbes planes (I, 124).
- Laguerre.** — Sur la représentation sur un plan de la surface du troisième ordre qui est la réciproque de la surface de Steiner (I, 21). — Sur l'application de la théorie des formes binaires à la géométrie des courbes tracées sur une surface du second ordre (I, 31). — Sur les cônes du second degré qui passent par six points donnés de l'espace (I, 71). — Sur quelques théorèmes d'Arithmétique (I, 77). — Sur la biquadratique sphérique et sur la détermination du plan osculateur en un point de cette courbe (I, 101). — Mémoire sur la géométrie de la sphère (I, 241). — Sur un genre particulier de surfaces dont on peut

intégrer les lignes géodésiques (I, 281). — Sur différentes formes que l'on peut donner à l'intégrale de l'équation d'Euler (III, 101). — Sur les polaires d'une droite relativement aux courbes et aux surfaces algébriques (III, 174). — Sur les courbes du troisième ordre (IV, 110). — Sur les courbes gauches et sur la valeur de la torsion en un point d'une ligne géodésique tracée sur une surface du second ordre (IV, 160). — Sur les lignes de courbure des surfaces du second ordre (V, 24). — Sur le lieu des points tels que les tangentes menées de ces deux points à deux courbes planes soient égales entre elles (V, 25). — Sur un problème d'Algèbre (V, 26). — Recherches sur les normales que l'on peut, d'un point donné, mener à une conique (V, 30). — Sur la partition des nombres (V, 76). — Sur l'approximation des fonctions d'une variable au moyen de fractions rationnelles (V, 78). — Sur quelques théorèmes de Joachimsthal (V, 92).

— Sur le développement en fraction continue de $e^{\arctan(\frac{1}{x})}$ (V, 95). — Sur les courbes unicursales de troisième classe (VI, 54). — Sur la multiplication des fonctions elliptiques (VI, 68). — Sur la transformation des fonctions elliptiques (VI, 72). — Sur l'intégration de l'équation $y \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{3} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 6f(x)$, f étant un polynôme du second degré (VI, 121). — Sur la recherche du facteur d'intégrabilité des équations différentielles du premier ordre (VI, 224). — Sur certains réseaux singuliers formés par des courbes planes (VI, 129). — Sur l'intégrale $\int_0^x z^n e^{-\frac{z^2}{2} + 2zx} dz$ (VII, 12). — Sur quelques propriétés des coniques

homofocales (VII, 66). — Sur l'intégrale $\int_0^\infty \frac{e^{-x} dx}{x}$ (VII, 72). — Sur quelques propriétés de l'hypocycloïde à trois points de rebroussement (VII, 108). — Sur la fonction exponentielle (VIII, 11). — Sur la réduction en fractions continues d'une fonction qui satisfait à une équation linéaire du premier ordre à coefficients rationnels (VIII, 21). — Remarques sur les équations différentielles linéaires du second ordre (VIII, 35). — Sur la fonction $\left(\frac{x+1}{x-1} \right)^\omega$ (VIII, 36). —

Sur la géométrie de direction (VIII, 196).

Laisant. — Note sur la géométrie des quinconces (VI, 156). — Note touchant deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité (VI, 193). — Sur les fonctions 1^x et $(-1)^x$ (VIII, 109). — Sur certaines propriétés des centres de gravité (X, 40). — Remarques sur la théorie des régions et des aspects (X, 52).

Laquière. — Note sur la géométrie des quinconces (VII, 85). — Rectification d'une formule de probabilité (VIII, 74). — Note sur un problème de probabilité (VIII, 79). — Solutions régulières du problème d'Euler sur la marche du cavalier (VIII, 82 et 132). — Note sur le nombre des marches rentrantes que l'on peut obtenir en remplissant successivement les deux demi-échiquiers ayant pour frontière commune l'une des médianes de l'échiquier total (IX, 11). — Démonstrations élémentaires des lois fondamentales de la probabilité des écarts dans les méthodes expérimentales (IX, 69). — Sur le théorème de M. Laisant relatif à certaines propriétés des centres de gravité (X, 131).

Laurent. — Sur la théorie des roulettes gauches (II, 84).

Léauté. — Note sur le tracé des engrenages par arcs de cercle; perfectionnement de la méthode de Willis (IV, 99). — Note sur un théorème relatif au déplacement d'une figure plane dans son plan (VI, 170). — Note sur le calcul approché par la méthode de Poncelet des radicaux de la forme $\sqrt{x^2 - y^2}$ (VIII, 106).

- Remarque sur le frottement d'une corde sur un cylindre lorsque tous deux tournent avec une grande vitesse (IX, 46).
- Lemoine** (Émile). — Sur une question de probabilités (I, 39).
- Lemonnier**. — Mémoire sur la transformation des formes quadratiques (III, 48). — Sur des fonctions analogues à celles de Sturm (VI, 149). — Sur la résolution de trois équations du second degré en x, y, z (VII, 16). — Calcul d'un déterminant (VII, 175). — Intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre à n variables indépendantes (X, 223).
- Le Paige**. — Note sur les déterminants bordés (VIII, 128). — Sur la règle de multiplication des déterminants (IX, 67).
- Liguine**. — Sur le lieu des points d'un système invariable, mobile d'une manière générale dans l'espace, dont les accélérations du premier ordre sont constantes (I, 152). — Note historique sur le problème des engrenages cylindriques (I, 251).
- Lindemann**. — Sur une représentation géométrique des covariants des formes binaires (V, 113, et VI, 195). — Sur les courbes d'un système linéaire trois fois infini, qui touchent une courbe algébrique donnée par un contact du troisième ordre (X, 21).
- Lucas** (Édouard). — Formules fondamentales de géométrie tricirculaire et tétrasphérique (V, 136). — Sur les développements en séries des irrationnelles du second degré et de leurs logarithmes népériens (V, 178). — Théorème sur la géométrie des quinconces (VI, 9). — Sur les congruences des nombres eulériens et des coefficients différentiels des fonctions trigonométriques, suivant un module premier (VI, 49). — Sur les développements en séries (VI, 57). — Sur les suites de Farey (VI, 118). — Sur les nouvelles formules de MM. Seidel et Stern, concernant les nombres de Bernoulli (VIII, 169). — Théorèmes généraux sur l'impossibilité des équations cubiques indéterminées (VIII, 173). — Sur l'extension du théorème de Descartes (VIII, 187).
- Mannheim**. — Sur les trajectoires des points d'une droite mobile dans l'espace (I, 106). — Construire la sphère osculatrice en un point de la courbe d'intersection de deux surfaces données (II, 140). — Nouvelles propriétés de quelques courbes (IV, 158). — Sur les surfaces dont les rayons de courbure principaux sont fonctions l'un de l'autre (V, 163). — Sur le paraboloïde des normales d'une surface réglée (V, 190). — Nouvelle démonstration d'un théorème relatif au déplacement infiniment petit d'un dièdre, et nouvelle application de ce théorème (VI, 5). — Démonstrations géométriques d'un théorème relatif aux surfaces réglées (VI, 7).
- Mathieu** (Émile). — Mémoire sur la théorie des dérivées principales et son application à la Mécanique analytique (I, 157).
- Pellet**. — Sur les résidus cubiques et biquadratiques, suivant un module premier (X, 157).
- Perott**. — Sur un théorème de Gauss (X, 87). — Sur la recherche des diviseurs des fonctions entières (X, 250).
- Perrin**. — Note sur la division mécanique de l'angle (IV, 85). — Note sur une formule de sommation applicable à une classe de séries (V, 47). — Sur une relation remarquable entre quelques-unes des singularités réelles des courbes algébriques planes (VI, 84). — Sur le problème des aspects (X, 103). — Sur une nouvelle méthode de résolution de l'équation du quatrième degré, et son application à quelques équations de degrés supérieurs (X, 139).
- Picard**. — Sur une classe de fonctions non uniformes (VII, 102).
- Picquet**. — Sur les courbes gauches algébriques: surface engendrée par les

- sécantes triples; nombre des sécantes quadruples (I, 260). — Sur une surface remarquable du huitième degré (IV, 45). — Sur un nouveau mode de génération des surfaces du troisième degré (IV, 128). — Des sections paraboliques et équilatères dans les surfaces du troisième degré (IV, 153). — Rectification (IV, 156). — Détermination de la classe de la courbe enveloppe des axes des coniques, perspectives sur un plan vertical de cercles de rayons égaux situés dans un plan vertical et dont les centres sont sur une horizontale. Construction des axes de ces courbes (VI, 82).
- Pistoye (de).** — Sur les sections planes des cônes circulaires obliques (I, 117).
- Polignac (prince C. de).** — Sur une propriété du polynôme $(x^2 - 1)^n$ (III, 19). — Note sur les substitutions linéaires (IV, 120). — Sur les substitutions linéaires (V, 69). — Représentation graphique de la résolution en nombres entiers de l'équation indéterminée $ax + by = c$ (VI, 158). — Formules et considérations diverses se rapportant à la théorie des ramifications (VIII, 120, et IX, 30). — Note sur la marche du cavalier dans un échiquier (IX, 17). — Sur la représentation analytique des substitutions (IX, 59).
- Resal.** — Sur un théorème de Poncelet et sa généralisation par M. Horvarth (I, 155).
- Rodet.** — Sur un manuel du calculateur découvert dans un papyrus égyptien (VI, 139). — Sur une méthode d'approximation des racines carrées, connue dans l'Inde, antérieurement à la conquête d'Alexandre (VII, 98). — Sur les méthodes d'approximation chez les anciens (VII, 159). — Sur un procédé ancien pour la solution en nombres entiers de l'équation indéterminée $ax + by = c$ (VII, 171). — Le souan-pan des Chinois et la banque des Argentiers (VIII, 158).
- Saint-Germain (de).** — Sur la résolvante de deux équations du second degré (I, 142). — Sur la durée des oscillations du pendule composé (II, 54). — Du facteur constant dans l'expression de $\Theta(x)$ en produit illimité (II, 62). — Sur la courbure des surfaces de carène (III, 37).
- Saltel.** — Sur la détermination des caractéristiques dans les courbes de degré supérieur (II, 52). — Sur le plan osculateur et sur la sphère osculatrice (II, 64). — Sur la génération des cycliques et cyclides (III, 95). — Seconde Note sur la génération des cycliques (III, 99). — Sur les foyers des cycliques (III, 100).
- Sancery.** — De la répartition des nombres entre les diviseurs de $\varphi(M)$, lorsque M est une puissance d'un nombre premier impair, ou le double d'une telle puissance (IV, 17).
- Schlegel.** — Quelques théorèmes de géométrie à n dimensions (X, 172). — Sur le théorème de M. Laisant relatif aux centres de gravité (X, 220).
- Schoute.** — Deux théorèmes relatifs aux centres des courbes algébriques (X, 219). — Sur le lieu des centres des hyperboles équilatères qui ont un contact du troisième ordre avec une parabole donnée (X, 222).
- Schubert.** — Réponse aux observations de M. Halphen sur la théorie des caractéristiques (VIII, 60). — Note sur l'évaluation du nombre des coniques faisant partie d'un système et satisfaisant à une condition simple (VIII, 61).
- Selivanoff.** — Sur les intégrales uniformément convergentes (X, 147).
- Sonine.** — Note sur une formule de Gauss (IX, 162).
- Stephanos.** — Sur une propriété remarquable des nombres incommensurables (VII, 81). — Sur certaines directions transversales des courbes algébriques qui correspondent aux axes des coniques (IX, 49). — Sur la relation qui existe entre le problème de la Trigonométrie sphérique et la théorie du système de trois formes quadratiques binaires (X, 134).

Tchebychef. — Sur la limite du degré de la fonction entière qui satisfait à certaines conditions (III, 103). — Sur la résultante de deux forces appliquées à un seul point (VII, 188).

Turquan. — Sur l'intégration de quelques équations différentielles (III, 40).

Weill. — Énoncé d'un théorème d'Arithmétique (IX, 172). — Sur un triangle dont les côtés sont exprimés par des nombres entiers, premiers entre eux, et dans lequel le rapport de deux angles est un nombre entier (X, 55). — Sur les polygones dont les côtés sont tangents à une courbe et dont tous les sommets sont sur la courbe (X, 127). — Sur le centre des moyennes distances des points d'une courbe unicursale (X, 137).

Weyr (Émile). — Quelques théorèmes nouveaux sur la lemniscate (I, 18).

Worms de Romilly. — Note sur certaines équations différentielles obtenues par l'élimination de deux fonctions arbitraires (VIII, 64).

FIN DES TABLES DE LA PREMIÈRE SÉRIE.





BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME HUITIÈME.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7. RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1880

EXTRAIT DES STATUTS

La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études de mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et par la publication des mémoires de ses membres. Son siège est à Paris.

La Société se compose de membres résidents et de membres non résidents.

Les Français et les Étrangers peuvent également en faire partie.

Le nombre des membres résidents et non résidents est illimité.

Les ressources de la Société se composent : 1° de la cotisation annuelle des membres résidents et non résidents, et dont le montant est fixé par le règlement administratif de la Société ; 2° du revenu du capital formé par les droits d'admission, les souscriptions perpétuelles, le produit de la vente des ouvrages édités par la Société et les dons qu'elle pourra recevoir.

EXTRAIT DU RÈGLEMENT ADMINISTRATIF.

Les conditions à remplir pour devenir membre de la Société sont : 1° d'être présenté par deux membres qui auront adressé une demande signée ; 2° d'obtenir, à l'une des séances suivantes, les suffrages de la majorité des membres présents.

Le diplôme délivré est signé par le président, l'un des secrétaires et le trésorier, et porte le sceau de la Société.

Le trésorier remet le diplôme après l'acquittement du droit d'admission, montant à 10 francs, et de la cotisation annuelle.

La Société tient ses séances ordinaires deux fois par mois ; elle prend trois mois de vacances : août, septembre et octobre.

Le tableau des jours de réunion est imprimé sur une carte adressée aux membres résidant à Paris.

Elle sera également envoyée aux membres non résidents sur leur demande personnelle.

Pour assister à la séance, les personnes étrangères à la Société doivent être introduites, chaque fois, par un de ses membres.

Les communications faites par les membres de la Société ont lieu dans l'ordre de leur inscription : les communications des personnes étrangères à la Société ont lieu après celles des membres, sauf les cas d'urgence qui seront appréciés par le bureau.

La Société, préoccupée des avantages qu'elle peut offrir à tous ses membres, a décidé que le recueil intitulé : *Bulletin de la Société mathématique*, qui rend compte des mémoires présentés à la Société, sera distribué gratuitement à tous les membres résidents ou non résidents.

La Société, voulant concourir aux progrès des mathématiques par tous les moyens compatibles avec son mode d'organisation, avisera aux moyens de publier successivement, et d'une manière aussi complète qu'il sera possible ou utile de le faire, les œuvres des anciens mathématiciens français ou étrangers.

Les publications émanant de la Société, autres que le *Bulletin*, sont délivrées à prix réduit à tous les membres de la Société résidents ou non résidents.

La Société forme une bibliothèque et échange ses publications contre les journaux et recueils consacrés aux mathématiques pures et appliquées, publiés en France et à l'étranger.

Les versements des membres résidents et non résidents se composent : 1° du droit d'admission, montant à 10 francs ; 2° de la cotisation annuelle.

Pour les membres résidents, cette cotisation annuelle s'élève à 20 francs, payables d'avance, et, pour les membres non résidents, à 15 francs, également payables d'avance.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leurs occupations habituelles, ou y exercent habituellement leurs fonctions.

Les nouveaux membres devront payer la totalité de la cotisation, quelle que soit l'époque de leur admission.

Les publications ne seront adressées qu'après le versement de la cotisation annuelle.

La cotisation annuelle peut, au choix de chaque membre, être remplacée par une somme de 300 francs une fois payée.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

Les dons faits à la Société sont inscrits au *Bulletin* des séances avec le nom des donateurs.

5803 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

PUBLIE
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME NEUVIÈME.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1884



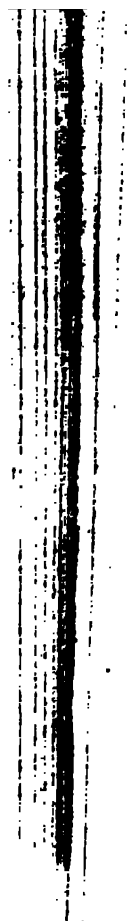
BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME DIXIÈME.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1882



PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES AUGUSTINS, 55.

11

11

11

11

11

11

11

11

11

11

11

11

11

11

11

11

11

11

11

11

11

11

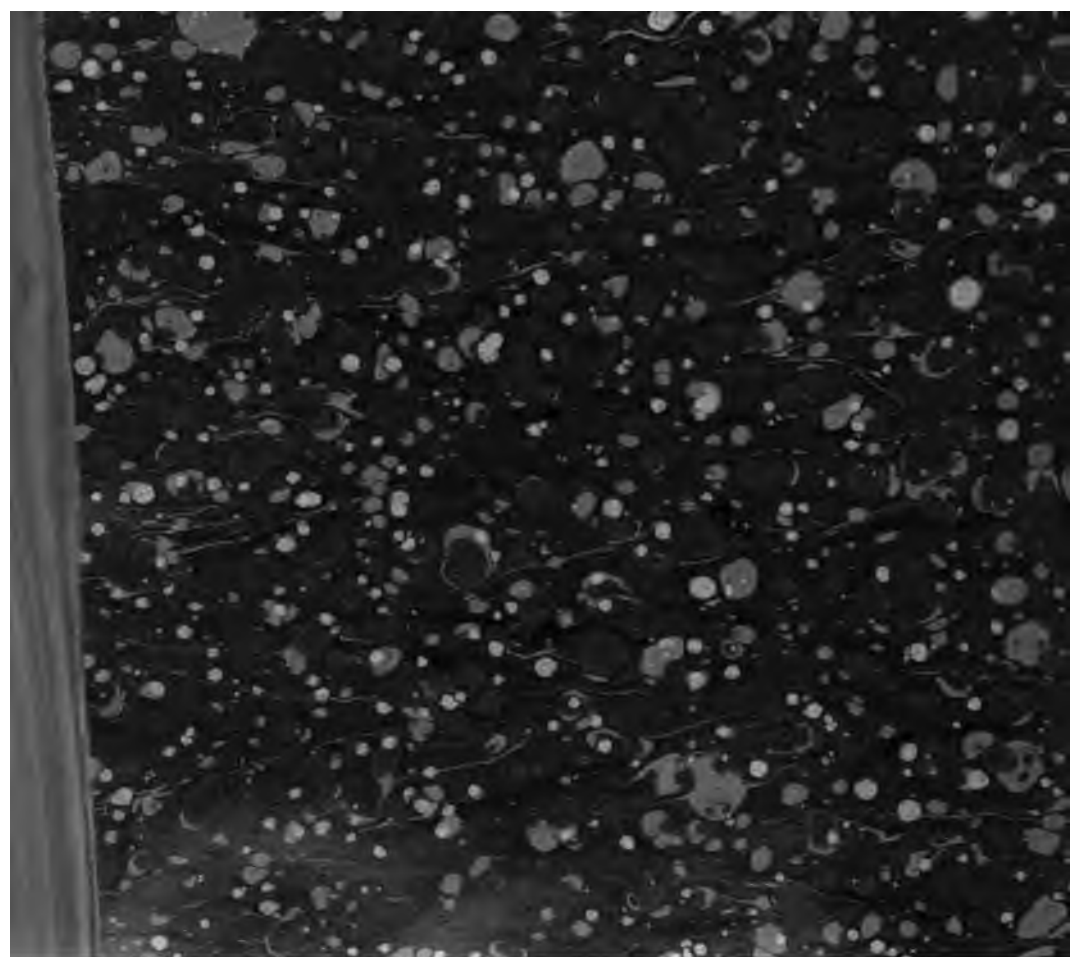
11

11

11







510.6
5678

V. 8-10

